Выпуск 32(49) О П Т И М И З А Ц И Я 1983 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

ПОВЕДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ СО СЛАБО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕХНОЛОГИЕЙ

Н.П.Дементьев

В статье изучаются модели экономической динамики рамсеевского типа с переменной технологией. В первых работах этого направления [1-3] обычно предполагалось, что технология и полезности неизменны во времени. В этом случае при некоторых дополнительных условиях удается показать, что

1) из произвольного начального состояния исходит одна и только одна оптимальная траектория;

2) две любые оптимальные траектории модели стремятся друг к другу при $t \to \infty$;

3) существует магистраль - ненулевая оптимальная стационарная траектория.

Из 2),3) следует, что любая оптимальная траектория на бесконечности неограниченно приближается к магистрали. Экономически это означает, что на магистрали реализуются наилучшие пропорции экономики и оптимальное функционирование экономической системы предполагает постепенный выход экономики на магистральные пропорции.

В последнее время появился ряд работ [4-6], в которых при некоторых предположениях свойства 1)-2) установлены и для моделей с переменной технологией. Свойство 3) не может быть перенесено на этот случай. Действительно, в моделях с изменяющейся технологией оптимально функционирующая экономика должна приспосабливаться к меняющейся технологии и потому не может быть стационарной.

В крупноагрегированных моделях, описывающих реальную экономику, технологические множества в соседние моменты времени обычно мало отличаются друг от друга. В связи с этим возникает вопрос, состоящий в следующем. Предположим, что технология и полезности в модели медленно изменяются во времени. Верно ли, что в таких моделях существует хотя бы одна оптимальная траектория, компоненты которой также медленно изменяются во времени? Ниже даны точная постановка вопроса и его положительное решение при предположениях, близких к принятым в [4]. При этих предположениях свойство 2) также выполняется, поэтому в модели с мало изменяющейся технологией поведение оптимальных траекторий может быть описано следующим образом. Все оптимальные траектории стремятся на бесконечности к некоторой слабо изменяющейся оптимальной траектории. Тем самым компоненты оптимальных траекторий мало изменяются во времени при достаточно больших t.

§I. Формулировка основного результата

Модель экономики задается парой последовательностей:

I) $\{\Omega_t\}_{t=0}^{\infty}$, где $\Omega_t \subset R_+^n \times R_+^n$ – технологическое множество в году t и n – число продуктов в модели;

2) $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$, где $u_t : R_+^n \to R_+$ – функция полезности в году t.

Допустимой траекторией модели называется последовательность $\{(x(t), y(t), z(t)\}_{t=0}^{\infty}$, для которой выполнено

$$(x(t), y(t)) \in \Omega_t, \qquad x(t), y(t), z(t) \in R_+^n, \tag{I}$$
$$y(t-1) \geq x(t) + z(t), \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

Траектория $\{(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))\}_{t=0}^{\infty}$ называется оптимальной, если

$$\varliminf_{T \to \infty} \left(\sum_{t=1}^{T} u_t(\bar{z}(t)) - \sum_{t=1}^{T} u_t(z(t))\right) \geq 0$$

для любой траектории $\{(x(t), y(t), z(t))\}_{t=0}^{\infty}$, исходящей из начального состояния $(\bar{x}(0), \bar{y}(0), \bar{z}(0))$.

Всюду ниже рассматривается не одна изолированная модель экономической динамики, а их некоторое семейство. Благодаря этому приему результаты работы становятся более экономными по формулировке и доказательству.

