УДК 519.876.5:519.857.3+621.311.21

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ СИСТЕМ

В.А.Кардаш, Э.О.Рапопорт

При рассмотрении процессов развития и функционирования водохозяйственных систем следует учитывать, что параметры, описывающие ее технические характеристики (ёмкость водохранилища, пропускные способности каналов, мощности насосных станций и т.п.), практически постоянны на протяжении многих лет. Вместе с тем, такие параметры, как количество ежегодно забираемой из водохранилища воды, количество воды, подаваемой по како-либо из ветвей сети каналов и т.п., являются относительно гибкими, оперативными. Некоторые из решений, связанных с вариацией этих параметров (например, распределение воды по полям и культурам), весьма часто (ежемесячно, ежедекадно) можно менять в зависимости от сложившейся, заранее не предвиденной ситуации.

Исходя из этого, при моделировании целесообразно разделять функциональные и структурные параметры объектов управления.

Однако как функциональные, так и структурные управляющие решения могут, в свою очередь, иметь разную степень инерционности, гибкости. При этом реализуемые более инерционные управления, очевидно, накладывают известные ограничения на выбор последующих, более гибких управляющих решений. В частности, функциональные управления формируются в рамках структурных управлений. Форма этих "рамок" определяется спецификой задачи [1-3].

Всё это позволяет говорить об иерархии параметров управления по уровням их инерционности. Такую иерархию следует обязательно учитывать при системном анализе производственных объектов наряду с другими типами иерархий: пространственной, временной, организационной и т.п.

Если рассматривать лишь двухуровневую иерархию управляющих параметров, то структурные параметры будем называть стратегическими, а параметры функционирования – тактическими.

Отметим, что совместное рассмотрение в одной задаче стратегических и тактических параметров позволяет более точно находить конструктивные характеристики объекта – о п т и м а л ь н у ю с т р а т е г и ю, наилучшим образом приспособленную к условиям его дальнейшего функционирования.

Модели сложных систем с пространственной, временной и прочей иерархией подсистем обычно приводят к задачам достаточно больших размерностей. Решать такие задачи невозможно даже на современных ЭВМ. Для численной реализации таких моделей используют тот или иной прием декомпозиции: разбиение большой задачи на систему существенно меньших подзадач с последующим синтезированием решения исходной задачи из полученных частных решений. При этом иерархия параметров основной задачи порождает естественную схему такой декомпозиции.

Сказанное, несомненно, относится и к случаю инерционной иерархии параметров управления. В случае двухуровневой иерархии естественной схемой п а р а м е т р и ч е с к о й д е к о м п о з и ц и и является фиксирование на I-м этапе стратегии и поиск оптимальной тактики в рамках этой стратегии. Знание оптимальной тактики при каждой допустимой стратегии позволяет искать уже оптимальное стратегическое решение. Именно на этом основаны методы нахождения априорных и апостериорных решений двухэтапных задач стохастического программирования [2,4]. Эта же идея реализуется и в случае, когда в оптимизационной модели сложной системы иерархические подсистемы представляются в агрегированном виде производственными функциями от стратегических параметров. Важно подчеркнуть, что такие производственные функции могут быть получены не только статистическими методами [5,6], но и с помощью моделирования реакции подсистемы на вариацию стратегических параметров [2]. В этом случае прием параметрической декомпозиции особенно удобен, поскольку каждая подсистема иерархии может рассматриваться как самостоятельная модель, для которой нетрудно имитировать реакцию на изменение стратегий исходной системы. Естественно, что при этом параметрическая декомпозиция является конструктивным приемом лишь в случае малого числа стратегических параметров.

В данной статье двухуровневая иерархия используется при построении модели проектирования руслового водохранилища, обслуживающего нужды двух отраслей - водопотребителей. Применение в этой модели принципов параметрической декомпозиции позволяет отдельно изучить задачу функционирования комплекса. При фиксированных стратегических параметрах получается задача оптимального управления дискретной марковской цепью. Специфика возникающей задачи позволила получить простой алгоритм нахождения ее оптимального решения. На основе этого решения удалось получить конструктивную зависимость целевого функционала и ограничений общей задачи только от стратегических параметров.

