УДК 51.330.115

ТЕМПЫ РОСТА МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ

А.М.Шафяров

В работе рассматриваются линейные модели движения населения, определяемые системой конечно-разностных уравнений или неравенств с разложимой матрицей. Для рассматриваемых моделей, более общих, чем модели, изученные в литературе по математической демографии, доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях роста населения района или всего объединения с наибольшим темпом роста[ж]. Проведен спектральный анализ темпов роста указанных моделей. Указан весьма простой, но эффективный алгоритм нахождения темпов роста.

I. Рассмотрим следующие модели движения населения, определяемые системой конечно-разностных уравнений и неравенств вида:

$$x_{t+1} = Ax_t, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{ж}$$

$$x_{t+1} \leq Ax_t, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{жж}$$

где A – ненулевая неотрицательная или квазинеотрицательная матрица[жж] порядка $n \times n$, x_t – вектор структуры населения в момент времени t, $t = 0, 1, 2, \dots$

Модели вида (ж) рассматривались многими авторами по математической демографии, причем от матрицы A требовалась неразложимость, а зачастую и примитивность. В таких моделях все население растет с одним и тем же темпом роста и смешивается полностью, начиная с момента $t = n^2 - 2n + 2$. Однако,

ж) В работе используется терминология, принятая в [1] и [2].

жж) Определение квазинеотрицательной матрицы дано в [2].

как показывает опыт, на практике подобные ситуации мало реальны[ж)]. Поэтому модели с неразложимой, тем более примитивной матрицей скорее всего годятся для описания движения населения более мелких подразделений, а не всего населения страны или более крупных объединений.

В этой работе будут рассмотрены модели более общего вида, когда матрица A является разложимой. Такие модели допускают существование подразделений (районов, регионов), растущих с различными темпами роста. Чтобы говорить о содержательной стороне моделей с разложимой матрицей A, будем считать, что матрица A имеет нормальный вид [4, с.373]:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & \dots & A_g & 0 & \dots \\ A_{g+1,1} & \dots & & A_{g+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{sg} & A_{s,g+1} & \dots A_s \end{pmatrix} \qquad (I)$$

где $A_1, \dots, A_s$ – неразложимые матрицы, а в каждом ряду $A_{f1}, A_{f2}, \dots, A_{f,f-1}$ $(f = g+1, \dots, s)$ по крайней мере одна из матриц не равна нулю.

С содержательной точки зрения разложимость матрицы A означает следующее: всё население можно разбить на s районов так, что

а) для любого района с номером $i \in \{g+1, \dots, s\}$ найдется район с номером $j < i$ такой, что эмиграция из района j в район i преобладает над эмиграцией населения из i-го района в район j;

б) из любого района с номером $i \in \{1, \dots, g\}$ возможна только эмиграция, хотя и не обязательна. Очевидно, что таких районов нет, если $g = 0$.

Отметим также, что рассмотренные в [2,5,7] модели представляют частный случай моделей (ж) и (жж), когда $s = 1$.

Прежде чем сформулировать теоремы о темпах роста, приведем различные определения понятия темпа роста.

ж) В качестве примера достаточно рассмотреть темпы роста населений Средней Азии и прибалтийских республик [3, с. 26].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста моделей (ж) и (жж), если найдется ненулевой неотрицательный вектор $x \in R_n$ такой, что $\alpha\bar{x} = A\bar{x}$.

Приведенное определение является существенным обобщением понятия темпа роста, широко принятого в литературе по демографии, когда предполагается строгая положительность вектора структуры $\bar{x}$ [2,7]. Будем также считать, что в микроподразделениях $1,\dots,s$ (не обязательно во всех) вектор структуры $\bar{x}^i$, $1\le i\le s$, строго положительный. Из этого соглашения следует, что если модель состоит только из одного подразделения (т.е. когда матрица A неразложима), то наше определение совпадает с общепринятым в демографии [2,7].

Резюмируя сказанное выше, получим следующее определение темпа роста населения района с номером $i \in \{1,2,\dots,s\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I′. Число $\alpha > 0$ называется темпом роста населения района i, $1\le i\le s$, в моделях (ж) и (жж), если вектор x^i в представлении правого собственного вектора $\bar{x}=(x^1,\dots,x^i,\dots,x^s)$ матрицы A, соответствующего числу α, является строго положительным в R_{n_i}, где n_i – размерность диагонального блока A_i в нормальном виде (I) матрицы A.

Из этого определения следует, что темп роста района с номером i (короче, района i) заведомо является темпом роста всей модели. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Отметим, что понятие темпа роста населения можно заимствовать и из математической экономики [I,с.I05].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Число $\alpha > 0$ называется темпом роста моделей (ж) и (жж), если найдутся неотрицательные векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ такие, что $\alpha\bar{x} \le A\bar{x}$, $\alpha\bar{p} \ge \bar{p}A$, $\bar{p}\bar{x} > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Для моделей с неразложимой матрицей A это определение совпадает с общепринятой. Если вектор $\bar{p}$ строго положителен, то из того, что α – темп роста в смысле определения I.2, следует, что α – темп роста в смысле определения I.I. Следовательно, при $\bar{p} > 0$ определение I.2 темпа роста более жесткое и поэтому во втором случае могут быть получены более содержательные результаты. Вектор $\bar{p}$ с содержательной стороны может быть охарактеризован как вектор, каждая координата которого представляет собой коэффициент влияния на исследуемый в данной модели параметр.

