Выпуск 32(49) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Численные методы

УДК 517.25/26

МЕТОД ПОТОЧЕЧНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Р.В.Намм

В работе исследуется скорость сходимости метода поточечной релаксации в применении к задачам квадратичного программирования, возникающих при конечноэлементной аппроксимации вариационных неравенств. Оценки скорости сходимости, приведенные в п.3, не учитывают специальную структуру матрицы квадратичной формы и носят более общий характер.

I. Рассматривается задача

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - c^* \int\limits_{\Omega} v\,dx \right] - \min! \quad (c^* > 0 - const), \\ v \in K = \{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ |\nabla w(x)| \leq 1 \}. \end{cases} \tag{I}$$

Здесь $\Omega \subset R^2$ – открытая ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – соответствующее пространство С.Л.Соболева.

Известно (см.[I]), что решение $\bar{u}$ задачи (I) существует и единственно. Оно является одновременно решением следующей краевой задачи:

$$-\Delta u = c^* \quad \text{в } \Omega_E = \{ x \in \Omega : |\nabla \bar{u}(x)| < 1 \},$$

$$|\nabla u(x)| = 1 \quad \text{в } \Omega_P = \Omega / \Omega_E,$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0,$$

$u, \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,2$, непрерывны на линии, разделяющей Ω_E и Ω_p.

Так как функция $\bar{u}$ на самом деле неизвестна, то в задаче граница между областью упругости Ω_E и областью пластичности Ω_p является одним из неизвестных. Вопрос единственности решения краевой задачи остается невыясненным [2].

При некоторых предположениях о гладкости Γ области Ω [3] задача (I) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - c^* \int\limits_{\Omega} v\, dx \right] - min! \\ v \in K_1 = \{ w \mid w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \ |w(x)| \leq \delta(x,\Gamma) \}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\delta(x,\Gamma)$ - расстояние от точки x до границы Γ.

В дальнейшем будем рассматривать задачу (2). Области упругости и пластичности в (2) определяются следующим образом:

$$\Omega_E = \{ x \in \Omega : |\bar{u}(x)| < \delta(x,\Gamma) \}, \ \Omega_p = \{ x \in \Omega : |\bar{u}(x)| = \delta(x,\Gamma) \}.$$

Рассмотрим вопрос численного решения задачи (2).

2. Внешняя аппроксимация. Определим в R^2 сетку R_h:

$$R_h = \{ M_{ij} \mid M_{ij} \in R^2, \ M_{ij} = \{ih, jh\}, \ i,j \in Z \},$$

Z - множество целых чисел, h - длина шага сетки R_h. Каждому узлу M_{ij} сетки R_h, согласно [I], поставим в соответствие брус с центром M_{ij}:

$$\omega_h^\circ(M_{ij}) =](i-\tfrac{1}{2})h, (i+\tfrac{1}{2})h[\times](j-\tfrac{1}{2})h, (j+\tfrac{1}{2})h[$$

и крест (с центром M_{ij}):

$$\omega_h^1(M_{ij}) = \omega_h^\circ(M_{ij} \pm \tfrac{h}{2} l_1) \cup \omega_h^\circ(M_{ij} \pm \tfrac{h}{2} l_2);$$

l_1, l_2 - единичные орты соответствующих координатных осей. Определим далее

$$\Omega_h = \{ M_{ij} \mid \omega_h^1(M_{ij}) \subset \Omega \},$$

$$\Gamma_h = \{ M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, \ M_{ij} \notin \Omega_h,$$

и по крайней мере одна из четырех точек $M_{ij}\pm hl_1$, $M_{ij}\pm hl_2$ принадлежит Ω_h } :

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h;$$

$$V_h = \{u_h \mid u_h = (u_{ij})_{M_{ij}\in\Omega_h},\ u_{ij}\in R\},$$

и отображение $d_h : V_h \longrightarrow L_2(R^2)$, задаваемое по формуле

$$d_h u_h = \sum_{M_{ij}\in\Omega_h} u_{ij}\,\theta_h^{M_{ij}}, \qquad (3)$$

где $\theta_h^{M_{ij}}$ - характеристическая функция множества $\omega_h^*(M_{ij})$. Приближенное решение будем искать в форме (3). Сужения функций $\theta_h^{M_{ij}}$, $M_{ij}\in\Omega_h$, на Ω не принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$, поэтому функционал в (2) нельзя определить в пространстве, натянутом на эти функции. Его необходимо видоизменить. Для этого производные в функционале заменяются конечными разностями:

$$\delta_i\varphi(x) = \frac{1}{h}\Big[\varphi(x+\frac{h}{2}l_i) - \varphi(x-\frac{h}{2}l_i)\Big], \quad i=1,2.$$