Пусть L - некоторый класс моделей (I). Каждая модель $\alpha \in L$ описывается последовательностью пар $\{(\Omega_{\alpha t}, u_{\alpha t})\}_{t=0}^{\infty}$. Требуется, чтобы пары $(\Omega_{\alpha t}, u_{\alpha t}), \alpha \in L, t \geq 0$, наряду с обычными условиями удовлетворяли некоторым равномерным ограничениям. Предполагается, что существуют числа $K > 0$, $\alpha > 1$, $q > 0$, положительный вектор $\eta \in R^n$, функции $\delta_i : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $i = 1,2$, и непрерывная функция $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, относительно которых справедливо следующее. Всякая пара $(\Omega_{\alpha t}, u_{\alpha t}), \alpha \in L, t \geq 0$, удовлетворяет условиям:

A1) $\Omega_{\alpha t} \subset R^n_+ \times R^n_+$ - выпуклый компакт, причем $(0,0) \in \Omega_{\alpha t}$; $|x| \leq K$, $|y| \leq K$, если $(x,y) \in \Omega_{\alpha t}$. Если $(x,y) \in \Omega_{\alpha t}$ и $0 \leq y' \leq y$, то $(x,y') \in \Omega_{\alpha t}$. Здесь и ниже $\|\cdot\|$ - евклидова норма;

A2) $(0,y) \in \Omega_{\alpha t}$ тогда и только тогда, когда $y = 0$;

A3) из того, что $(x,y) \in \Omega_{\alpha t}$, $(x',y') \in \Omega_{\alpha t}$, $|y-y'| \geq \varepsilon$, следует, что $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} + \omega\right) \in \Omega_{\alpha t}$ для любого вектора $\omega \geq 0$, $\|\omega\| \leq \delta_1(\varepsilon)$;

A4) из того, что $(x,y) \in \Omega_{\alpha t}$, $(x',y') \in \Omega_{\alpha t}$, $|x-x'| \geq \varepsilon$, следует, что $\left(\frac{x+x'}{2} - v, \frac{y+y'}{2}\right) \in \Omega_{\alpha t}$ для любого вектора $v \geq 0$, $\|v\| \leq \delta_2(\varepsilon)$;

A5) $(\eta, \alpha\eta) \in \Omega_{\alpha t}$;

A6) для всех $(x,y) \in \Omega_{\alpha t}$, $x' \in R^n_+$ найдется $y' \in R^n_+$ такой, что $(x',y') \in \Omega_{\alpha t}$ и $|y-y'| \leq \varphi(|x-x'|)$;

A7) $u_{\alpha t} : R^n_+ \to R_+$ - вогнутая неубывающая непрерывно дифференцируемая функция. Градиент функции $u_{\alpha t}$ ограничен равномерно по $\alpha \in L, t \geq 0, z$ и непрерывен равномерно по $\alpha \in L$, $t \geq 0$, z в области $\{z \in R^n_+ \mid \|z\| \leq 2K\}$;

A8) $u_{\alpha t}(z) = 0$, если $z^i = 0$ хотя бы для одного i;

A9) $u_{\alpha t}(z+\eta) \geq u_{\alpha t}(z) + q$ для всех $z \geq 0$ таких, что $\|z\| \leq K$.

Заметим, что числа K, α, q, вектор η и функции $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ не зависят от выбора $\alpha \in L$, $t \geq 0$. Определим на элементах множества L функционал

$$|\alpha| = \max\left(\sup_{t\geq 0} \rho(Q_{\alpha t}, Q_{\alpha,t+1}), \sup_{t\geq 0} \|u_{\alpha t} - u_{\alpha,t+1}\|_C\right),$$

где ρ – метрика Хаусдорфа, а $\|\cdot\|_C$ – норма в пространстве непрерывных функций, определенных на множестве $\{z \in R^n_+ | \|z\| \leq 2K\}$. Значение функционала $|\alpha|$ характеризует скорость изменения параметров модели α во времени.

Заметим, что величины $Q_{\alpha,t_1}, u_{\alpha,t_1}$ и $Q_{\alpha,t_2}, u_{\alpha,t_2}$ могут существенно отличаться друг от друга и при малом $|\alpha|$, если $|t_1 - t_2|$ – достаточно большое число.

Определим на траекториях $\chi = \{\chi(t)\}_{t=0}^{\infty} = \{(x(t), y(t), z(t))\}_{t=0}^{\infty}$ функционал

$$|\chi|_0 = \sup_{t\geq 0} \|(x(t), y(t), z(t)) - (x(t+1), y(t+1), z(t+1))\|.$$

Величина $|\chi|_0$ характеризует степень изменчивости экономической системы, развивающейся по траектории $\chi(t)$.