§I. Задача проектирования руслового водохранилища

Рассмотрим задачу проектирования руслового водохранилища с многолетним регулированием случайного стока в целях орошения и получения электроэнергии. Межведомственный орган, формирующий задание на проектирование, должен учитывать интересы как сельского хозяйства, так и энергетики. Сельское хозяйство стремится максимизировать чистый доход и минимизировать ущербы от затопления сельхозугодий[ж)]. Энергетика заинтересована обеспечить фиксированный уровень потребностей в электроэнергии. При этом если на гидростанции выработано недостаточное её количество, то дефицит должен покрываться за счет строительства резервных тепловых электростанций. Затраты на строительство водохранилища и резервных ТЭС должны быть минимальными.

В качестве основных проектных стратегических параметров водохранилища принимаются высота плотины h и объем водох-

---

ж) В качестве критерия оптимальности для сельского хозяйства можно взять и другие, например критерий минимума суммарных текущих и приведенных капитальных затрат на заданный объем продукции с учетом ущербов от затопления сельхозугодий. Это принципиально не изменит существа рассматриваемой модели.

хранилища V . Заметим, что контур водохранилища C определяется при данных h и V рельефом местности. Для уменьшения площади затопления можно учитывать и возможности построения дамбы. В этом случае контур дамбы C также является искомым стратегическим параметром. Неизвестную суммарную годовую мощность резервных ТЭС обозначим через W .

При фиксированной структуре посевов и режиме орошения чистый доход в сельском хозяйстве зависит от размеров площади x , подготавливаемой к орошению. Предполагается, что первоначально имеется площадь пашни S , которая в этих условиях разбивается на три части: подготавливаемая к орошению x , идущая под затопление S_1 , богарная $S-S_1-x$.

Годовой сток реки Q – случайная величина с известной функцией распределения f (независимо от года).

Пусть к началу года t запас воды в водохранилище равен V_t . Задача оперативного (тактического) управления состоит в том, чтобы распределить V_t на нужды сельского хозяйства $x_t q$ и энергетики y_t в данном году и часть оставить в запасе на следующий год. При этом

$$V_{t+1}=\eta\,(V_t-x_t q-y_t)+Q,$$

где η – коэффициент потерь, q – средняя оросительная норма на I га.

Выпишем теперь функции, характеризующие указанные интересы каждой отрасли.

I) Многолетний чистый доход в сельском хозяйстве с учетом дисконтирования

$$\Phi_1=M\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t[\varphi_1(x_t)+\varphi_2(x-x_t)+\varphi_3(S-S_1-x)],$$

где M – операция усреднения по всем временным цепочкам реализаций случайного стока $Q_t\ (t=0,1,\ldots)$; $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ – функции чистого дохода соответственно с орошаемой пашни (при фиксированной оросительной норме q), с площадей, подготовленных к орошению, но не орошаемых, с богары с учетом затопляемых площадей.

2) Убытки сельского хозяйства от затопления составляют

$$\Phi_2 = \iint\limits_{\Omega_c} L(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta ,$$

где $L(\alpha,\beta)$ – норматив убытков от затопления на единицу площади в точке местности с координатами (α,β), Ω_c – площадь, ограниченная контуром C (площадь затопления).

3) Среднее количество электроэнергии, вырабатываемое за год гидростанцией, обозначим через $N(y_t)$. Вообще говоря, N зависит от переменной высоты подпора воды в верхнем бьефе плотины, которая, в свою очередь, определяется характером управления водораспределением. Однако эти зависимости целесообразно, по-видимому, подробно учитывать только в моделях внутрисезонного регулирования.

Пусть γ – удельные текущие затраты на выработку единицы электроэнергии на гидростанции, ε_1, ε_2 – нормативы капитальных и текущих затрат на единицу годовой мощности ТЭС, $\bar{N}$ – уровень потребностей в электроэнергии, который необходимо обеспечить. Тогда суммарные приведенные затраты на гарантированное производство электроэнергии за многолетний период работы гидростанции (без затрат на строительство плотины) будут иметь вид*):

$$\Phi_3 = \varepsilon_1 W + \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t (\varepsilon_2 (\bar{N} - N(y_t))^+ + \gamma N(y_t)).$$

4) Пусть $\Phi_4 = \Phi_4(h)$ – функция затрат на строительство гидростанции, если высота плотины h.