Аппроксимируем функционал в (2) функцией $\mathcal{J}_h : V_h \longrightarrow R$ вида

$$\mathcal{J}_h(u_h) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega}|\delta_k d_h u_h|^2 dx - c^*\int_{\Omega} d_h u_h\, dx.$$

Рассмотрим в качестве приближенной задачу

$$\begin{cases} \mathcal{J}_h(u_h) - min\,! \\ u_h\in K_{1h} = \{v_h\in V_h,\ |v_{ij}|\le \delta(M_{ij},\Gamma),\ M_{ij}\in\Omega_h\}. \end{cases} \qquad (4)$$

Заметим, что множество K_{1h} ограничено и замкнуто в V_h.

Функционал $\mathcal{J}_h$ в явном виде можно записать следующим образом [I]:

$$\mathcal{J}_h(u_h) = \frac{h^2}{4}\sum_{M_{ij}\in\bar{\Omega}_h}\Big|\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h}\Big|^2 + \Big|\frac{u_{i-1j}-u_{ij}}{h}\Big|^2 + \Big|\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h}\Big|^2 +$$

$$+\left|\frac{u_{ij-1}-u_{ij}}{h}\right|^2-h^2c^*\sum_{M_{ij}\in\Omega_h}u_{ij}.$$

В формуле подразумевается, что $u_{kl}=0$ при $M_{kl}\in\Gamma_h$.

В принятой терминологии такие аппроксимации называются внешними.

В [I] приведена следующая теорема о сходимости при $h\to 0$ приближенного решения $d_h u_h^*$ к точному $\bar u$.

ТЕОРЕМА I. $\{d_h u_h^*, \delta_1 d_h u_h^*, \delta_2 d_h u_h^*\}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\{\bar u, \frac{\partial \bar u}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar u}{\partial x_2}\}$ сильно в $(L_2(\Omega))^3$.

Упорядочим множество $\{u_{ij}\}_{M_{ij}\in\Omega_h}$ по возрастающим значениям индексов i,j: $(\ldots, u_{ij}, u_{ij+1},\ldots, u_{i+1j}, u_{i+1j+1},\ldots)$. Обозначив через $x\in R^N$ полученный вектор, задачу (4) можно привести к виду

$$\begin{cases} J(x)=\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle+\langle \hat p, x\rangle - min! \\ x\in\hat K, \end{cases} \qquad (5)$$

где $A=A^*$, $\langle Ax,x\rangle>0$ для $x\neq 0$, $\hat K=\prod_{i=1}^{N}K_i$, $K_i=[a_i, b_i]$, $i=\overline{1,N}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение в R^N. В следующем пункте вопрос о численном решении задачи (5) рассматривается в предположении, что A – симметрическая, положительно определенная матрица общего вида.

3. Поточечная релаксация. Алгоритм поточечной релаксации выглядит следующим образом:

I) зададим начальный вектор x^0;

2) определим $x_i^{n+1/2}$ как решение неравенства

$$J(x_1^{n+1},\ldots,x_{i-1}^{n+1},x_i^{n+1/2},x_{i+1}^n,\ldots,x_N^n)\le J(x_1^{n+1},\ldots,x_{i-1}^{n+1},y,x_{i+1}^n,\ldots,x_N^n),$$

$$y\in\,]-\infty,+\infty[\,;$$

3) $x_i^{n+1}=P_{K_i}((1-\omega)x_i^n+\omega x_i^{n+1/2})$, где $P_{K_i}(\cdot)$ – оператор проектирования на K_i, а ω – параметр релаксации.

Для задачи (5) справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0<\omega<2$. Тогда алгоритм поточечной релаксации сходится к элементу $x^*\in\hat{K}$, минимизирующему функционал J на $\hat{K}$.