Для примера рассмотрим известную демографическую модель развития женского населения [2, с.25], определяемую неотрицательной разложимой матрицей A вида

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}
0\ldots & b_k\ldots & b_l & 0\ldots 00\\
c_1\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots 00\\
\hdashline
0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots 00\\
\hline
0\ldots & 0\ldots & c_l & 0\ldots 00\\
\hdashline
0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots c_{n-1}0
\end{array}\right)$$

где c_i – доля женщин возраста i, доживших до возраста $i+1$ (вероятность дожития), $0\leqslant i\leqslant n-1$; b_i – повозрастной коэффициент рождаемости, т.е. b_i – число родившихся за год девочек, отнесенное к числу женщин возраста i, $k\leqslant i\leqslant l$, $[k,l]$ – фертильный возраст женщин, n – предельный возраст женщин.

Матрица A_1, расположенная на пересечении первых l столбцов и строк матрицы A, является неразложимой. Пусть α – перроново число A_1, $p^1=(p_1,\ldots,p_l)$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий α. Тогда вектор $\bar{p}$, удовлетворяющий определению I.2, имеет вид $\bar{p}=(p_1,\ldots,p_l,\ldots,p_n)$, где

$$\begin{array}{ll}
\alpha p_1=c_1 p_2, & \alpha p_{k+1}=c_{k+1}p_{k+2}+p_1 b_{k+1},\\
\alpha p_2=c_2 p_3, & \text{- - - - - - - - - - - -}\\
\text{- - - - - - -} & \alpha p_{l-1}=c_{l-1}p_l+p_1 b_{l-1},\\
\alpha p_{k-1}=c_{k-1}p_k, & \alpha p_l=p_1 b_l,\\
\alpha p_k=c_k p_{k+1}+p_1 b_k, & p_{l+1}=\ldots=p_n=0.
\end{array}$$

Отсюда следует, что в этой модели коэффициент влияния женщин (на рост численности населения) возраста старше предельного фертильного равен нулю, моложе начального фертильного – прямо пропорционален темпу роста α и обратно пропорционален вероятности дожития предшествующего возраста ($p_i=\alpha/c_{i-1}$, $2\leqslant i\leqslant k$, считаем $p_1=1$); фертильного – пропорционален, грубо говоря, повозрастным коэффициентам рождаемости, взятым с определенными весами.

Полученные соотношения для координат вектора $\bar{\rho}$ раскрывают содержательную сторону этого параметра. В рассматриваемых типах моделей с темпом роста $\alpha > 1$ коэффициенты влияния женщин на рост числа населения сначала растут ($\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_k$), затем убывают ($\rho_{\ell-1} < \rho_\ell$), причем $\rho_{\ell+1} = \dots = \rho_n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Равновесные векторы $\bar{x}$ и $\bar{\rho}$, о которых говорится в определении I.2, представим в виде $\bar{x} = (x^1, \dots, x^s)$, $\bar{\rho} = (\rho^1, \dots, \rho^s)$ в соответствии с разбиением матрицы A на блоки (I). Через составляющие $x^1, \dots, x^s$, $\rho^1, \dots, \rho^s$ соответственно векторов $\bar{x}$ и $\bar{\rho}$ введем понятие темпа роста района i, $1 \leq i \leq s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2$'$. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста района i, $1 \leq i \leq s$, моделей (ж) и (жж), если векторы x^i и ρ^i в представлении равновесных векторов $\bar{x}$ и $\bar{\rho}$, соответствующих темпу роста α, строго положительны в R_{n_i}.

В исследовании моделей движения населения важное место занимает вопрос, связанный со спектральным анализом темпов роста. Ниже будут приведены теоремы, посвященные этому вопросу.

2. Здесь будут доказаны теоремы о темпах роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I.

ТЕОРЕМА 2.I. *Любой темп роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I принадлежит множеству $\{z_1, z_2, \dots, z_s\}$, где $z_i > 0$ – перроново число*[ж)] *диагонального блока A_i в нормальном представлении (I) матрицы A, $1 \leq i \leq s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\bar{x}$, о котором говорится в определении I.I, представим в виде $\bar{x} = (x^1, \dots, x^s)$ в соответствии с разбиением матрицы A на блоки. Для того чтобы число $\alpha > 0$ было темпом роста, необходимо выполнение равенства $\alpha x^1 = A_1 x^1$. Покажем, что либо $\alpha = z_1$, либо $x^1 = 0$.

ж) В работе рассматриваются неотрицательные или только такие квазинеотрицательные матрицы, которые имеют положительные перроновы числа.

Предположим противное. Пусть $\alpha \neq z_1$ и $x^1 \neq 0$. Так как $\alpha > 0$ и z_1 – перроново число матрицы A_1, то $\alpha < z_1$ независимо от того, является A_1 неотрицательной или квазинеотрицательной матрицей. Если A_1 – неотрицательная неразложимая матрица, то из условий $\alpha < z_1$ и $\alpha x^1 = A_1 x^1$ в соответствии с замечанием к лемме 3 из [6, с.41] получим, что $x^1 = 0$.

Следовательно, в этом случае искомое утверждение доказано. Пусть теперь A_1 – квазинеотрицательная неразложимая матрица. Так как при одновременной перестановке строк и столбцов квазинеотрицательность матрицы не меняется, то, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2 из [6, с.40], получим, что вектор x^1 должен быть строго положительным в R_{n_1}, где n_1 – размерность квадратной матрицы A_1. Покажем, что условия $\alpha < z_1, \alpha x^1 = A_1 x^1, x^1 > 0$, не выполнимы одновременно.