Целью работы является доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть модели из $\mathcal{L}$ удовлетворяют условиям А1)–А9). Тогда каждой модели $\alpha \in \mathcal{L}$ можно сопоставить допустимую в этой модели траекторию $\{\bar{\chi}_\alpha(t)\}_{t=0}^{\infty}$ такую, что*

а) $\{\bar{\chi}_\alpha(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *оптимальна,*

б) $|\bar{\chi}_\alpha|_0 \to 0$ *при* $|\alpha| \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Зафиксируем $\alpha_0 \in \mathcal{L}$, $t_0 \geq 0$. Тогда стационарная модель, определенная технологическим множеством Q_{α_0,t_0} и функцией полезности u_{α_0,t_0}, имеет магистраль $\chi(t) \equiv \bar{\chi}_{\alpha_0,t_0}$. В процессе доказательства теоремы устанавливается, что

$$\|\bar{\chi}_\alpha(t) - \bar{\chi}_{\alpha,t}\| \to 0 \text{ при } |\alpha| \to 0$$

равномерно по $t \geq 0$. Тем самым при малых $|\alpha|$ значение траектории $\bar{\chi}_\alpha(t)$ в каждом году t определяется в основном технологическим множеством и функцией полезности модели в этом году.

Условия А1)–А9) являются более жесткими по сравнению с условиями, принятыми в [4]. Ниже нами будут использованы следующие результаты этой работы.

1) Во всякой модели $\alpha \in L$ из произвольного начального состояния исходит одна и только одна оптимальная траектория.

2) Во всякой модели $\alpha \in L$ две оптимальные траектории стремятся друг к другу на бесконечности.

§2. Некоторые свойства непрерывности

Учитывая А1), будем считать, что функции $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ определены на интервале $(0, 2K]$ и, кроме того, $\delta_1(\varepsilon) \leqslant K$, $\delta_2(\varepsilon) \leqslant K$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены А1), А3), А4)$_1$. Тогда существуют непрерывные функции $\delta_1^\circ(\varepsilon)$, $\delta_2^\circ(\varepsilon)$ такие, что условия А3), А4) справедливы при $\delta_1^\circ(\varepsilon)$, $\delta_2^\circ(\varepsilon)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\delta_1(\varepsilon)$ не является монотонной, определим неубывающую функцию

$$\delta_1^M(\varepsilon) = \sup_{\theta \leqslant \varepsilon} \delta_1(\theta), \quad \varepsilon \in (0, 2K].$$

Ясно, что условие А3) выполняется при $\delta_1^M(\varepsilon)$.

Зададим непрерывную функцию $\delta_1^\circ(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\delta_1^\circ(\varepsilon) = \begin{cases} \int_0^\varepsilon \delta_1^M(\theta)d\theta, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \\ \int_0^{\varepsilon_1} \delta_1^M(\theta)d\theta, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_1, \end{cases}$$

где $\varepsilon_1 = \min(1, 2K)$. Так как $\delta_1^M(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$, то $\delta_1^\circ(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$.

Покажем, что $\delta_1^\circ(\varepsilon) \leqslant \delta_1^M(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 2K]$. При $\varepsilon < \varepsilon_1$ это следует из неравенств

$$\delta_1^\circ(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \delta_1^M(\theta)d\theta \leqslant \varepsilon\delta_1^M(\varepsilon) \leqslant \delta_1^M(\varepsilon).$$

Так как $\delta_1^M(\varepsilon)$ не убывает, а $\delta_1^\circ(\varepsilon)$ постоянна на $[\varepsilon_1, 2K]$, то $\delta_1^\circ(\varepsilon) \leqslant \delta_1^M(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [\varepsilon_1, 2K]$. Итак,

$\delta_1^M(\varepsilon) \geq \delta_1^\circ(\varepsilon),\ \varepsilon \in (0, 2K]$. Поскольку А3) выполняется при $\delta_1^M(\varepsilon)$, то оно справедливо и при $\delta_1^\circ(\varepsilon)$. Аналогично может быть сконструирована и функция $\delta_2^\circ(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Всюду ниже будем предполагать, что функции $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)$ непрерывны на $[0, 2K]$.