5) Если $F(h;\alpha,\beta)$ – удельные затраты на строительство дамбы в точке с координатами (α,β) при высоте плотины h, то общие затраты на строительство дамбы по контуру C записываются в виде следующего криволинейного интеграла:

$$\Phi_5 = \int\limits_C F(h;\alpha,\beta)\, dc .$$

Все введенные выше параметры должны удовлетворять следующим ограничениям:

---

*) Через a^+, как обычно, обозначен $\max(a,0)$.

$$
\begin{cases}
0 \le x \le S - S_1, & x_t q + y_t \le V_t, \\
0 \le x_t \le x, & 0 \le y_t, \\
0 \le V_t \le V, & \bar{N} - N(y_t) \le W, \\
\quad V_{t+1} \le \eta (V_t - x_t q - y_t) + Q_t. &
\end{cases} \qquad (1)
$$

Таким образом, получаем задачу максимизации функционала

$$
\Phi = \Phi_1 - (\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5) \qquad (2)
$$

при ограничениях (1).

Исследование структуры задачи показывает, что стратегические параметры h, V и контур C связаны - должно выполняться следующее соотношение:

$$
\iint_{D_C} (h - \tilde{h}(\alpha, \beta))^+ d\alpha \, d\beta = V, \qquad (3)
$$

где $\tilde{h}(\alpha,\beta)$ - относительная высота точки с координатами (α, β). Теперь естественно выбирать h и C такие, чтобы выполнялось соотношение (3) и достигал максимума функционал

$$
\bar{\Phi} = \Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_5 . \qquad (4)
$$

Решение такой задачи и дает оптимальные значения $\bar{h}$ и $\bar{C}$ как функции от объема водохранилища V ж). Тем самым число неизвестных стратегических параметров можно сократить.

§2. Сведение стохастической задачи к детерминированной

Задача (1),(2) (с учетом (3), (4)) является типичной задачей с двухуровневой иерархией управлений: x, V и W - стратегические параметры, а $\{x_t\}, \{y_t\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ - тактические параметры. Если зафиксировать некоторую стратегию (x, V, W), то задача сводится к отысканию оптимальной тактики использования воды $\{x_t\}, \{y_t\}$.

Покажем сначала, как ее можно свести к управляемому марковскому процессу.

ж) Если известны $\bar{h}$ и $\bar{C}$, то высота дамбы в точке $(\alpha, \beta) \in \bar{C}$ равна $(\bar{h} - \tilde{h}(\alpha,\beta))^+$.

Не сильно ограничивая общности, можно считать, что все входящие в (I) параметры $(y_t, V_t, x_t q, Q_t)$ принимают значения из множества натуральных чисел. Этого можно добиться за счет выбора соответствующего масштаба и округления. Тогда в рассматриваемом процессе допустимые состояния, в которые может попадать система (количество воды в водохранилище), не произвольны, а принимают целочисленные значения, естественным образом упорядоченные. Управление (изъятие воды из водохранилища) есть перевод системы из большего состояния в меньшее.

Пусть объем водохранилища $\bar{V}$. Тогда процесс изменения количества воды в водохранилище можно записать в виде

$$V_{t+1} = min([\eta(V_t - z_t)] + Q_t, \bar{V}),$$

где $z_t = x_t q + y_t$, $0 \leqslant z_t \leqslant V_t$, величины V_t, z_t принимают целочисленные неотрицательные значения, а случайные величины Q_t независимы и при всех t принимают значение i с вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, K)$. Доход от управления z определяется функцией

$$z(z) = \sup_{\substack{(\delta, \varkappa) \in \Sigma \\ \varkappa q + \delta \leqslant z}} \{\varepsilon_2(\bar{N} - N(\delta)) + \gamma N(\delta) + \varphi_1(\varkappa) + \varphi_2(x - \varkappa)\}, \tag{5}$$

