Выпуск 32(49) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.М. Рубинов

В статье рассматривается модель экономической динамики леонтьевского типа с технологией, зависящей от времени. Эта модель представляет собой обобщение однопродуктовой модели, изученной в [1]. Ее двухпродуктовый вариант конспективно изложен в [2]. Вводятся в рассмотрение траектории, на которых переход из каждого состояния в следующее происходит с положительными вложениями всех продуктов и выясняются свойства эффективных траекторий такого типа. При дополнительном предположении о наличии финансового баланса показывается, что состояние указанных траекторий в каждый момент определяется независимо от технологии в последующие моменты. Изучаются магистральные свойства указанных траекторий.

1. Моделируемая экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит один продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Фазовое пространство модели совпадает с конусом $(R^n_+)^n$ – декартовым произведением n экземпляров конуса R^n_+. Вектор $X=(x^1,\dots,x^n)\in(R^n_+)^n$ называется состоянием модели, вектор $x^k=(x^{k1},\dots,x^{kn})\in R^n_+$ – состоянием k-й отрасли; содержательно x^k представляет собой вектор ресурсов, находящийся в распоряжении этой отрасли. Пусть $t=0,1,\dots$ – некоторый момент времени. Производственная деятельность k-й отрасли в период времени $[t,t+1]$ описывается с помощью производственной функции φ^k_t и неотрицательной матрицы A^k_t. Предполагается, что φ^k_t определена на R^n_+, суперлинейна (положительно однородна и вогнута), $\varphi^k_t(x)>0$ для $x\gg 0$ и $\varphi^k_t(1)>0$.

(Здесь и ниже $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$.) Содержательно число $\Phi_t^k(x)$ указывает выпуск продукта k (в натуральных единицах) в момент $t+1$ при условии, что ресурсы k-й отрасли в момент времени t задаются вектором x. Матрица A_t^k учитывает то обстоятельство, что при производстве продукта k часть ресурсов расходуется и, кроме того, как побочный эффект производства, возможно преобразование одних продуктов в другие. Иногда будет предполагаться, что матрица A_t^k имеет вид

$$A_t^k=\begin{pmatrix} \nu_t^{k1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nu_t^{kn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

где

$$0\leqslant \nu_t^{ki}<1. \tag{2}$$

Число $1-\nu_t^{ki}$ представляет собой коэффициент выбытия i-го ресурса в k-й отрасли.

Таким образом, если k-я отрасль в момент t обладает вектором ресурсов x, то в момент $t+1$ непосредственно после производственного процесса она будет иметь вектор ресурсов $A_t^k x$ и вновь произведенный продукт в количестве $\Phi_t^k(x)$. Этот продукт распределяется по всем отраслям. Пусть d_{t+1}^{ki} – вложение i-го продукта в k-ю отрасль в момент $t+1$. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} d_{t+1}^{ki}\leqslant \Phi_t^i(x) \quad (i=1,\ldots,n). \tag{3}$$

(Не обязательно весь вновь произведенный продукт должен использоваться.) Если $X_t=(x_t^1,\ldots,x_t^n)$ – состояние модели в момент t, то возможные ее состояния X_{t+1} в момент $t+1$ имеют вид: $X_{t+1}=(x_{t+1}^1,\ldots,x_{t+1}^n)$, где $0\leqslant x_{t+1}^k\leqslant$ $\leqslant A_t^k x_t^k+d_{t+1}^{k}$; здесь d_{t+1}^{k} – k-й столбец матрицы $\mathcal{D}_{t+1}$:

$$\mathcal{D}_{t+1}=\begin{pmatrix} d_{t+1}^{11} & \ldots & d_{t+1}^{k1} & \ldots & d_{t+1}^{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{t+1}^{1i} & \ldots & d_{t+1}^{ki} & \ldots & d_{t+1}^{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{t+1}^{1n} & \ldots & d_{t+1}^{kn} & \ldots & d_{t+1}^{nn} \end{pmatrix}$$

удовлетворяющей лишь тем условиям, что $d_{t+1}^{ki} \geq 0$ и выполнены неравенства (3). Множество таких состояний обозначим через $a_t(X)$. Многозначное отображение a_t, определенное таким образом, суперлинейно и нормально (по поводу суперлинейных отображений см. [3]). Модель, описанную выше, обозначим через N.

2. Для изучения траекторий модели N понадобится описать отображения, сопряженные к ее производственным отображениям a_t. Дадим требуемое описание для отображений a, где

$$a(X)=\{Y=(y^1,\dots,y^n)\in(R_+^n)^n : 0\leq y^k\leq$$

$$\leq A^k x^k + d^k;\ d^k=(d^{k1},\dots,d^{kn}),\ d^{ki}\geq 0,$$

$$\sum_k d^{ki} \leq \Phi^i(x^i),\quad i=1,\dots,n\};$$

здесь $X=(x^1,\dots,x^n)\in(R_+^n)^n$, A^k – матрица $n\times n$ с неотрицательными элементами, $\Phi^i : R_+^n \to R_+$ – суперлинейная функция. Напомним, что отображение a^*, сопряженное к a, определяется равенством

$$a^*(G)=\{F\in(R_+^n)^n : (F,X)\geq(G,Y)\ \forall X,\ Y\in a(X)\}.$$

(Круглые скобки означают скалярное произведение как в R^n, так и в $(R^n)^n$.) Отображение a^* совпадает с обратным к двойственному отображению a' (см. [3]). Как отмечалось в [3], множество $a^*(G)$ совпадает с супердифференциалом ∂q_G суперлинейного функционала $q_G(X)=max\{(G,Y): Y\in a(X)\}$. По определению,

$$\partial q_G=\{F:(F,X)\geq q_G(X),\quad X\in(R_+^n)^n\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $G=(g^1,\dots,g^n)\in R_+^n$, где $g^k=(g^{k1},\dots,g^{kn})$. Тогда

$$a^*(G)=\{F=(f^1,\dots,f^n): f^k\in(A^k)^*g^k+z^k(G)\partial\Phi^k,\ k=1,\dots,n\},$$