Полагая противное, получим, что строго положительный в R_{n_1} вектор x^1 является решением равенства $(\alpha + k)x^1 = A_1 x^1 + k x^1$, где k – наибольшее среди чисел, равных абсолютным величинам отрицательных элементов главной диагонали A_1. Матрица $B = A_1 + kE$ представляет собой неразложимую неотрицательную матрицу, перроново число z_B которой равно $z_1 + k$. Так как $\alpha < z_1$, то $z_B > \alpha + k$. В соответствии с тем же замечанием к лемме 3 [6, с.41] получим, что $x^1 = 0$. Противоречие. Итак, независимо от того, является матрица A_1 неотрицательной или квазинеотрицательной, из равенства $\alpha x^1 = A_1 x^1$ следует, что $\alpha = z_1$ или $x^1 = 0$. Если $\alpha = z_1$, то теорема доказана. Если же $\alpha \neq z_1$, то получим, что $\alpha x^2 = A_2 x^2$. Применяя предыдущий алгоритм, убедимся, что либо $\alpha = z_2$, либо $x^2 = 0$. Через конечное число шагов убедимся в справедливости теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Числа, большие* $\bar{z} = max\{z_1, \ldots, z_s\}$ *и меньшие* $\underline{z} = min\{z_1, \ldots, z_s\}$, *не могут быть темпами роста моделей* (*) *и* (**) *в смысле определения* 1.1.

Заметим, что доказанная теорема верна как для неотрицательной, так и квазинеотрицательной матрицы A. Отметим также, что полученная теорема указывает необходимое условие для того, чтобы число α было темпом роста, а именно, необходимость существования номера i, $1 \leq i \leq s$, такого, что $z_i = \alpha$.

Интерес представляют условия, необходимые и достаточные для того, чтобы z_i было темпом роста района, , а следовательно, и всей модели.

Предварительно введем важное для дальнейшего изложения понятие неотрицательной связи между районами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Будем говорить, что районы с номерами i, j, $i < j$, имеют неотрицательную связь (НС), если найдутся числа $i = l_0 < \dots < l_m = j$ такие, что матрица $A_{l_{h+1}, l_h} \neq 0$ для любого $h = 0, 1, \dots, m-1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Число $z_i > 0$, $1 \leq i \leq s$, является темпом роста района i моделей (*) и (**) в смысле определения I.I тогда и только тогда, когда любой район с номером $j \in F = \{j : z_j \geq z_i,\ i+1 \leq j \leq s\}$ не имеет неотрицательной связи с районом i.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть z_i – темп роста с равновесным вектором $\bar{x} = (x^1, \dots, x^s)$. Доказательство истинности условия теоремы проведем методом от противного. Пусть найдется номер $f \in F$ такой, что $z_f \geq z_i$ и район f имеет неотрицательную связь A_{l_{h+1}, l_h}, $0 \leq h \leq m-1$, с районом i. Обозначим через k наименьшее число, принадлежащее пересечению $F \cap \{l_k, 0 \leq h \leq m\}$. Такое число всегда существует, так как $l_m = f \in F$. Для номера k имеет место равенство

$$z_i x^k - A_k x^k = \sum_{j=1}^{k-1} A_j x^j. \qquad (2)$$

Район f имеет НС с районом i. Отсюда следует, что правая часть (2) есть ненулевой неотрицательный вектор. Тогда ни один вектор $x^k \geq 0$ не может быть решением (2). Последнее противоречит предположению о том, что z_i – темп роста района i.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Равновесный вектор $\bar{x} = (x^1, \dots, x^s)$, соответствующий темпу роста z_i, составим следующим образом. Положим $x^1 = \dots = x^{i-1} = 0$, $x^i = \bar{x}^i$, где $\bar{x}^i$ – правый собственный вектор матрицы A_i, соответствующий ее перронову числу z_i. Вектор x^{i+1} найдем из равенства $z_i x^{i+1} - A_{i+1} x^{i+1} = A_{i+1, i} x^i$. Если $z_{i+1} \geq z_i$, то из условия теоремы следует, что $A_{i+1,i}=0$. В этом случае будем считать $x^{i+1}=0$. Пусть теперь $z_{i+1}<z_i$. Если матрица неотрицательная неразложимая, то $(z_i E-A_{i+1})^{-1}$ – строго положительна [4, с.367], поэтому можем полагать

$$x^{i+1}=(z_i E-A_{i+1})^{-1}A_{i+1,i}\cdot x^i. \qquad (3)$$

Покажем, что и в случае квазинеотрицательной матрицы справедливо неравенство $(z_i E-A_j)^{-1}>0$ при $z_i>z_j$, $j=i+1,\dots,s$. Представим матрицу $z_i E-A_j$ в виде: $z_i E-A_j=$ $=\lambda E-(A_j+kE)$, где $\lambda=z_i+k$, k – наибольшее среди чисел, равных абсолютным величинам отрицательных элементов главной диагонали матрицы A_j. Матрица A_j+kE является неотрицательной неразложимой с перроновым числом z_j+k. Так как $\lambda=z_i+k>z_j+k$, то $(z_i E-A_j)^{-1}=(\lambda E-(A_j+kE))^{-1}$ является строго положительной матрицей. Следовательно, и в случае квазинеотрицательной матрицы A_{i+1} вектор x^{i+1} можно найти по формуле (3).