где

$$\Sigma = \{(\delta, \varkappa) / \delta \geqslant 0, \varkappa \geqslant 0, \varkappa \leqslant x, N(\delta) \leqslant \bar{N} - W\}.$$

Отметим, что $z(z)$ зависит только от количества используемой воды. Кроме того, каждому z можно сопоставить $\varkappa(z)$, $\delta(z)$, при которых достигается супремум в (5). Пусть в некоторый момент t система находилась в состоянии v. Если в этом состоянии принято управление z, то к моменту $t+1$ система находится в состоянии $[\eta(v - z)]$ и, учитывая случайный приток Q, может перейти в каждое из состояний $[\eta(v-z)] + i$ с вероятностью p_i, если $[\eta(v-z)+i] < \bar{V}$. В состояние $\bar{V}$ система переходит с вероятностью $\sum' p_i$, где суммирование ведется по всем i, для которых $[\eta(v-z)] + i \geqslant \bar{V}$. Тем самым для каждого состояния и каждого управления в этом состоянии определена матрица вероятностей перехода в другие состояния, зависящая только от исходного состояния и управления в этом состоянии. Мы имеем однородную управляемую марковскую цепь [7].

Обозначим через $b(v)$ математическое ожидание дохода, которое можно получить из состояния v при оптимальном управлении, если процесс продолжается бесконечно долго. Для $b(v)$ справедливо следующее уравнение Беллмана:

$$b(v) = \max_{0 \le z \le v} \left(r(z) + \rho \sum_{s=0}^{K} p_s \, b(\min([q(v-z)]+S, \bar{V})) \right),$$

где ρ – коэффициент дисконтирования. Если положить $b(\bar{V}+S) = b(\bar{V})$ для всех $S > 0$, то это уравнение можно записать в более симметричном виде:

$$b(v) = \max_{0 \le z \le v} \left(r(z) + \rho \sum_{s=0}^{K} p_s \, b([q(v-z)]+S) \right). \quad (6)$$

Позволяющий решить эту задачу алгоритм Говарда [8] сводится к нахождению вектора $(b(0), b(1), \ldots, b(\bar{V}))$ с минимальным $b(\bar{V})$, удовлетворяющего системе неравенств:

$$\begin{cases} b(0) \ge r(0) + \rho A(0); \; b(1) \ge r(1) + \rho A(0); \ldots ; b(\bar{V}) \ge r(\bar{V}) + \rho A(0), \\ \qquad b(1) \ge r(0) + \rho A(1); \ldots ; b(\bar{V}) \ge r(\bar{V}-1) + \rho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad b(\bar{V}) \ge r(0) + \rho A(\bar{V}), \end{cases} \quad (7)$$

где $A(i) = \sum_{s=0}^{K} p_s \, b([q^i]+S), \quad i = 0, 1, \ldots, \bar{V}$.

Учет специфических свойств этой задачи позволяет построить простой алгоритм, детализирующий указанную процедуру Говарда.

Пусть $\tilde{z}(v)$ – оптимальное управление для нашей задачи. Тогда в столбце v системы (7) неравенство строчки с номером $\bar{V} - \tilde{z}(v)$ обращается в равенство. Кроме того, если в состоянии v управление z выгоднее, чем $z+1$, то в состоянии $v+1$ управление $z+1$ выгоднее, чем $z+2$. Это свойство (легко следующее из свойств функции $r(z)$) можно переформулировать в более наглядной форме: если в меньшем состоянии выгоднее запасать z, нежели $z-1$, то и в большем состоянии выгоднее запасать не меньше, чем z. Процедура Говарда сводится к следующему.