где A^* – матрица, сопряженная (транспонированная) к A, $\partial\Phi^k$ – супердифференциал функционала Φ^k,

$$z^k(G)=\max_i g^{ik}. \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y=(y^1,\dots,y^n)\in a(X)$. Имеем

$$(G,Y)=\sum_k(g^k,y^k)\leq\sum_k(g^k,A^kx^k)+(g^k,d^k)=$$

$$=\sum_k((A^k)^*g^k,x^k)+(g^k,d^k),$$

откуда

$$q_G(\Lambda)=\sum_k((A^k)^*g^k,x^k)+\max_{\mathcal{D}}\sum_k(g^k,d^k),$$

где максимум берется по всем матрицам $\mathcal{D}=(d^{ki})$ таким, что $d^{ki}\geq 0$, $\sum_i d^{ki}\leq\Phi^i(x^i)$, причем d^k – k-й столбец матрицы $\mathcal{D}^k$. Найдем этот максимум, учитывая, что он вычисляется независимо по каждой строке матрицы $\mathcal{D}$:

$$\max_{\mathcal{D}}\sum_k(g^k,d^k)=\max_{\sum_k d^{ik}\leq\Phi^i(x^i),\,d^{ik}\geq 0}\sum_k\sum_i g^{ki}d^{ki}=$$

$$=\max_{\substack{\sum_k d^{ki}\leq\Phi^i(x^i)\\ d^{ki}\geq 0}}\sum_i\sum_k g^{ki}d^{ki}=$$

$$=\sum_i\max_{\substack{\sum_k d^{ki}\leq\Phi^i(x^i)\\ d^{ki}\geq 0}}\sum_k g^{ki}d^{ki}=\sum_i z^i(G)\Phi^i(x^i).$$

Итак,

$$q_G(X)=\sum_k((A^k)^*g^k,x^k)+\sum_k z^k(G)\Phi^k(x^k).$$

Пусть $F=(f^1,\dots,f^n)\in\partial q^G$. Тогда $(F,X)\geqslant q_G(X)$, откуда следует, что

$$\sum_k (f^k-(A^k)^*g^k,\ x^k)\geqslant\sum_k z^k(G)\,\Phi^k(x^k)$$

при любых $x^1,\dots,x^n\in R^n_+$. Полагая $x^i=0$ при $i\neq k$, убедимся в справедливости соотношений $f^k\in(A^k)^*g^k+z^k(G)\,\partial\Phi^k$ $(k=1,2,\dots,n)$. Наоборот, если эти соотношения выполняются, то $F\in\partial q_G$. Предположение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Векторы F и G, связанные соотношением $F\in a^*(G)$, обычно интерпретируются как векторы цен в модели, определяемой производственным отображением a. В нашем случае один и тот же продукт в разных отраслях может иметь разные цены. Пусть $G=(g^1,\dots,g^n)$ – вектор цен; здесь $g^k=(g^{k1},\dots,g^{kn})$ – вектор цен в k-й отрасли; g^{ki} – цена i-го продукта в этой отрасли. Число $z^i(G)$, определенное формулой (4), совпадает с наибольшей (по отраслям) ценой i-го продукта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $Y\in a(X)$, $F\in a^*(G)$, причем $X=(x^1,\dots,x^n)$, $Y=(y^1,\dots,y^n)$, где $0\leqslant y^k\leqslant A^kx^k+d^k$, $d^k=(d^{k1},\dots,d^{kn})$, $d^{ki}\geqslant 0$, $\sum_k d^{ki}\leqslant\Phi^i(x^i)$ $(k,i=1,\dots,n)$; кроме того, $G=(g^1,\dots,g^n)$, $F=(f^1,\dots,f^n)$; здесь $g^k=(g^{k1},\dots,g^{kn})$, $f^k=(f^{k1},\dots,f^{kn})$, $f^k\in(A^*)^kg^k+z^k(G)h^k$; $h^k\in\partial\Phi^k$, число $z^k(G)$ определено равенством (4). Тогда следующие утверждения равносильны:

(а) $(F,X)=(G,Y)$;

(б) при каждом $k=1,\dots,n$ выполняется одно из двух: либо $z^k(G)=0$, либо $h^k\in\partial\Phi^k(x^k)$, где $\partial\Phi^k(x)=\{h\in\partial\Phi^k:\ (h,x)=\Phi^k(x)\}$;