Доказательство этой теоремы имеется в [I]. Там же приведены результаты численных экспериментов по решению задачи о кручении стержня методом поточечной релаксации. Исследуем вопрос о скорости сходимости метода. При этом воспользуемся результатами, полученными в [I] при доказательстве сформулированной выше теоремы 2.

Обозначим множество индексов, соответствующих нулевым компонентам вектора $\nabla J(x^*)$, через E, и пусть $P=N\setminus E$. Для произвольного вектора a через a_E и a_P обозначены компоненты, соответствующие множествам E и P.

ЛЕММА I. Пусть $0<\omega<2$. Тогда существует номер I_1, начиная с которого в методе поточечной релаксации, примененном к задаче (5),

$$x_P^{I_1}=x_P^{I_1+1}=\ldots=x_P^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $0<\omega<2$, то по теореме 2 $x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}x^*$. Пусть $i_0\in P$. Как нетрудно видеть, для доказательства леммы достаточно показать, что, начиная с некоторого номера, $(1-\omega)x_{i_0}^n+\omega x_{i_0}^{n+1/2}\notin K_{i_0}$.

Введем обозначения:

$$^{i}x^{n+1}=(x_1^{n+1},\ldots,x_{i-1}^{n+1},x_i^{n+1},x_{i+1}^n,\ldots,x_N^n);$$

$$^{i}x^{n+1/2}=(x_1^{n+1},\ldots,x_{i-1}^{n+1},x_i^{n+1/2},x_{i+1}^n,\ldots,x_N^n).$$

Ввиду $\|{}^ix^{n+1}-x^*\|\leq\|{}^ix^{n+1}-x^{n+1}\|+\|x^{n+1}-x^*\|\leq\|x^n-x^{n+1}\|+\|x^{n+1}-x^*\|$ имеем ${}^ix^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}x^*$. Так как $i_0\in P$, то $\frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}(x^*)\neq 0$. Пусть для определенности $\frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}(x^*)=-\alpha<0$. Тогда существует такое $r>0$, что для всех x, принадлежащих шару $B_r(x^*)$ радиуса r с центром в x^*, справедливо $\frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}(x^*)\leq-\frac{\alpha}{2}<0$. Пусть l_{i_0} – орт i_0-й оси. На основании алгоритма для получения ${}^{i_0}x^{n+1}$ надо произвести сдвиг из ${}^{i_0-1}x^{n+1}$ в направлении l_{i_0}. Рассмотрим шар $B_{r/2}(x^*)$. Для любого $x \in B_{r/2}(x^*)$ имеем $x + r/2\, l_{i_0} \in B_r(x^*)$ и, следовательно, $\frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}(x + r/2\, l_{i_0}) \leq -\frac{\alpha}{2}$. Так как ${}^{i_0-1}x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$, то при достаточно больших n справедливо ${}^{i_0-1}x^{n+1} \in B_{r/2}(x^*)$. Это означает, что ${}^{i_0-1}x^{n+1} + r/2\, l_{i_0} \in B_r(x^*)$, следовательно,

$$\frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}({}^{i_0-1}x^{n+1} + r/2\, l_{i_0}) = -\frac{\alpha}{2} < 0.$$

Имеем.

$$J({}^{i_0}x^{n+1/2}) - J({}^{i_0-1}x^{n+1}) \leq J({}^{i_0-1}x^{n+1} + r/2\, l_{i_0}) - J({}^{i_0-1}x^{n+1}) \leq$$

$$\leq \frac{\partial J}{\partial x_{i_0}}({}^{i_0-1}x^{n+1} + r/2\, l_{i_0}) \cdot r/2 \leq -\frac{\alpha r}{4}.$$

Отсюда следует, что $\| {}^{i_0}x^{n+1/2} - {}^{i_0-1}x^{n+1} \| \geq r/2$. Тогда

$$|(1-\omega)\, {}^{i_0-1}x^{n+1} + \omega\, {}^{i_0}x^{n+1/2} - {}^{i_0-1}x^{n+1}| = \omega\, | {}^{i_0}x^{n+1/2} - {}^{i_0-1}x^{n+1} | \geq \frac{\omega r}{2}.$$

Это означает, что

$$(1-\omega)\, x_{i_0}^{n} + \omega\, x_{i_0}^{n+1/2} - x_{i_0}^{n} = \omega\, (x_{i_0}^{n+1/2} - x_{i_0}^{n}) \geq \frac{\omega r}{2}.$$

Так как $x_{i_0}^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{i_0}^{*}$ и $x_{i_0}^{*}$ является крайней точкой интервала K_{i_0}, то отсюда следует, что при достаточно больших n имеет место $(1-\omega)\, x_{i_0}^{n} + \omega\, x_{i_0}^{n+1/2} \notin K_{i_0}$. Лемма доказана.