Вектор x^{i+2} вычислим, исходя из равенства

$$z_i x^{i+2}-A_{i+2}\,x^{i+2}=A_{i+2,i}\,x^i+A_{i+2,i+1}\,x^{i+1}.$$

При $z_{i+2}\geqslant z_i$ правая часть этого равенства по условию теоремы является нулевым вектором и, следовательно, можем считать $x^{i+2}=0$. При $z_{i+2}<z_i$ за x^{i+2} возьмем вектор $(z_i E-A_{i+2})^{-1}y^{i+2}$, где через y^{i+2} обозначена правая часть указанного равенства. Продолжая этот процесс, получим вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий равенству $z_i\bar{x}=A\bar{x}$, причем $x^i=\bar{x}^i$ – строго положительный в R_{n_i} вектор. Отсюда следует, что z_i – темп роста района i.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Число z_i, $1\leqslant i\leqslant s$, является темпом роста района i в смысле определения I.I′, если $\bar{F}$ – пустое множество.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Числа $\bar{z}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} z_i$ и z_s являются темпами роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. В ходе доказательства теоремы показана истинность следующего предложения.

ЛЕММА 2.I. Если A – неразложимая квазинеотрицательная матрица с максимальным характеристическим числом z, то $(\lambda E - A)^{-1} > 0$ при $\lambda > z$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Доказанная теорема позволяет указать простой и вместе с тем весьма эффективный алгоритм нахождения некоторых темпов роста. Он состоит в следующем.

I) В ряду $z_1, \dots, z_s$ отмечаем такое наибольшее число, которое больше всех последующих. Пусть i_1 – номер такого числа.

2) С числами ряда $z_{i_1+1}, z_{i_1+2}, \dots, z_s$, полученного из данного вычеркиванием всех чисел вплоть до z_{i_1}, поступаем аналогично. Пусть i_2 – номер наибольшего в новом ряду числа, которое больше всех за ним последующих.

Продолжая этот процесс, получим числа $\bar{z} = z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k} = z_s$, каждое из которых является темпом роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I. Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Теоремы 2.I-2.2 и указанный выше алгоритм нахождения темпов роста позволяют, во-первых, найти все темпы роста моделей (ж) и (жж), во-вторых, вопрос о нахождении темпов роста моделей с матрицами больших порядков свести к нахождению темпов роста моделей с матрицами существенно меньшего порядка. Выявление всех темпов роста следует проводить в два этапа. На первом этапе находим часть темпов роста $\bar{z} = z_{i_1}, \dots, z_{i_k} = z_s$ в соответствии с алгоритмом. На втором этапе найдем остальные, применяя теорему 2.3 для каждого из чисел множества

$$\{z_1, z_2, \dots, z_s\} \setminus \{z_{i_1}, \dots, z_{i_k}\}.$$

Из сказанного выше наибольший интерес представляет вопрос, когда население заданного района или всё население растет с наибольшим темпом роста. Ниже приведены предложения, посвященные этому вопросу.

ТЕОРЕМА 2.3. Население района j, $1 \le j \le s$, $0 < z_j < \bar{z}$, моделей (ж) и (жж) растет с наибольшим темпом роста $\bar{z}$ в смысле определения I.I$'$ тогда и только тогда, когда этот район имеет неотрицательную связь A_{l_{p+1}, l_p}, $0 \le p \le m-1$, $l_m = j$, с районом максимального роста населения, имеющего номер l_0, а любой район с номером $f \in F = \{k : z_k = \bar{z},\ l_0 + 1 \le k \le s\}$ не имеет неотрицательной связи с районом l_0.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть население района с номером j растет с наибольшим темпом роста, т.е. найдется строго положительный вектор $\hat{x}^j$ в R_{n_j}, который является решением равенства

$$\bar{z} x^j - A_j x^j = \sum_{f=1}^{j-1} A_{jf} x^f. \qquad (4)$$

Истинность условий теоремы докажем методом от противного. Пусть не выполнено первое условие, т.е. для любого $i \in J = \{j : z_j = \bar{z},\ 1 \le j \le s\}$ и для любой строго возрастающей последовательности $i = l_0 < l_1 < \ldots < l_m = j$ найдется номер $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ такой, что $A_{l_{k+1}, l_k} = 0$. Покажем, что в этом случае правая часть (4) является ненулевым вектором. В самом деле, для любого $f \in J$ матрица $A_{jf} = 0$, в противном случае район j имел бы неотрицательную связь с районом максимального роста. Для всех номеров $f \in \{1, 2, \ldots$ $\ldots, j-1\} \setminus J$, для которых $A_{jf} \ne 0$, векторы $x^f = 0$, в противном случае также выполнялось бы условие теоремы. Итак, правая часть (4) представляет собой ненулевой вектор. Тогда $x^j = 0$ – единственное неотрицательное решение (4). Противоречие. Пусть теперь не выполнено второе условие, т.е. найдется район с номером $f \in F$, имеющий неотрицательную связь с районом l_0. Будем считать, что $A_{l_1, l_0}, \ldots$ $\ldots, A_{l_m, l_{m-1}}$ (где $f = l_m$) – цепь, осуществляющая неотрицательную связь районов с соответственно номерами l_0 и f. Так как $\bar{z}$ – темп роста района с номером j, то для указанного номера f должно иметь место равенство

$$\bar{z} x^f - A_f x^f = \sum_{i=1}^{f-1} A_{fi} x^i,$$

где $x^1, \ldots, x^f$ – неотрицательные векторы, причем вектор x^j должен быть строго положительным в R_{n_j}. Последнее возможно только в том случае, если $x^{l_0} = \lambda \bar{x}^{l_0}$, где $\lambda > 0$, а $\bar{x}^{l_0}$ – правый собственный вектор матрицы A_{l_0}, соответствующий $z_{l_0} = \bar{z}$. Тогда вектор $y^f = \sum_{i=1}^{f-1} A_{fi} x^i$ является ненулевым отрицательным и равенство $\bar{z} x^f - A_f x^f = y^f$