(в) при каждых $i,k=1,\dots,n$ либо $d^{ik}=0$, либо $g^{ki}=z^i(G)$; в то же время либо $z^i(G)=0$, либо $\sum_k d^{ik}=\Phi^i(x^i)$ $(i=1,\dots,n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(G,Y)=\sum_k (g^k, y^k) \leq \sum_k (g^k, A^k x^k + d^k) =$$

$$= \sum_k ((A^k)^* g^k, x^k) + \sum_k (g^k, d^k) =$$

$$= \sum_k (f^k - z^k(G) h^k, x^k) + \sum_k (g^k, d^k).$$

Пусть выполняется (а), т.е. $\sum (f_k, x_k) = (G,Y)$. Тогда

$$\sum_k z^k(G)(h^k, x^k) \leq \sum_k (g^k, d^k). \tag{5}$$

Оценим сумму, стоящую справа:

$$\sum_k (g^k, d^k) = \sum_{k,i} g^{ki} d^{ki} \leq \sum_i z^i(G) \sum_k d^{ki} \leq$$

$$\leq \sum_i z^i(G)\, \Phi^i(x^i) = \sum_k z^k(G)\, \Phi^k(x^k). \tag{6}$$

Привлекая (5), получим

$$\sum_k z^k(G)[(h^k, x^k) - \Phi^k(x^k)] \leq 0. \tag{7}$$

В то же время, поскольку $h^k \in \partial \Phi^k$, выполняется неравенство $(h^k, x^k) \geq \Phi^k(x^k)$. Из (7) теперь следует, что

$$z^k(G)[(h^k, x^k) - \Phi^k(x^k)] = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Понятно, что равенства (8) влекут, в свою очередь, соотношение (а). В то же время (8) равносильно утверждению (б). Предположим, что (8) выполнено. Тогда правая и левая части (6) совпадают, откуда вытекают равенства

$$\sum_{i,k} [g^{ki} - z^i(G)]\, d^{ki} = 0, \tag{9}$$

$$\sum_i z^i(G)[\sum_k d^{ki} - \Phi^i(x^i)] = 0. \tag{10}$$

Так как $d^{ki} \geq 0$, $z^i(G) \geq g^{ki}$, то (9) равносильно системе

$$d^{ki}[g^{ki}-z^i(G)]=0, \quad i,k=1,\dots,n). \tag{II}$$

Подобным же образом (I0) равносильно системе

$$z^i(G)[\sum_k d^{ki}-\Phi^i(x^i)]=0, \quad i,k=1,\dots,n. \tag{I2}$$

В то же время совокупность равенств (II) и (I2) эквивалентна утверждению (в). Отсюда легко следует справедливость предложения.

3. Вернемся к модели N, описанной в п.I. Пусть $X_0, X_1, \dots, X_t, \dots$ – траектория этой модели, т.е. $X_{t+1} \in a_t(X_t)$ $(t=0,1,\dots)$. Тогда $X_{t+1}=(x^1_{t+1},\dots,x^n_{t+1})$, где $0 \le x^k_{t+1} \le A^k_t x^k_t + d^k_{t+1}$, причем $d^k_{t+1}=(d^{k1}_{t+1},\dots,d^{kn}_{t+1})$, $d^{ki}_{t+1} \ge 0$, $\sum_k d^{ki}_{t+1} \le \Phi^i_t(x^i_t)$, матрица A^k_t неотрицательна.

Траекторию (X_t) назовем правильной, если $d^{ki}_{t+1}>0$ при всех t, i, k. В случае, когда матрица A^k_t задана формулами (I), (2), при производстве в каждой отрасли k расходуется в каком-то количестве каждый продукт i. Неравенство $d^{ki}_{t+1}>0$ показывает, что на правильной траектории количество этого продукта обязательно пополняется (хотя и не обязательно до имевшегося ранее объема).

Напомним, что траектория (X_t) допускает характеристику, если найдется такая последовательность (F_t) (характеристика), что $F_t \in a^*_t(F_{t+1})$ и $(F_{t+1}, X_{t+1})=(F_t, X_t)>0$. Если X_0 – внутрення точка конуса $(R^n_+)^n$, то траектория (X_t) допускает характеристику в том и только в том случае, когда она эффективна (см. [3]). Ниже указываются свойства правильной эффективной траектории и ее характеристики.

Итак, пусть рассматриваемая траектория (X_t) правильна и допускает характеристику $F_t=(f^1_t,\dots,f^n_t)$, где $f^k_t=(f^{k1}_t,\dots,f^{kn}_t)$. Тогда, как следует из утверждения (в) предложения 2, $f^{ki}_{t+1}=z^i(F_{t+1})$ $(k,i=1,\dots,n)$, откуда вытекает равенство векторов $f^1_{t+1},\dots,f^n_{t+1}$. Обозначим их общее значение через b_{t+1}. Таким образом, $F_{t+1}=(b_{t+1},\dots,b_{t+1})$ при всех t. Содержательно это означает, что характеристические цены f^{ki}_{t+1} i-го продукта в k-й отрасли определяются только продуктом и не зависят от того, в какой отрасли этот продукт рассматривается. При

$t=0$ векторы f_t^k, вообще говоря, не обязаны совпадать между собой. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать правильные эффективные траектории лишь при $t \geq 1$. Обозначим k-ю координату вектора b_t через $b_t^{(k)}$. Примем следующее соглашение: характеристика (F_t) такова, что $b_t^{(k)} > 0$ при всех $t=1,2,\ldots;\ k=1,\ldots,n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть матрицы A_t^k определены формулой (I). Учитывая, что в силу предложения 2

$$b_t \in A_t^k\, b_{t+1} + b_{t+1}^{(k)}\, \partial \Phi_t^k,$$

получим следующее: если при некоторых k и $t+1$ выполняется $b_{t+1}^{(k)} = 0$, то $b_t^{(i)} = \gamma_t^{ki}\, b_{t+1}^{(i)}$ при всех i. Отсюда вытекает, в частности, что $b_1^{(k)} = \ldots = b_t^{(k)} = b_{t+1}^{(k)} = 0$. Таким образом, в данном случае принятое соглашение выполнено, если $b_1^{(k)} > 0 \quad (k=1,\ldots,n)$.