В качестве начального приближения рассматривается политика "ничего не запасать" – $z(v)=v$, т.е. в равенство обращаются все неравенства первой строки системы (7). При этом $b^{(0)}(v)=z(v)+(1-\rho)^{-1}\sum_s \rho_s z(s)$. Далее, вычисляется $A^{(0)}(1)=\sum_s \rho_s b^{(0)}(s+1)$ и проверяется слева направо выполнение неравенства второй строки. Если для некоторого $b^{(0)}(j)$ неравенство нарушено (впервые!), то решаем новую систему:

$$b(0)=z(0)+\rho A(0);\ b(i)=z(i)-z(0)+b(0)\quad (i=1,\dots,j-1),$$

$$b(j)=z(j-1)+\rho A(1);\ b(s)=b(j)+z(s-1)-z(j-1)\quad (s>j).$$

Если же все неравенства первой строки выполняются, то вычисляем $A^{(0)}(2)=\sum_{s=0} \rho_s b^{(0)}(s+2)$, проверяем выполнение неравенств третьей строки и т.д.

Недостатком этого метода является то, что при больших $\bar{V}$ может оказаться необходимым решать системы уравнений достаточно большой размерности. Специфика задачи позволяет предложить более простой метод, при котором решать системы уравнений не приходится.

Пусть имеется произвольный вектор $(b(0), b(1),\dots, b(\bar{v}))$. Возьмем его в качестве начального приближения и положим

$$A^{(0)}(i)=\sum_{s=0}^{K} \rho_s b(s+[\eta i])$$

Пусть для $n=1,2,\dots$

$$b^{(n)}(v)=\max_{0\le j\le v}\left(z(j)+\rho A^{(n-1)}(v-j)\right). \qquad (8)$$

Выбирая разные начальные приближения, можно получить монотонные последовательности векторов, с разных сторон сходящиеся к решению.

Так, если в качестве начального приближения взять вектор $(\bar{b}(0), \bar{b}(1),\dots, \bar{b}(\bar{V}))$ (получаемый при политике "ничего не запасать") такой, что для всех v $\bar{b}(v)=z(v)+(1-\rho)^{-1}\sum_{s=0}^{K}\rho_s z(s)$, то, как легко показать по индукции, рекуррентные соотношения (8) приводят к монотонно возрастающей последовательности векторов $\bar{b}^{(n-1)}(v) \leq \bar{b}^{(n)}(v)$. Но очевидно, что для любых v, n справедливо неравенство $b^{(n)}(v) \leq \leq z(\bar{V})(1-\rho)^{-1}$. Поэтому эта последовательность сходится, причем ее предел удовлетворяет уравнению (6).

Для получения оценки близости этой последовательности к своему пределу будет полезно следующее замечание. Пусть на шаге n получен вектор $(b^{(n)}(0), b^{(n)}(1), \ldots, b^{(n)}(\bar{V}))$. Тогда, если число c таково, что для всех v и $j \leq v$

$$c(1-\rho) \geq z(j) + \rho A^{(n)}(v-j) - b^{(n)}(v),$$

то вектор $(b^{(n)}(0)+c, \ldots, b^{(n)}(\bar{V})+c)$ удовлетворяет ограничениям (7). Если взять этот вектор в качестве начального приближения, то рекуррентный процесс, определяемый (8), приводит к убывающей последовательности векторов. Действительно,

$$b^{(n)}(v)+c \geq z(j)+\rho\sum_{s=0}^{k} \rho_s (b^{(n)}([\eta(v-j)]+s)+c) \text{ для } j \leq v$$

и

$$b^{(n+1)}(v) = \max_{0\leq j\leq v} (z(j)+\rho\sum_{s=0}^{k} \rho_s (b^{(n)}([\eta(v-j)]+s)+c) \leq b^{(n)}(v)+c.$$

Поэтому число $\Delta^{(n)} = (1-\rho)^{-1} \sup_{v} (b^{(n+1)}(v) - b^{(n)}(v))$ определяет близость последовательности $(b^{(n)}(0), b^{(n)}(1), \ldots, b^{(n)}(\bar{V}))$ к своему пределу.