будет ложным при любых неотрицательных векторах x^f. Отсюда следует, что $\bar{z}$ не может быть темпом роста района j. Противоречие.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $F=\phi$ и $(l_0, l_1, \ldots, l_m=j)$ – строго возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию теоремы, т.е. $z_{l_0}=\bar{z}$ и $A_{l_{f+1}, l_f} \neq 0$ для любого $f \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Для простоты рассуждений будем считать, что лишь $z_{l_0}=\bar{z}$, а остальные числа $z_{l_f}<\bar{z}$, $1 \leq f \leq m-1$, в противном случае можно брать более короткую цепь, осуществляющую НС. Положим $x^1=\ldots=x^{l_0-1}=0$, $x^{l_0}=\bar{x}^{l_0}$, где x^{l_0} – правый собственный вектор матрицы A_{l_0}, соответствующий $\bar{z}=\bar{z}_{l_0}$. Остальные векторы $x^{l_0+1}, \ldots, x^j, \ldots, x^s$ найдем из рекуррентного соотношения

$$x^k=(\bar{z}E-A_f)^{-1}y^k, \quad k=l_0+1,\ldots, s. \qquad (5)$$

Так как векторы y^k с номерами $k=l_1, l_2, \ldots, l_m$ являются ненулевыми неотрицательными, то левые части x^k для указанных номеров будут представлять собой строго положительные векторы. Отсюда следует, что население районов с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_m=j$ будет расти с наибольшим темпом роста $\bar{z}$.

Пусть теперь множество F не является пустым. Равновесный вектор $\bar{x}=(x^1,\ldots,x^s)$, удовлетворяющий равенству $\bar{z}\bar{x}=A\bar{x}$, составим следующим образом. Векторы x^k с номерами $k \in \{1,2,\ldots,s\} \setminus F$ найдем так же, как и в предыдущем случае. А для всех номеров $f \in F$ положим $x^f=0$, что возможно, так как эти районы не имеют НС с районом номера l_0. Очевидно, что таким образом построенный вектор $\bar{x}$ является искомым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Население районов с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$, с помощью которых осуществлялась НС района $j=l_m$ с районом максимального роста l_0, также растет с наибольшим темпом роста, так как эти районы заведомо имеют НС с соответствующим районом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Из этой теоремы следует, что районы с номерами, предшествующими $i_0=\min \mathcal{J}$, $\mathcal{J}=\{i: z_i=\bar{z}, 1 \leq i \leq s\}$, не могут расти с наибольшим темпом роста. В этом состоит один из недостатков замкнутых моделей рассматриваемого типа. В открытых моделях указанный недостаток можно выправить за счет внешнего вмешательства, что говорит о больших возможностях открытых моделей и важности управления.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. В теореме не рассмотрен случай, когда $z_i = \bar{z}$. Очевидно, $z_i = \bar{z}$ – темп роста населения района i тогда и только тогда, когда любой район $f \in \{k : z_k = \bar{z},\ i+1 \leq k \leq s\}$ не имеет неотрицательной связи с районом i.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда все население растет с наибольшим темпом роста. Ниже будет сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях максимального роста всего населения моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I.

ТЕОРЕМА 2.4. Все население, описываемое моделями (ж) и (жж), растет с наибольшим темпом роста в смысле определения I.I тогда и только тогда, когда для любого $i,\ 1 \leq i \leq g$, числа $z_i = \bar{z}$, а для любого $j \in \{g+1, \ldots, s\}$ имеет место неравенство $z_j < \bar{z}$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Доказательство проведем методом от противного. Пусть либо $z_k < \bar{z}$, либо $z_f = \bar{z}$, где $k \in \{1, 2, \ldots, g\}$, $f \in \{g+1, \ldots, s\}$. В первом случае из равенства $\bar{z} x^k = A_k x^k$ следует, что $x^k = 0$, т.е. население района с номером k не может расти с темпом $\bar{z}$, что невозможно. Рассмотрим теперь второй случай. Так как все население растет с темпом роста $\bar{z}$, то векторы $x^1, \ldots, x^f$ в представлении равновесного вектора $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$, $\bar{z}\bar{x} = A\bar{x}$, являются строго положительными. Так как хотя бы одна из матриц $A_{f1}, \ldots, A_{f,f-1}$ является ненулевой, то равенство $\bar{z} x^f - A_f x^f = y^f$ будет ложным для любого строго положительного вектора x^f. Полученное противоречие показывает необходимость выполнения условий теоремы.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Покажем, что найдется строго положительный вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий равенству $\bar{z}\bar{x} = A\bar{x}$. Искомый вектор, как и ранее, будем искать в виде $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ в соответствии с нормальным представлением матрицы A (см. (I)). Положим $x^i = \bar{x}^i$ для любого $i \in \{1, \ldots, g\}$, где $\bar{x}^i$ – строго положительный собственный вектор, соответствующий максимальному характеристическому числу $z_i = \bar{z}$ матрицы A_i. Далее, векторы $x^{g+1}, \ldots, x^s$ найдем из рекурентного соотношения (5). Очевидно, что вектор $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ является строго положительным и удовлетворяющим равенству $\bar{z}\bar{x} = A\bar{x}$.