Воспользуемся предложением 2. Из утверждения (в) этого предложения следует при всех $i=1,\ldots,n$ равенство $\sum_k d_{t+1}^{ki} = \Phi_t^i(x_t^i)$, из утверждения (б) – соотношение

$$\frac{1}{b_{t+1}^{(i)}}\left[b_t - (A_t^i)^* b_{t+1}\right] \in \partial \Phi_t^i(x_t^i), \tag{I3}$$

которое удобно переписать так:

$$\begin{aligned} &(b_t, x) \geq (b_{t+1}, A_t^i x) + b_{t+1}^{(i)}\, \Phi_t^i(x) \quad (x \geq 0);\\ &(b_t, x_t^i) = (b_{t+1}, A_t^i x_t^i) + b_{t+1}^{(i)}\, \Phi(x_t^i). \end{aligned} \tag{I4}$$

В свою очередь, система (I4) эквивалентна равенству

$$\max_{x \geq 0} \frac{(b_{t+1}, A_t^i x) + b_{t+1}^{(i)}\, \Phi_t^i(x)}{(b_t, x)} = 1, \tag{I5}$$

с тем дополнительным условием, что максимум в (I5) достигается на элементах, пропорциональных x_t^i.

Положим

$$p_t^i(b) = \max_{x \geq 0,\, (b_t, x) = 1} (b, A_t^i x + \Phi_t^i(x) e^i), \tag{I6}$$

где e^i – i-й орт пространства R^n;

$$P_t(b) = (p_t^1(b), \ldots, p_t^n(b)). \tag{I7}$$

Оператор $P_t : R^n_+ \to R^n_+$, определенный формулами (I6), (I7), сублинеен и возрастает. Равенство (I5) показывает, что вектор b_{t+1} является решением уравнения

$$P_t b = 1 . \qquad (18)$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть (X_t) – правильная траектория модели N, допускающая характеристику (F_t), где $X_t = (x^1_t, \ldots, x^n_t)$, $F_t = (f^1_t, \ldots, f^n_t)$. Тогда при $t \neq 1$ все векторы f^i_t $(i = 1, \ldots, n)$ совпадают с одним и тем же вектором b_t $(t > 1)$. Если $b^{(k)}_t > 0$ при всех t, k, то

(а) $\sum\limits_k d^{ki}_{t+1} = \Phi^i_t(x^i_t)$ $(t = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$;

(б) вектор b_{t+1} является корнем уравнения (I8), т.е. выбирается так, чтобы выполнялись равенства (I5);

(в) максимум в (I5) реализуется на векторах, пропорциональных x^i_t $(t = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дадим содержательную интерпретацию формулы (I5). Пусть x – вектор ресурсов i-й отрасли в момент t. Тогда (b_t, x) – стоимость этих ресурсов по ценам b_t, т.е. стоимость всех средств, находящихся в момент t в распоряжении i-й отрасли перед началом производственного процесса; $\psi^i_t(x) = (b_{t+1}, A^i_t x) + b^{(i)}_{t+1} \Phi^i_t(x)$ – суммарная стоимость по ценам b_{t+1} всех средств, находящихся в i-й отрасли после производственного процесса в момент $t+1$. Отношение $\psi^i_t(x) / (b_t, x)$ можно рассматривать как темп роста стоимости средств, находящихся в i-й отрасли. Теорема I показывает, что вектор $X_t = (x^1_t, \ldots, x^n_t)$, лежащий на траектории, обладает тем свойством, что на нем достигается наибольший возможный темп роста во всех отраслях. При этом, как следует из (I5), цены b_{t+1} выбираются таким образом, что наибольшие возможные темпы роста стоимости совпадают для всех отраслей. То обстоятельство, что их общее значение равно единице, вызвано нормировкой. Так, если считать, что существует какой-то продукт, скажем j, служащий для соизмерения всех остальных продуктов, стоимость которого не меняетсо временем (т.е. от цен b_t перейти к ценам b_t / b_t^j), то общее значение темпов роста будет совпадать с $1/b_t^j$.

4. В оставшейся части статьи считаем, что производственные функции Φ_t^k строго суперлинейны, т.е. $\Phi_t^k(x+y) > \Phi_t^k(x)+\Phi_t^k(y)$, если x и y не пропорциональны и хоть одна из этих точек имеет все координаты положительными. Дадим описание правильной траектории, допускающей характеристику $F_t=(b_t,\dots, b_t)$. Для этого с помощью характеристических цен перейдем от натуральных единиц к ценностным и произведем декомпозицию рассматриваемой модели N на однопродуктовые модели, каждая из которых описывает одну из отраслей экономики. Однопродуктовая модель N^k , описывающая k-ю отрасль, задается последовательностями производственных функций $(b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k)$, матриц (A_t^k) и векторов цен (b_t) . Производственное отображение a_t^k этой модели в период $[t,t+1]$ определяется равенством

$$a_t^k(x)=\langle 0, A_t^k x\rangle + b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(x)\xi_{t+1}, \tag{20}$$