Обозначим через W множество всех замкнутых подмножеств компакта $\{(x, y) / x \in R_+^n,\ y \in R_+^n,\ \|x\| \leq K,\ \|y\| \leq K\}$. Для $\xi, \eta \in W$ положим

$$\rho(\xi, \eta) = \inf\{t \geq 0 / \xi \subset \eta + tS,\ \eta \subset \xi + tS\},$$

где S – единичный шар в R^{2n}. Обычно ρ называют метрикой Хаусдорфа. Эта метрика удовлетворяет следующим свойствам:

ρ1) если $\eta_s \to \eta$ и $z \in \eta$, то существует последовательность $z_s \in \eta_s$ такая, что $z_s \to z,\ s \to \infty$ (полунепрерывность снизу);

ρ2) если $\eta_s \to \eta$ и $z_s \to z,\ z_s \in \eta_s$, то $z \in \eta$ (полунепрерывность сверху).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА (В.Бляшке). Если множество Ω компактно, то пространство всех замкнутых подмножеств множества Ω, снабженное метрикой Хаусдорфа, также компактно.

Согласно этой теореме W – компакт. Пусть W_0 – замыкание семейства компактов $\Omega_{\alpha t}$ в метрике Хаусдорфа. Ясно, что W_0 – также компакт.

Покажем, что любой элемент из W_0 удовлетворяет А1), А3)–А5) при тех же величинах K, a, функциях $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)$ и векторе η. Условия А1),А5) для $\xi \in W_0$ следуют из свойств ρ1), ρ2) метрики Хаусдорфа. Установим справедливость А3). Пусть $\xi \in W_0$, $(x_1, y_1) \in \xi$, $(x_2, y_2) \in \xi$, $\|y_1 - y_2\| \geq \varepsilon > 0$. Зафиксируем $\omega \geq 0,\ |\omega| \leq \delta_1(\varepsilon)$. Тогда нужно установить, что

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2} + \omega\right) \in \xi.$$

Так как W_0 – замыкание семейства $\Omega_{\alpha t}$, то существует последовательность Ω_{α_s, t_s} такая, что $\Omega_{\alpha_s, t_s} \to \xi$ при $s \to \infty$. Из ρ1) следует, что существуют последовательности $(x_1^s, y_1^s) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$, $(x_2^s, y_2^s) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$, сходящиеся соответственно к (x_1, y_1), (x_2, y_2). Положим $q_1 = \frac{\|\omega\|}{\delta_1(\varepsilon)}$, $q_2 = \frac{\varepsilon}{\|y_1 - y_2\|}$, $q_1, q_2 \in [0, 1]$. Пусть $\omega_s = \lambda_s \omega$, где $\lambda_s \geq 0$ определены таким образом, чтобы $\|\omega_s\| = q_1 \delta_1 (q_2 \|y_1^s - y_2^s\|)$. Так как $\|\omega_s\| \leq \delta_1(\|y_1^s - y_2^s\|)$, то по А3)

$$\left(\frac{x_1^s + x_2^s}{2}, \frac{y_1^s + y_2^s}{2} + \omega_s \right) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}.$$

По непрерывности $\delta_1(\varepsilon)$ имеем $\|\omega_s\| \to q_1 \delta_1 (q_2 \|y_1 - y_2\|) = \frac{\|\omega\|}{\delta_1(\varepsilon)} \delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{\|y_1 - y_2\|} \cdot \|y_1 - y_2\| \right) = \|\omega\|$. Поэтому

$$\left(\frac{x_1^s + x_2^s}{2}, \frac{y_1^s + y_2^s}{2} + \omega_s \right) \to \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} + \omega \right), \; s \to \infty.$$

Ввиду ρ 2) имеем $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} + \omega \right) \in \xi$. Этим справедливость А3) установлена. Доказательство А4) может быть проведено аналогичным образом. Итак, любой элемент $\xi \in W_0$ удовлетворяет АI), А3)-А5).