Для матрицы A через A_E обозначим подматрицу A, соответствующую множеству E, т.е. $A_E = (a_{ij})$, $i, j \in E$. Очевидно, что $A = \mathcal{D} + L + R$, где $\mathcal{D}$ – диагональная матрица, L – левая треугольная, $L = R^*$. Аналогично $A_E = \mathcal{D}_E + L_E + R_E$. При естественном предположении о том, что $x_E^* \in int \prod_{i\in E} K_i$, нетрудно установить, что, начиная с некоторого номера $I_2 \geq I_1$, для всех $i \in E$ выполняются соотношения: $(1-\omega)x_i^{n-1} + \omega x_i^{n-1/2} \in K_i$, $0<\omega<2$, т.е.

$$x_i^n = \mathcal{P}_{K_i}((1-\omega)x_i^{n-1} + \omega x_i^{n-1/2}) = (1-\omega)x_i^{n-1} + \omega x_i^{n-1/2}, \quad i \in E. \tag{6}$$

В дальнейшем полагаем $n > I_2$. Рассмотрим функционал

$$J_E(x_E) = J(x_P^*, x_E);$$

$$J_E(x_E) = \frac{1}{2}\langle A_E x_E, x_E\rangle + \langle \hat{p}, x_E\rangle + b.$$

Описанный алгоритм при $n > I_2$ можно рассматривать как обычный метод релаксации [7] для решения системы $A_E x_E = -\hat{p}$. Матрица перехода в методе релаксации имеет вид [8] :

$$T(\omega) = (\mathcal{D}_E + \omega L_E)^{-1}[(1-\omega)\mathcal{D}_E - \omega R_E] \quad (0 < \omega < 2).$$

А.М.Островским для случая $\omega = 1$ была получена оценка спектрального радиуса $\mu(T(1))$ матрицы $T(1)$ (см.[7]):

$$\mu(T(1)) \le \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{m_E \delta_E}{\|R_E\|^2}}},$$

где m_E - наименьшее собственное число матрицы A_E , $\delta_E = \min\{a_{ii} \mid i \in E\}$.

Рассматривая для собственного вектора U матрицы $T(1)$ три возможных случая

1) $\langle R_E U, U\rangle = a + b_i, \ b \ne 0;$

2) $\langle R_E U, U\rangle = a \ge 0;$

3) $\langle R_E U, U\rangle = a < 0$

и замечая, что в случае 1) U не может быть собственным вектором матрицы A_E , а в случае 3) должно быть $|a| < \|R_E\|$, следуя [7], нетрудно доказать строгое неравенство

$$\mu(T(1)) < \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{m_E \delta_E}{\|R_E\|^2}}}.$$

При $0 < \omega < 2$ аналогичным путем устанавливается

$$\mu(T(\omega)) < \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2-\omega}{\omega}\cdot\frac{m_\varepsilon \delta_\varepsilon}{\|(1-\frac{1}{\omega})\mathcal{D}_\varepsilon + R_\varepsilon\|}}} \equiv q_\varepsilon .$$

Таким образом, начиная с $n \geqslant I_2$, для алгоритма поточечной релаксации справедливо (см.[9], с.15)

$$|x^n - x^*| \leqslant c\, q_\varepsilon^{\,n-I_2}.$$

Однако эффективная оценка постоянной c на указанном пути вряд ли может быть получена, так как для этого потребовалось бы ввести нормировку исходного пространства, при которой соответствующая норма матрицы $T(\omega)$ была бы не больше q_ε. Вместе с тем непосредственный анализ релаксационного процесса позволяет установить оценку

$$|x^n - x^*| \leqslant \sqrt{\frac{\mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^{I_2}) - \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^*)}{m_\varepsilon}} \cdot q_\varepsilon^{\,n-I_2} \qquad (n \geqslant I_2).$$