где $\langle 0,u\rangle=\{v:0\leq v\leq u\}$, $\xi_t=\{u\geq 0:(u, b_t)\leq 1\}$.
Модель, задаваемая последовательностью отображений вида (20), при дополнительном предположении, что матрицы A_t^k имеют вид (1), (2), изучена в [I]. Подобно [I], введем в рассмотрение некоторую траекторию модели N^k , которую назовем эталонной. Вектор $\bar{x}_t^k$, лежащий на этой траектории, является решением задачи выпуклого программирования

$$(b_{t+1}, A_t^k x)+ b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(x) \to max; \tag{21}$$

$$(b_t, x)=1,\ x\geq 0.$$

Строгая суперлинейность функции Φ_t^k влечет единственность решения этой задачи. Из (15) следует, что ее значение равно единице, поэтому для $\bar{x}_t^k\ (t=1,2,\dots;\ k=1,\dots,n)$ справедливы следующие соотношения:

$$(b_{t+1}, A_t^k \bar{x}_t^k)+ b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(\bar{x}_t^k)=1; \tag{22}$$

$$(b_t, \bar{x}_t^k)=1.$$

Нетрудно проверить, что последовательность $(\bar{x}_t^k)$ является траекторией модели N^k в том и только в том случае, когда

$\bar{x}^k_{t+1} \geqslant A^k_t \bar{x}^k_t \ (t=1,2,\ldots)$. В [I] это проверено в предположении, что матрицы A^k_t заданы формулами (I) и (2).

Итак, допускающая характеристику правильная траектория модели N имеет своими состояниями комбинации состояний, лежащих на эталонных траекториях моделей N^k, с весами, быть может, зависящими от времени. Это позволяет указать индуктивный способ построения подобной траектории. В момент $t=1$ считаем заданным некоторый вектор цен b_1 с положительными координатами. Пусть теперь для некоторого $t \geqslant 1$ известен вектор b_t. Определим с его помощью по формулам (I7), (I8) оператор P_t. Предположим, что уравнение $P_t b = 1$ имеет положительное решение b_{t+1}. Зная b_{t+1}, b_t, решим задачу (2I) и найдем вектор $\bar{x}^i_t$. Предположим, что в момент t известна точка X_t, лежащая на строящейся траектории. В силу теоремы I $X_t = (u^1_t \bar{x}^1_t, \ldots, u^n_t \bar{x}^n_t)$, где $u^i_t > 0$. Покажем, как следует строить точку X_{t+1}. В силу той же теоремы эта точка должна иметь вид

$$X_{t+1} = (u^1_{t+1} \bar{x}^1_{t+1}, \ldots, u^n_{t+1} \bar{x}^n_{t+1}). \tag{23}$$

При этом X_{t+1} будет лежать на правильной траектории, если найдутся положительные векторы d^k_{t+1} – столбцы матрицы вложений

$$\mathcal{D}_{t+1} = \begin{pmatrix} d^{11}_{t+1} & \ldots & d^{n1}_{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d^{1n}_{t+1} & \ldots & d^{nn}_{t+1} \end{pmatrix},$$

при которых

$$u^k_{t+1} \bar{x}^k_{t+1} = u^k_t A^k_t \bar{x}^k_t + d^k_{t+1}. \tag{24}$$

Снова пользуясь теоремой I, в силу которой сумма i-й строки матрицы $\mathcal{D}$ совпадает с $\Phi^i_t(u^i_t \bar{x}^i_t)$, получим, исходя из (24),

$$\sum_k u^k_{t+1} \bar{x}^{ki}_{t+1} = \sum_k u^k_t (A^k_t \bar{x}^k_t)^i + u^i_t \Phi^i_t(\bar{x}^i_t)$$

$$(i=1,\ldots,n). \tag{25}$$

Равенства (25) можно рассматривать как линейную систему относительно вектора $u_{t+1}=(u^1_{t+1},\dots,u^n_{t+1})$. Если эта система имеет положительное решение u_{t+1}, при котором $u^k_{t+1}\bar{x}^{ki}_{t+1}-u^k_t(A^k_t\bar{x}^k_t)^i=d^{ki}_{t+1}>0$, то точка (23) лежит на строящейся траектории и эта траектория правильна.

Подчеркнем, что вектор X_{t+1} строится независимо от технологий в моменты $\tau>t+1$ (т.е. от функций Φ^k_τ и матриц A^k_τ). Однако существование правильной, допускающей характеристику траектории возможно лишь при некоторых гипотезах о технологиях, точнее, об их связях при разных значениях t. Эти гипотезы должны обеспечить, в частности, существование решений с требуемыми свойствами у уравнений (18) и (25).

Сказанное выше позволяет рассматривать модификации модели N, в которых будущие технологии a_τ в момент $\tau>t+1$ точно неизвестны; возможны варианты модели, в которых отображение строится или выбирается из серии ему подобных. Наряду с технологией строится и траектория движения экономики. Если центр, управляющий экономикой, предпочитает правильную, допускающую характеристику траекторию другим, то он должен позаботиться о выборе технологии, обеспечивающей существование этой траектории.

5. Траекторию $X_t=(x^1_t,\dots,x^n_t)\ (t=0,1,\dots)$ модели N назовем эталонной, если она правильна, допускает характеристику F_t, где $F_t=(b_t,\dots,b_t)$ при $t\geq 1$, причем $b^{(k)}_1>0$ для всех k, и, кроме того, на этой траектории выполняется следующее балансовое соотношение: в каждый момент времени $t\geq 1$ суммарная стоимость по характеристическим ценам инвестиций k-го продукта во все отрасли совпадает с суммарной стоимостью по тем же ценам инвестиций всех продуктов, сделанных в k-ю отрасль $(k=1,\dots,n)$. Пусть

$$\mathcal{D}_t=\begin{pmatrix} d^{11}_t & \dots & d^{n1}_t \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{1n}_t & \dots & d^{nn}_t \end{pmatrix}$$