Отсюда следует, что все население растет с наибольшим темпом роста $\bar{z}$.

3. Здесь будут сформулированы аналоги теорем 2.1–2.4 для случая, когда в определении 1.1 темпа роста вместо знака равенства будет применен знак $\leqslant$. Иначе говоря, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста моделей (ж) и (жж), если найдется неотрицательный ненулевой вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условию: $\alpha\bar{x} \leqslant A\bar{x}$. При таком определении темпа роста для моделей (ж) и (жж) имеют место аналоги теорем 2.1–2.4, причем некоторые из них можно существенно усилить. Приведем их формулировки, опуская доказательства, так как проводятся они почти так же, как и их аналоги.

ТЕОРЕМА 3.1. *Любое положительное число, не превосходящее $\bar{z}$, является темпом роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения 3.1.*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Число $\bar{z}$ является наибольшим темпом роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения 3.1.

Теоремы 2.3, 2.4 можно существенно усилить, если темпы роста определить в новой формулировке.

ТЕОРЕМА 3.2. *Население района с номером $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $z_j < \bar{z}$, моделей (ж) и (жж) растет с наибольшим темпом роста $\bar{z}$ в смысле определения 3.1 тогда и только тогда, когда этот район имеет неотрицательную связь с районом максимального роста населения.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Все население, описываемое моделями (ж) и (жж), растет с наибольшим темпом роста в смысле определения 3.1 тогда и только тогда, когда для любого $i \in \{1, \ldots, g\}$ имеет место равенство $z_i = \bar{z}$.*

4. В этом пункте будут доказаны теоремы о темпах роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения 1.2. Доказательства этих теорем справедливы как для неотрицательных, так и

для квазинеотрицательных матриц, поэтому в дальнейшем эти случаи особо оговаривать не будем.

При рассмотрении темпов роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.I было показано, что темпами роста могут быть только максимальные характеристические числа диагональных блоков $A_1,\dots,A_s$ матрицы A (см. теорему 2.I). Аналогичная теорема имеет место для темпов роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2, которая будет приведена ниже. Эти теоремы имеют большую практическую значимость, так как позволяют вопрос о нахождении темпов роста моделей, определяемых матрицами больших размеров, сводить к решению аналогичного вопроса для моделей с матрицами существенно меньшего порядка, а именно, к вычислению перроновых чисел диагональных блоков матрицы A.

ТЕОРЕМА 4.I. *Любой темп роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2 принадлежит множеству $\{z_1, z_2,\dots, z_s\}$, где z_i – перроново число диагонального блока A_i в нормальном представлении (I) матрицы A, $1\leqslant i\leqslant s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – темп роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2, отличный от максимальных характеристических чисел $z_1, z_2,\dots, z_s$. Представляя равновесный вектор $\bar p$ в виде $(p^1,\dots, p^s)$, вначале убедимся в том, что: I) вектор p^i является строго положительным в R_{n_i} только для таких номеров $i\in\{1, 2,\dots, s\}$, каждый из которых одновременно обладает следующими двумя свойствами: а) $z_i<\alpha$, б) все районы с номерами k, $k<i$, $z_k>\alpha$, не имеют неотрицательной связи с районом i; 2) вектор $p^i=0$ для остальных номеров i.

Чтобы убедиться в истинности сказанного, неравенство $\alpha\bar p\geqslant\bar pA$ представим в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll}\alpha p^i-p^iA_i\geqslant\sum\limits_{j=i+1}^{s} p^jA_{ji}, & i=1,2,\dots,s-1;\\ \alpha p^s-p^sA_s\geqslant 0.\end{array}\right.\qquad(6)$$

Если $\alpha<z_s$, то вектор $p^s=0$ является единственным неотрицательным решением (6). При $\alpha>z_s$ для вектора p^s имеются две возможности: либо он строго положительный, либо нулевой. Однако если найдется число $k < s$ такое, что район с номером k имеет НС с районом s и $z_i < \alpha$, то вектор p^s может быть только нулевым. Рассуждая аналогично, убедимся в справедливости вышесказанного.

Теперь покажем, что вектор x^i в представлении равновесного вектора $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$, соответствующего темпу роста α, может быть неотрицательным и ненулевым только для таких номеров $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, для которых либо $z_i > \alpha$, либо при $z_i < \alpha$ район i имеет НС с каким-нибудь районом номера k такого, что $z_k > \alpha$.