Предположим теперь, что задача имеет единственное решение в пространстве политик, т.е. для каждого состояния v существует единственная оптимальная политика $\tilde{z}(v)$. Тогда построенная выше монотонная последовательность позволяет найти эту политику за конечное число шагов. Действительно, поскольку для каждого j существует $\lim_{n\to\infty} A^{(n)}(j)$, то, начиная с некоторого n_0, будут постоянными (не зависящими от шага n) функции

$$z^{(n)}(v) = \arg\max_{0\leq j\leq v} (z(j)+\rho A^{(n-1)}(v-j)),$$

которые и определяют оптимальное управление.

Нахождение соответствующих $\{b(v)\}$ (если это необходимо) сводится к решению только одной системы линейных уравнений.

В результате можно получить (тем или иным способом) оптимальное стационарное управление $\tilde{z}(v)$, зависящее лишь от количества воды в водохранилище. При этом управлении процесс изменения количества воды в водохранилище записывается в виде рекуррентного соотношения

$$\bar{V}_{t+1} = min\,([\eta(\tilde{V}_t - \tilde{z}(\tilde{V}_t))] + Q_t, \bar{V}).$$

Очевидно, что количество воды в водохранилище образует марковскую цепь, переходную матрицу которой мы обозначим через G.

Напомним, что для каждого $\tilde{z}(v)$ определяются оптимальные стационарные тактические параметры $\tilde{x}(v)$, $\tilde{y}(v)$ (те, при которых достигается супремум в (5)). Покажем, как, используя G, можно получить распределение случайной величины $x_t = \tilde{x}(\tilde{V}_t)$.

Пусть $\mathcal{D}(\omega)$ - подмножество таких состояний j $(0 \le j \le \bar{V})$, при которых $\tilde{x}(j) = \omega$. Тогда

$$P(x_t = \omega) = \sum_{j \in \mathcal{D}(\omega)} P(\tilde{V}_t = j) = \sum_{j \in \mathcal{D}(\omega)} (g_0 G^t)_j =$$

$$= (R_{[\omega]}, g_0 G^t),$$

где g_0 - начальное распределение, $R_{[\omega]}$ - $\bar{V}$-мерный вектор, j-я компонента которого равна I или 0 в зависимости от того, принадлежит или нет j множеству $\mathcal{D}(\omega)$. Поэтому

$$M(\varphi_1(x_t) + \varphi_2(x - x_t)) =$$

$$= \sum_{\omega} (\varphi_1(\omega) + \varphi_2(x - \omega))(R_{[\omega]}, g_0 G^t)$$

и

$$C\mathcal{P}_1 = M \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t (\varphi_1(x_t) + \varphi_2(x - x_t) + \varphi_3(S - S_1 - x)) =$$

$$= \frac{1}{1-\rho} \varphi_3(S - S_1 - x) + \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \sum_{\omega} (\varphi_1(\omega) + \varphi_2(x - \omega))(R_{[\omega]}, g_0 G^t) =$$

$$= \frac{1}{1-\rho} \varphi_3(S - S_1 - x) + \sum_{\omega} (\varphi_1(\omega) + \varphi_2(x - \omega))(R_{[\omega]}, g_0 (I - \rho G)^{-1}).$$

Аналогично можно получить и явный вид функционала Φ_3 .

Поскольку в функционале исходной задачи от тактических параметров зависят лишь Φ_1 и Φ_3 , то в результате приходим к полностью детерминированной задаче нахождения оптимальных стратегических параметров (x, V, W). Для решения этой задачи целесообразно, по-видимому, использование стохастических квазиградиентных методов [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. КАРДАШ В.А. Об одном подходе к постановкам стохастических задач оптимизации производства. – Экономика и мат. методы, 1977, т.13, №6, 1312–1316.
2. КАРДАШ В.А., РАПОПОРТ Э.О. Моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. – Новосибирск:Наука, 1979 .
3. ЮДИН Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Советское радио, 1979.
4. ЮДИН Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Советское радио, 1974, с.152–167.
5. ХЭДИ Э., ДИЛЛОН Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. – М.: Прогресс, 1967.
6. ЧЕТЫРКИН Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977.
7. ДЫНКИН Е.Б., ЮШКЕВИЧ А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975.
8. МАЙН Х., ОСАКИ С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977, с. 13–28.
9. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976 .

Поступила в ред.-изд. отдел
18.04.1982 г.