- матрица, элемент d^{ki}_t которой указывает инвестиции i-го продукта в k-ю отрасль в момент t на траектории X_t. Тогда указанное балансовое соотношение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} b_{t+1}^{(k)} d_{t+1}^{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{t+1}^{(i)} d_{t+1}^{ki}, \quad k=1,\dots,n. \tag{26}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что при $n=2,3$ соотношение (I9) равносильно системе

$$b_{t+1}^{(k)} d_{t+1}^{ik} = b_{t+1}^{(i)} d_{t+1}^{ki}, \quad k,i=1,\dots,n.$$

При $n>3$ это уже неверно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $X_t=(x_t^1,\dots,x_t^n)$ – эталонная траектория модели N, допускающая характеристику F_t, причем $F_t=(b_t,\dots,b_t)$ при всех $t\geq 1$ и $b_t^{(k)}>0$ $(k=1,\dots,n;\ t=1,2,\dots)$. Предположим, что эта траектория нормирована условием $(F_t,X_t)=1$. Тогда найдутся числа $u^k>0$, $k=1,\dots,n$, $\sum u^k=1$, при которых $x_t^k=u^k\bar{x}_t^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы I следует, что при некоторых $u_t^k>0$ выполняется $x_t^k=u_t^k\bar{x}_t^k$. Покажем прежде, что последовательности u_t^k постоянны $(k=1,\dots,n)$. Так как X_t – траектория, то

$$u_{t+1}^k \bar{x}_{t+1}^k = u_t^k\cdot A_t^k \bar{x}_t^k + d_{t+1}^k, \tag{27}$$

где d_{t+1}^k – k-й столбец матрицы $\mathcal{D}_{t+1}$, откуда

$$u_{t+1}^k(b_{t+1},\bar{x}_{t+1}^k) = u_t^k(b_{t+1},A_t^k\bar{x}_t^k)+(b_{t+1},d_{t+1}^k). \tag{28}$$

Из (26) следует, что

$$(b_{t+1},d_{t+1}^k) = \sum_i b_{t+1}^{(k)} d_{t+1}^{ik}.$$

Как показывает теорема I, последняя сумма совпадает с

$$b_{t+1}^{(k)}\Phi_t^k(x_t^k) = b_{t+1}^{(k)} u_t^k \Phi_t^k(\bar{x}_t^k).$$

Поэтому, привлекая (22), получим, что правая часть (28) совпадает с u_t^k, а левая – с u_{t+1}^k, т.е. найдутся такие числа $u^k>0$, что $x_t^k=u^k\bar{x}_t^k$ при всех t. Из соотношений $1=(F_t,X_t)=\sum_t(b_t,x_t^k)=\sum u^k(b_t,\bar{x}_t^k)$ и (22) следует, что $\sum u^k=1$. Предложение доказано.

Особо рассмотрим случай, когда матрицы A_t^k заданы формулой (I). Перепишем в этом случае равенство (27) в координатном виде, заменяя u_t^k на u^k :

$$u^k(\bar{x}_{t+1}^{ki} - \nu_t^{ki}\bar{x}_t^{ki}) = d_{t+1}^{ki}. \qquad (29)$$

Воспользовавшись теоремой I, получим

$$\sum_k u^k(\bar{x}_{t+1}^{ki} - \nu_t^{ki}\bar{x}_t^{ki}) = u^i \Phi_t^i(\bar{x}_t^i). \qquad (30)$$

Положим $(\bar{x}_{t+1}^{ki} - \nu_t^{ki}\bar{x}_t^{ki})(\Phi_t^i(\bar{x}_t^i))^{-1} = z_t^{ki}$.

Рассмотрим матрицу $Z_t = (z_t^{ki})$. В силу (29) каждая строка этой матрицы лишь положительным множителем отличается от соответствующей строки матрицы $\mathcal{D}_{t+1}$, поэтому, как следует из правильности траектории X_t, матрица Z_t положительна. Равенства (30) показывают, что вектор $u = (u^1, \dots, u^n)$ является собственным вектором матрицы Z_t, отвечающим собственному числу I. Из положительности Z_t следует, что существует единственный положительный собственный вектор этой матрицы, нормированный условием $\sum u_t^k = 1$. Из предложения 3 следует, что все u_t совпадают с некоторым вектором u. Чтобы найти его, достаточно знать лишь матрицу Z_1, т.е. векторы $\bar{x}_1^k, \bar{x}_2^k$, которые полностью определяются векторами цен b_1, b_2, b_3. Из сказанного вытекает, в частности, что существует не более одной эталонной траектории, имеющей данные характеристические цены. Отметим еще следующий любопытный факт, легко вытекающий из (22): вектор b_{t+1} является собственным для матрицы Z_t^*, сопряженной к Z_t.

Предложение 3 показывает, что эталонная траектория модели N представляет собой комбинацию эталонных траекторий однопродуктовых моделей N^k, взятых с некоторыми не зависящими от времени весами. Справедливо и в определенном смысле обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. **Пусть** $X_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$ – **правильная, допускающая характеристику** (F_t) **траектория модели** N, **причем** $F_t = (b_t, \dots, b_t)$ **при** $t \geq 1$ **и** $b_t^{(k)} > 0$ $(k = 1, \dots, n;\ t = 1, 2, \dots)$. **Предположим, что** $x_t^k = u^k \bar{x}_t^k$, **где** $u^k > 0$, $\bar{x}_t^k$ – **эталонная траектория модели** N^k, **построенной по ценам** (b_t). **Тог-**

да траектория X_t эталонна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (22) непосредственно вытекает, что

$$b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(\bar{x}_t^k)=(b_{t+1}, \bar{x}_{t+1}^k - A_t^k \bar{x}_t^k)$$

или, что то же самое,

$$b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(u^k\bar{x}_t^k)=\sum_i b_{t+1}^{(i)}\ d_{t+1}^{ki}\ u^k.$$

С другой стороны, в силу теоремы I

$$b_{t+1}^{(k)}\ \Phi_t^k(u^k\bar{x}_t^k)=\sum_i b_{t+1}^{(k)}\ d_{t+1}^{ik}\ u^k.$$

Предложение доказано.