Действительно, из (6) и $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i}({}^i x^{n+1/2}) = 0$ нетрудно получить

$$\langle \nabla \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^{n+1}), x_\varepsilon^{n+1} - x^* \rangle \leqslant \|(1-\tfrac{1}{\omega})\mathcal{D}_\varepsilon + R_\varepsilon\| \cdot |x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^n| \cdot |x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^*|,$$

откуда следует

$$\|(1-\tfrac{1}{\omega})\mathcal{D}_\varepsilon + R_\varepsilon\| \cdot |x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^n| \geqslant m_\varepsilon |x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^*|$$

и

$$\|(1-\tfrac{1}{\omega})\mathcal{D}_\varepsilon + R_\varepsilon\| \cdot \|x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^n\| \cdot \|x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^*\| \geqslant 2(\mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^{n+1}) - \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^*)).$$

Последние два неравенства дают

$$\frac{\|(1-\frac{1}{\omega})\mathcal{D}_\varepsilon + R_\varepsilon\|^2}{m_\varepsilon} \cdot \|x_\varepsilon^{n+1} - x_\varepsilon^n\|^2 \geqslant 2(\mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^{n+1}) - \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^*)),$$

откуда с учетом

$$\mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^{n+1}) - \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^*) + \frac{1}{2}\left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)\delta_\varepsilon |x_\varepsilon^{n+1} - x^n| \leqslant \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^n) - \mathcal{J}_\varepsilon(x_\varepsilon^*)$$

(см.[1]) получается требуемая оценка.

Возвращаясь к задаче об упругопластическом кручении стержня, будем оценивать скорость сходимости процесса релаксации в норме $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_h$, являющейся сеточным аналогом пространства $L_2(\Omega)$. Если теперь учесть, что для соответствующей матрицы A при малых h наименьшее собственное число m имеет порядок $O(h^2)$, а $m_\varepsilon \geqslant m$, то можно подобрать постоянную c_1, не зависящую от h, такую, что

$$h\sqrt{\frac{c}{m_\varepsilon}} \leqslant c_1 \quad , \text{ где } c = J_\varepsilon(x_\varepsilon^{I_2}) - J_\varepsilon(x_\varepsilon^*).$$

Отсюда следует, что $\| x^n - x^* \|_1 \leqslant c_1 q_\varepsilon^{n-I_2}$.

4. Алгоритм поточечной релаксации для задачи (4) при организации итераций по возрастающим значениям индексов i,j принимает такой вид:

$$\begin{cases} 1) \text{ выбираем } x^0 = (u_{ij}) \in K_{1h}; \\ 2) \; u_{ij}^{n+1/2} = (1-\omega)u_{ij}^n + \frac{\omega}{4}(u_{i+1j}^n + u_{ij+1}^n + u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1} + h^2 c) \\ 3) \; u_{ij}^{n+1} = P_{K_{ij}}(u_{ij}^{n+1/2}); \end{cases} \quad (7)$$

Для (4) $K_{ij} = [-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$, δ_{ij} – расстояние от M_{ij} ($M_{ij} \in \Omega_h$) до границы Γ области Ω.

Здесь принимается соглашение о том, что $u_{kl} = 0$, если $M_{kl} \in \Gamma_h$.

Положим $0 < \omega \leqslant 1$. Тогда справедливо следующее, легко проверяемое утверждение: для того чтобы в процессе релаксации имело место $x^0 \leqslant x^1 \leqslant x^2 \leqslant \ldots$, достаточно, чтобы $x^0 \leqslant x^1$. Тем самым утверждение справедливо, например, при $x^0 = 0$. В дальнейшем начальную точку выбираем таким образом, чтобы процесс поточечной релаксации был неубывающим.

В п. 3 было показано, что за конечное число шагов будут найдены компоненты решения, соответствующие области пластичности. В силу монотонности процесса релаксации для любого j можно ввести множество P_j индексов, соответствующих тем компонентам x_p^*, которые были найдены за j шагов. Очевидно,

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P.$$

Для любого j рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle \tilde{p}, x\rangle - \min! \\ x \in K_{P_j} \quad , \text{ где } K_{P_j} = \prod_{i \in P_j} K_i . \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через x^{P_j} решение этой задачи. Задача (8) аналогична задаче (5). Если $i \in P_j$, то $K_i =]-\infty, +\infty[$, и поэтому для решения задачи (8) возможно применение алгоритма (7).