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, неравенство $\alpha \bar{x} \leqslant A\bar{x}$ представим в виде совокупности:

$$\begin{cases} \alpha x^i - A_i x^i \leqslant y^i, & i = 2, \ldots, s; \\ \alpha x^1 \leqslant A_1 x^1 \end{cases} \qquad (7)$$

Если $\alpha < z_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, то $x^i = \bar{x}^i$ является строго положительным в R_{n_i} решением (7). При $\alpha > z_1$ вектор $x^1 = 0$ – единственное неотрицательное решение (7). Для вектора x^2 при $\alpha > z_2$ имеются две возможности: x^2 может быть только нулевым вектором, если $\alpha > z_1$ или районы с номерами I и 2 не имеют НС; x^2 может быть ненулевым решением (7), если $\alpha < z_1$ и районы с номерами I и 2 имеют НС. В последнем случае в качестве вектора x^2 можно брать любой ненулевой неотрицательный вектор, удовлетворяющий условию:

$$x^2 \leqslant (\alpha E - A_2)^{-1} A_{21} x^1, \quad A_{21} \neq 0, \quad x^1 > 0.$$

Аналогично рассуждая, убедимся в истинности второго нашего утверждения. Из этих двух утверждений следует, что для равновесных векторов $\bar{x}$ и $\bar{p}$, соответствующих темпу роста α, имеет место равенство $\bar{p}\bar{x} = 0$. Противоречие. Отсюда следует, что темпами роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2 могут быть только перроновы числа z_1, $z_2, \ldots, z_s$ диагональных блоков $A_1, A_2, \ldots, A_s$ матрицы A.

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Темпами роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2 могут быть только числа, не превосходящие $\bar{z} = \max\{z_1, \ldots, z_s\}$ и не меньшие $\underline{z} = \min\{z_1, \ldots, z_s\}$.

Представляют интерес условия, необходимые и достаточные для того, чтобы число z_i было темпом роста и именно темпом роста района с номером i, $1 \leq i \leq s$.

ТЕОРЕМА 4.2. Число z_i, $1 \leq i \leq s$, является темпом роста района i моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2$'$ тогда и только тогда, когда любой район с номером $f \in F = \{j : z_j \geq z_i, 1 \leq j \leq i-1\}$ не имеет неотрицательной связи с районом i.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть найдутся равновесные векторы $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ и $\bar{p} = (p^1, \ldots, p^s)$, удовлетворяющие соответствующим неравенствам определения I.2$'$. Доказательство истинности условий теоремы проведем методом от противного. Пусть k – наибольший номер, такой, что $k \in \{1, \ldots, i-1\}$, $z_k \geq z_i$, и район k имеет НС с районом i. Так как p^i – строго положительный в R_{n_i} вектор, то неравенство $z_i p^k - p^k A_k \geq \sum_{j=k+1}^{i} p^j A_{jk}$ не имеет неотрицательного решения. Последнее противоречит предположению о том, что z_i – темп роста.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Равновесные векторы $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$, $\bar{p} = (p^1, \ldots, p^s)$ построим следующим образом. Положим $x^j = 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i\}$, $x^i = \bar{x}^i$, где $\bar{x}^i$ – правый собственный вектор неразложимой матрицы A_i, соответствующий ее перронову числу z_i. Для построения вектора $\bar{p}$ будем считать, что $p^s = \ldots = p^{i+1} = 0$, $p^i = \bar{p}^i$, где $\bar{p}^i$ – левый собственный вектор матрицы A_i, соответствующий числу z^i. Вектор p^{i-1} найдем из условия: $z_i p^{i-1} - p^{i-1} A_{i-1} \geq p^i A_{i,i-1}$. Если $z_{i-1} \geq z_i$, то $p^{i-1} = 0$ является решением указанного неравенства, так как из условия следует, что $A_{i,i-1} = 0$. Если же $z_{i-1} < z_i$, то будем считать $p^{i-1} = p^i A_{i,i-1} \times (z_i E - A_{i-1})^{-1}$. Аналогично вычисляются векторы $p^{i-2}, \ldots, p^1$. Таким образом построенные векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ удовлетворяют всем требованиям для того, чтобы z_i было темпом роста района с номером i.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.I. Доказанная теорема позволяет сформулировать алгоритм для нахождения темпов роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения I.2. Он состоит в следующем.

1) В ряду $z_1, \ldots, z_s$ отмечаем такое наибольшее число, которое больше всех предшествующих ему чисел. Пусть i_1 – номер этого числа (очевидно, $z_{i_1} = \bar{z}$).

2). С числами ряда $z_1, \ldots, z_{i_1-1}$, полученного из данного ряда вычеркиванием чисел $z_{i_1}, z_{i_1+1}, \ldots, z_s$, поступаем аналогично. Пусть i_2 – номер наибольшего в новом ряду числа, которое больше всех предшествующих ему чисел.

Продолжая этот процесс, получим числа $\bar{z} = z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k} = z_1$, каждое из которых является темпом роста моделей (ж) и (жж) в смысле определения 3.I. Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теоремы 4.I, 4.2 и указанный выше алгоритм нахождения темпов роста позволяют, во-первых, найти все темпы роста моделей (ж) и (жж), во-вторых, вопрос нахождения темпов роста моделей с матрицами больших порядков сводить к нахождению темпов роста моделей с матрицами существенно меньшего порядка. Выявление всех темпов роста следует проводить в два этапа. На первом этапе находим часть темпов роста $z_{i_1} = \bar{z}, \ldots, z_{i_k} = z_1$ в соответствии с алгоритмом. На втором этапе найдем остальные, применяя теорему 4.2 для каждого из чисел множества

$$\{z_1, \ldots, z_s\} \setminus \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\} .$$

В случае, когда матрица A является неотрицательной, вопрос нахождения всех темпов роста такой модели решен В.Л.Макаровым [I, с. II8]. Однако в рассматриваемом случае матрица A может быть и квазинеотрицательной [2, с.I57-I58].

Кроме того, предложенный в этой работе способ нахождения темпов роста является конструктивным и легко выполнимым.