5. Приведем теорему об асимптотическом поведении траекторий модели N. Она основана на указанной выше декомпозиции этой модели и на теореме о магистрали для однопродуктовой модели, предложенной в [I]. (В [I] предполагалось, что для матриц A_t^k выполнены условия (I), (2). Однако в доказательстве тех утверждений из [I], которые здесь используются, эти условия не применялись.)

Пусть $\tilde{X}_t=(\tilde{x}_t^1,\dots,\tilde{x}_t^n)$ - правильная траектория модели N, допускающая характеристику $F_t=(b_t,\dots,b_t)$, причем $(F_t, \tilde{X}_t)=1$. Предположим, что существуют такие числа $u^+\geq u^->0$, что

$$u^-1\leq b_t\leq u^+1, \tag{31}$$

т.е. последовательность (b_t) ограничена и отделена от нуля. Пусть, далее, v - положительное число и

$$C=\{X=(x^1,\dots,x^n)\in(R_+^n)^n : (x^k, 1)\leq v(x^i,1),\ i,k=1,\dots,n\}.$$

Понятно, что C - выпуклый замкнутый конус. Рассмотрим еще выпуклый замкнутый конус $\bar{C}$, лежащий в R_+^n, и положим $\tilde{\xi}_t=\{x\in\bar{C} : (b_t,x)=1\}$ $(t=1,2,\dots)$. Ниже считаем, что выполнены следующие предположения.

I) Функции Φ_t^k дважды непрерывно дифференцируемы, причем

$$\inf_{t,k}\ \inf_{y\in\xi_t}\ \inf_{u:(b_t,u)=0}\frac{((-\Phi_t^k)''(y)u,u)}{\Phi_t^k(1)|u|^2}>0. \tag{32}$$

Здесь $(\Phi_t^k)''(y)$ – матрица вторых частных производных функции Φ_t^k в точке y. Неравенство (32) означает равномерную строгую суперлинейность семейства функций Φ_t^k на конусе $\tilde{C}$.

2) $\sup\limits_{t,k} \max\limits_{x\in\xi_t} (b_{t+1}, A_t^k x) < 1.$

Напомним, что согласно (I5)

$$\max_{x\in R_+^n, (b_t, x)=1} (b_{t+1}, A_t^k x) + b_{t+1}^{(k)} \Phi_t^k(x) = 1.$$

3) $\tilde{x}_t^i \in \tilde{C}$, $X_t \in C$ $(t=1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots,n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X_t – рассмотренная выше траектория, имеющая характеристические цены $F_t=(b_t,\ldots,b_t)$, для которых выполнено (3I), причем $(F_t, X_t)=1$; пусть, далее, C и $\tilde{C}$ – определенные выше конусы и выполнены предположения I)–3). Тогда для каждой траектории $X_t=(x_t^1,\ldots,x_t^n)$ модели N, обладающей тем свойством, что $x_t\in C$, $x_t^k \in \tilde{C}$ $(t=1,2,\ldots;\ k=1,\ldots,n)$, выполняется одно и только одно из следующих двух утверждений:

I) $X_t \to 0$;

2) существуют такие числовые последовательности (γ_t^i), что $0<\inf\limits_t \gamma_t^i \leq \sup\limits_t \gamma_t^i < +\infty$ и

$$\lim (x_t^i - \gamma_t^i \tilde{x}_t^i) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение 2) означает, что на любой "хорошей", т.е. не стремящейся к нулю траектории, пропорции между ресурсами любых двух видов должны быть близки к соответствующим пропорциям на эталонной траектории модели N^i. К сожалению, эта теорема ничего не говорит о соотношении между отраслями на исходной траектории.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью последовательности (b_t) построим однопродуктовые модели N^k и эталонные траектории $(\tilde{x}_t^k)$ этих моделей. Через ρ обозначим угловое расстояние в R^n_+: $\rho(x,y)=\|x/\|x\|-y/\|y\|\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Введем метрику z в $(R^n_+)^n$: если $X=(x^1,\dots,x^n)$, $Y=(y^1,\dots,y^n)\in(R^n_+)^n$, то

$$z(X,Y)=\max_i \rho(x^i,y^i).$$

Определим функции ψ_t^k (на R^n_+) и ψ_t (на $(R^n_+)^n$), положив

$$\psi_t^k(x)=\sup_{y\in a_t^k(x)}(b_{t+1},y),$$

$$\psi_t(X)=\sup_{Y\in a_t(X)}(F_{t+1},Y).$$

Здесь a_t^k – производственные отображения моделей N^k, определенные формулой (20). Нетрудно проверить, что $\psi_t^k(x)=(b_{t+1},A_t^k x)+b_{t+1}^{(k)}\varPhi_t^k(x)$. В то же время, как фактически показано при доказательстве предложения I, для $X=(x^1,\dots,x^n)$

$$\psi_t(X)=\sum_k(b_{t+1},A_t^k x^k)+b_{t+1}^{(k)}\varPhi_t^k(x^k)=\sum_k\psi_t^k(x^k).$$