В дальнейшем нам понадобится легко доказываемое с помощью алгоритма (7) свойство решения x^{P_j} задачи (8): $x^{P_j} \geqslant x^{P_{j+1}}$ $\forall j$. Тогда для любого n справедливо

$$|x^n - x^{P_0}| \geqslant |x^n - x^{P_1}| \geqslant \dots \geqslant |x^n - x^*|. \qquad (9)$$

Допустим, что в ходе итерационного процесса при произвольном j имеет место

$$P_j \neq P_{j+1} = \dots = P_{j+s} \neq P_{j+s+1}.$$

Назовем промежуток от $(j+1)$ -го шага до $(j+S)$-го стабилизированным промежутком длины S. Рассмотрим два соседних стабилизированных промежутка B_1 и B_2, начинающихся соответственно с шагов $(k+1)$ и $(j+1)$. Пусть S_1 и S_2 – их длины, т.е. $(k+S_1)=j$ и

$$P_k \neq \underbrace{P_{k+1} = \dots = P_{k+S_1}}_{B_1} \neq \underbrace{P_{j+1} = \dots = P_{j+S_2}}_{B_2} \neq P_{j+S_2+1}.$$

Аналогично тому, как это было проделано в п.3, разобьем множество N на два подмножества P_{j+1} и $E_{j+1} = N \setminus P_{j+1}$. Через $A_{E_{j+1}}$ обозначим подматрицу A, соответствующую множеству E_{j+1}. Тогда в стабилизированном промежутке B_2 тем же способом, как и ранее в п.3, можно получить следующую оценку скорости сходимости относительно $x^{P_{j+1}}$:

$$|x^{j+1+i} - x^{P_{j+1}}| \leqslant c_{E_{j+1}} \cdot q^{i}_{E_{j+1}}, \text{ где } i = \overline{0, S_2 - 1},$$

$$c_{E_{j+1}} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}(x^{j+1}) - \mathcal{J}(x^{P_{j+1}})}{m_{E_{j+1}}}}, \quad q_{E_{j+1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2-\omega}{\omega} \frac{m_{E_{j+1}} \cdot \delta_{E_{j+1}}}{[(1-\frac{1}{\omega})\mathcal{D}_{E_{j+1}} + R_{E_{j+1}}]^2}}}.$$

Параметры матрицы $A_{E_{j+1}}$: $\delta_{E_{j+1}}, m_{E_{j+1}}, \mathcal{D}_{E_{j+1}}, R_{E_{j+1}}$ имеют тот же смысл, что и $\delta_E, m_E, \mathcal{D}_E, R_E$ для матрицы A_E. Из (9) следует, что

$$|x^{j+1+i} - x^*| \leqslant |x^{j+1+i} - x^{P_{j+1}}| \leqslant c_{E_{j+1}} \cdot q^{i}_{E_{j+1}}, \quad i = \overline{0, S_2 - 1}.$$

Далее,

$$\mathcal{I}(x^{j+1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{j+1}}) \leqslant \mathcal{I}(x^{j}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{j+1}}) = \mathcal{I}(x^{k+S_1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{k+1}}).$$

Подобно тому, как это делалось в п.3, можно показать, что

$$\mathcal{I}(x^{k+S_1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{k+1}}) \leqslant q_{\varepsilon_{k+1}}^{2(S_1-1)} (\mathcal{I}(x^{k+1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{k+1}})),$$

следовательно,

$$\| x^{j+1+i} - x^{*} \| \leqslant c_{\varepsilon_{j+1}} \cdot q_{\varepsilon_{j+1}}^{i} \leqslant \sqrt{\frac{\mathcal{I}(x^{k+1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{k+1}})}{m_{\varepsilon_{j+1}}}} \cdot q_{\varepsilon_{k+1}}^{S_1-1} \cdot q_{\varepsilon_{j+1}}^{i} \quad (10)$$