Рассмотрим теперь теоремы, в которых будут указаны необходимые и достаточные условия роста некоторого района или же всего населения с наибольшим темпом роста в смысле определения I.2.

ТЕОРЕМА 4.3. Население района $i \in \{1, \ldots, s\}$ моделей (ж) и (жж) растет с наибольшим темпом роста $\bar{z}$ в смысле определения I.2 тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

а) $z_i = \bar{z}$ и б) для любого $f \in F = \{j : z_j = \bar{z}, 1 \leq j \leq i-1\}$ район с номером f не имеет неотрицательной связи с районом i.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть население района i растет с темпом роста $\bar{z}$, $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ и $\bar{\rho} = (\rho^1, \ldots, \rho^s)$ – равновесные векторы, соответствующие $\bar{z}$, причем $x^i > 0$ и $\rho^i > 0$ в R_{n_i}. Доказательство истинности условия теоремы проведем методом от противного, т.е. пусть $z_i < \bar{z}$ или найдется район с номером $f \in F$, имеющий НС с районом i. Во втором случае вектор $q^f = \sum\limits_{j}^{i} \rho^j A_{jf}$ является ненулевым. Тогда неравенство $\bar{z}\rho^f - \rho^f A_f \geq q^f$ не имеет неотрицательных решений, а следовательно, $\bar{z}$ не может быть темпом роста района i.

Пусть теперь выполнено неравенство $z_i < \bar{z}$. Для того чтобы вектор x^i был строго положительным в R_{n_i}, необходимо и достаточно, чтобы район i имел НС с каким-нибудь районом номера $f \in F$. Но в последнем случае не существует равновесный вектор $\bar{\rho}$, соответствующий темпу роста $\bar{z}$ района i. Полученные противоречия завершают доказательство этой части теоремы.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Равновесные векторы $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ и $\bar{\rho} = (\rho^1, \ldots, \rho^s)$ со строго положительными векторами x^i и ρ^i составим слудующим образом. Будем считать: $x^j = 0$ для любого $j \neq i$ и $\rho^m = 0$ для любого $m \in \{i+1, \ldots, s\}$, $x^i = \bar{x}^i$, где $\bar{x}^i$ и $\bar{\rho}^i$ – соответственно правый и левый собственные векторы матрицы A_i, соответствующие её перронову числу $z_i = \bar{z}$. Далее, векторы $\rho^{i-1}, \rho^{i-2}, \ldots, \rho^1$ будем находить из рекуррентного соотношения

$$\bar{z}\rho^t - \rho^t A_t \geq q_t, \quad t = i-1, \ldots, 1,$$

если $z_{i-1} < \bar{z}$, то за вектор ρ^{i-1} возьмем вектор $q_{i-1} \times (zE - A_{i-1})^{-1}$. Если же $z_{i-1} = \bar{z}$, то по условию теоремы $q_{i-1} = 0$, поэтому можно считать $\rho^{i-1} = 0$. Аналогично находятся остальные векторы $\rho^{i-2}, \ldots, \rho^1$. Построенные таким образом векторы $\bar{x}$ и $\bar{\rho}$ удовлетворяют всем требованиям, достаточным для того, чтобы число $\bar{z}$ было темпом роста района i.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Условия доказанной теоремы значителько жестче условий аналогичной теоремы 2.3. Это говорит о том, что в определении I.2 имеются более существенные ограничения, чем в определении I.I. Ясно, что эти ограничения связаны с требованием строгой положительности вектора $\bar{p}$.

Сказанное выше имеет место и в приводимой ниже теореме, указывающей необходимые и достаточные условия роста всего населения с наибольшим темпом роста.

ТЕОРЕМА 4.4. Все население, определяемое моделью (ж) или (жж), растет с наибольшим темпом роста $\bar{z}$ в смысле определения I.2 тогда и только тогда, когда матрица A квазидиагональна, т.е. перестановкой рядов она может быть представлена в виде $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$, где $A_1, \ldots, A_s$ – неразложимые матрицы, каждая из которых имеет число $\bar{z}$ своим максимальным характеристическим числом.

Достаточность очевидна. Доказательство необходимости проведем методом от противного. Пусть матрица A не является квазидиагональной. Приведем ее перестановкой рядов к нормальному виду (I). Для того чтобы равновесный вектор $\bar{x}$, соответствующий темпу роста $\bar{z}$, был строго положительным, необходимо и достаточно, чтобы $z_1 = \ldots = z_g = \bar{z}$. По условиям представления матрицы A в нормальной форме (I) следует, что одна из матриц $A_{g+1,1}, \ldots, A_{g+1,g}$ не является нулевой. Пусть для определенности $A_{g+1,k} \neq 0$, $1 \leq k \leq g$. Так как z – темп роста со строго положительным вектором $\bar{p}=(p^1, \ldots, p^s)$, то неравенство $zp^k - p^k A_k \geq q_k$ не может быть истинным ни при каком $p^k \geq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.

2. СТАРОВЕРОВ О.В. Модели движения населения. – М.: Наука, 1979.

3. БРУК С.И. Население мира. - М.: Наука, 1981.
4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967, с. 352-398.
5. Математика в социологии /Под ред. Агабегяна А.Г. и др. - М.: Мир, 1977.
6. ЖАФЯРОВ А.Ж. О единственности равновесных цен в одной модели Неймана. - Оптимизация, 1971, вып. 2(19), с.36-56.
7. Демографические модели /Под ред. Андреева Е.М. и Волкова А.Г. - М.: Статистика, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
24.05.1982 г.