В частности, справедливы равенства

$$\psi_t^k(\bar x_t^k)=1;\qquad \psi_t(\widetilde X_t)=1.$$

Положим

$$Q_t(X)=\inf_{Y\in a_t(X)}\left(1-\frac{(F_{t+1},Y)}{(F_t,X)}\right).$$

Если элемент X таков, что $(F_t,X)=1$, то

$$Q_t(X)=1-\sup_{Y\in a_t(X)}(F_{t+1},Y)=1-\psi_t(X)=\psi_t(\widetilde X_t)-\psi_t(X).$$

Пусть

$$\delta_t(\varepsilon)=\inf_{z(X,\widetilde X_t)\geq\varepsilon,\ X\in C}Q_t(X),\qquad \varepsilon>0.$$

Наша ближайшая цель – показать, что $\inf_t \delta_t(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon > 0$. Так как функция z однородна нулевой степени, то

$$\delta_t(\varepsilon) = \inf_{z(X,\tilde{X}_t)\geq\varepsilon,\ (F_t,X)=1,\ X\in C} Q(X) =$$

$$= \inf_{z(X,\tilde{X}_t)\geq\varepsilon,\ (F_t,X)=1,\ X\in C} \psi_t(\tilde{X}_t) - \psi_t(X).$$

Пусть $X=(x^1,\ldots,x^n)\in C$, $(F_t,X)=1$, $z(X,\tilde{X}_t)\geq\varepsilon$. Положим $x_*^k = x^k/(b_t,x^k)$. Так как $z(X,\tilde{X}_t)\geq\varepsilon$, то найдется такой индекс j, что $\rho(x^j,\tilde{x}_t^j)\geq\varepsilon$. Имеем

$$\psi_t(\tilde{X}_t) - \psi_t(X) = 1 - \sum_k \psi_t^k((b_t,x^k)x_*^k) =$$

$$= \sum_k (b_t,x^k) - \sum_k (b_t,x^k)\psi_t^k(x_*^k) =$$

$$= \sum_k (b_t,x^k)(1-\psi_t^k(x_*^k)) \geq (b_t,x^j)(1-\psi_t^j(x_*^j)).$$

Оценим каждый сомножитель в последнем произведении. Используя (31) и то обстоятельство, что $X\in C$, получим

$$\frac{1}{(b_t,x^j)} = \frac{(F_t,X)}{(b_j,x^j)} = \frac{\Sigma(b_t,x^k)}{(b_t,x^j)} \leq \frac{u^+}{u^-}\frac{\Sigma(1,x^k)}{(1,x^j)} \leq \frac{u^+}{u^-}nv.$$

Таким образом, $(b_t,x^j)\geq\frac{u^-}{u^+}nv$. Что касается величины $1-\psi_t^j(x_*^j)$, то ее можно оценить, используя предложение 3 работы [I]. Предложения I-3, приведенные выше, обеспечивают справедливость условий этого предложения. (Следует лишь вместо конуса R_+^n рассмотреть конус $\tilde{C}$ и, как отмечалось выше, отказаться от гипотезы о том, что матрицы A_t^k описываются формулой (I); это не меняет доказательства.) Согласно указанному предложению существует такое $\tilde{\delta}_j > 0$, не зависящее от t, что $1-\psi_t^j(x_*^j) > \tilde{\delta}_j$. Из сказанного следует, что $\inf_t \delta_t(\varepsilon) > 0$.

Пусть $X_t = (x_t^1, \ldots, x_t^n)$ – некоторая траектория модели N, причем $X_t \in C$, $x_t^i \in \tilde{C}$ $(t = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$. Последовательность (F_t, X_t) убывает и поэтому имеет предел. Возможны 2 случая:

1) $(F_t, X_t) \to 0$;

2) $(F_t, X_t) \to l > 0$.

Рассмотрим сначала первый случай. Из (27) вытекает, что

$$u^-(1, \sum x_t^i) \leq (b_t, \sum x_t^i) \leq u^+(1, \sum x_t^i).$$

Так как $(F_t, X_t) = (b_t, \sum x_t^i)$, то соотношения $(F_t, X_t) \to 0$ и $X_t \to 0$ равносильны.

Перейдем ко второму случаю. Так как $\lim (F_t, X_t) > 0$, то $r(X_t, \tilde{X}_t) \to 0$. Действительно, предполагая противное, найдем последовательность номеров t_k, для которой $r(X_{t_k}, \tilde{X}_{t_k}) > \varepsilon$. Тогда, по доказанному выше, существует такое $\delta > 0$, что

$$1 - \frac{(F_{t_{k+1}}, X_{t_{k+1}})}{(F_{t_k}, X_{t_k})} \geq \delta,$$

а это противоречит неравенству $\lim (F_t, X_t) > 0$. Соотношение $r(X_t, \tilde{X}_t) \to 0$ равносильно тому, что $\rho(x_t^i, \tilde{x}_t^i) \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для завершения доказательства осталось сослаться на теорему 3 работы [I], а также воспользоваться тем обстоятельством, что если $x_t^k \to 0$ хоть при одном k, то и $X_t \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

I. РУБИНОВ А.М. Об одной макроэкономической модели. – Оптимизация, 1978, вып. 21(38), с.139–152.

2. РУБИНОВ А.М. Об одном подходе к исследованию макромоделей экономической динамики. – Оптимизация, 1982, вып. 28(45), с.80–101.

3. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
08.12.1982 г.