Так как $k < j$, то $m_{\varepsilon_{k+1}} \leqslant m_{\varepsilon_{j+1}}$,

$$\|(1-\tfrac{1}{\omega})\mathcal{D}_{\varepsilon_{k+1}} + R_{\varepsilon_{k+1}}\| \geqslant \|(1-\tfrac{1}{\omega})\mathcal{D}_{\varepsilon_{j+1}} + R_{\varepsilon_{j+1}}\|.$$

В силу того, что диагональные элементы матрицы A $(A = \mathcal{D} + L + R)$ для любого $i = \overline{1, N}$ равны 4, то $\delta_{\varepsilon_{k+1}} = \delta_{\varepsilon_{j+1}}$. Отсюда следует, что $q_{\varepsilon_{k+1}} \geqslant q_{\varepsilon_{k+1}}$. Тогда из (10) имеем

$$\| x^{j+1+i} - x^{*} \| \leqslant \sqrt{\frac{\mathcal{I}(x^{k+1}) - \mathcal{I}(x^{\rho_{k+1}})}{m_{\varepsilon_{k+1}}}} \cdot q_{\varepsilon_{k+1}}^{S_1-1+i}.$$

Очевидно, что описанный выше процесс можно продолжить, и мы окончательно получаем

$$\| x^{n} - x^{*} \| \leqslant c_{\varepsilon_0} \cdot q_{\varepsilon_0}^{n-\lambda_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$c_{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mathcal{I}(x^{*}) - \mathcal{I}(x^{\rho_0})}{m_{\varepsilon_0}}}, \quad q_{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2-\omega}{\omega} \cdot \frac{m_{\varepsilon_0} \cdot \delta_{\varepsilon_0}}{\|(1-\frac{1}{\omega})\mathcal{D}_{\varepsilon_0} + R_{\varepsilon_0}\|^2}}},$$

λ_n – номер стабилизированного промежутка, соответствующего точке x^{n}. Для любого $n > 0$ имеет место

$$\lambda_n \leqslant |P| \qquad (\lambda_0 = 0).$$

Так как $\bar{\varepsilon}_0 = N$, то δ_{ε_0}, m_{ε_0}, $\mathcal{D}_{\varepsilon_0}$, R_{ε_0} являются соответствующими параметрами матрицы A. Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. **Пусть процесс поточечной релаксации является неубывающим. Тогда имеет место**

$$|x^n - x^*| \leq \frac{c_{E_*}}{q_{E_*}^{\lambda}} \cdot q_{E_*}^{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где λ – любая оценка сверху числа $|P|$.

В связи с априорной оценкой числа λ целесообразно заметить следующее:

1) если для рассматриваемой области известно решение задачи с большей константой, то в качестве λ можно взять число точек пластичности, соответствующих этому решению;

2) если рассматривается итеративный процесс с измельчением шага сетки h, то для определения λ на очередном шаге может использоваться решение предыдущего шага;

3) для установления λ может быть полезным знание решения для области, "близкой" по геометрии к рассматриваемой.

При определении λ могут оказаться полезными результаты по геометрии зон пластичности для определенных областей, полученные в [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. ГЛОВИНСКИ Р., ЛИОНС Ж.-Л., ТРЕМОЛЬЕР Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979.
2. TING T.W. Elastic-plastic torsion of simply connected cylindrical bars. – Indiana Univ. Math. J., 1971, v.20, p.1047-1076.
3. CAFFARELLI L.A., FRIEDMAN A. The free boundary for elastic-plastic torsion problems. – Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v.252, p. 65-97.
4. CAFFARELLI L.A., FRIEDMAN A., POZZI G. Reflection methods in the elastic-plastic torsion problem. – Indiana Univ. Math. J., 1980, v.29, p.205-228.
5. YOUNG D.M. Iterative solution of large linear systems. – N.Y. – London: Academic Press, 1971.
6. OSTROVSKI A.M. On the linear iteration procedures for

symmetric matrices. - Rend. Mat. e sue appl. Univ. Roma. Ser. V, 1954, v.14, p.140-163.
7. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - 2-е изд. - М.-Л.: Физматгиз, 1963.
8. ОГАНЕСЯН Л.А., РИВКИНД В.Я., РУХОВЕЦ Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч.I,II. - Дифференциальные уравнения и их применение, вып. 5,8. Вильнюс, 1974.
9. Приближенное решение операторных уравнений/ Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. - М.: Наука, 1969.

Поступила в ред.-изд. отдел
6.08.1982 г.