Пусть C - пространство непрерывных функций $u(z)$ на компакте $Z = \{ z \in R_+^n \, | \, \|z\| \leq 2K \}$ с нормой

$$|u|_c = \max_{z \in Z} |u(z)|.$$

Обозначим через C_0 замыкание множества функций $u_{\alpha t}$ в пространстве C. Каждый элемент $\gamma \in C_0$ является вогнутой неубывающей непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям А8), А9). По лемме Арцела - Асколи [7] C_0 - компакт. Тогда множество $W_0 \times C_0$ - компакт в метрическом пространстве $W \times C$ с метрикой

$$\tilde{\rho}((\xi_1, \gamma_1), (\xi_2, \gamma_2)) = \max(\rho(\xi_1, \xi_2), |\gamma_1 - \gamma_2|_C),$$

$$(\xi_1, \gamma_1) \in W \times C, \quad (\xi_2, \gamma_2) \in W \times C.$$

Сопоставим каждой паре $(\xi, \gamma) \in W \times C$ задачу

$$\begin{aligned} &\gamma(z) \to \max, \\ &y - x - z \geq 0, \qquad\qquad (2) \\ &(x, y) \in \xi, \; z \geq 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Решение задачи (2) существует, единственно и непрерывно зависит от $(\xi,\gamma)\in W_0\times C_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ξ - компакт, а γ - непрерывная функция, то оптимальное решение (2) существует. Для доказательства единственности нам потребуется неравенство $\gamma(z+\theta)>\gamma(z)$, где $|z|<K$, $|z+\theta|<2K$, $\theta>0$. Оно является следствием монотонности γ и А9). Действительно, выберем $\lambda\in(0,1)$ таким, чтобы $\lambda\eta<\theta$. Тогда $\gamma(z+\theta)\geq$ $\geq\gamma(z+\lambda\eta)=\gamma((1-\lambda)z+\lambda(z+\eta))\geq(1-\lambda)\gamma(z)+\lambda(\gamma(z)+q)=\gamma(z)+\lambda q$.

Пусть при некотором $(\xi,\gamma)\in W_0\times C_0$ решение (2) неединственно. Тогда оптимальное значение задачи γ^* достигается по крайней мере на двух решениях $(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)$, $(\bar{x}_2,\bar{y}_2,\bar{z}_2)$. Докажем, что $\bar{y}_1=\bar{y}_2$. Если $\bar{y}_1\neq\bar{y}_2$, то по А3) найдется $\omega>0$ такое, что

$$\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2},\ \frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}+\omega\right)\in\xi.$$

Решение $\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2},\ \frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}+\omega,\ \frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}-\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{2}+\omega\right)$ допустимо в (2) и $\gamma\left(\frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}+\omega-\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}\right)>\gamma\left(\frac{\bar{y}_1-\bar{x}_1}{2}+\frac{\bar{y}_2-\bar{x}_2}{2}\right)\geq$

$$\geq\frac{1}{2}\gamma(\bar{y}_1-\bar{x}_1)+\frac{1}{2}\gamma(\bar{y}_2-\bar{x}_2)\geq\frac{1}{2}\gamma(\bar{z}_1)+\frac{1}{2}\gamma(\bar{z}_2)=\gamma^*.$$

Таким образом, γ^* не является оптимальным значением задачи (2). Из полученного противоречия следует, что $\bar{y}_1=\bar{y}_2$.

Аналогично можно показать, что $\bar{x}_1=\bar{x}_2$. Доказательство леммы будет завершено, если мы установим, что оптимальное решение задачи (2) удовлетворяет неравенству $y-x-z\geq0$ как строгому равенству. Докажем это. Пусть $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ - оптимальное решение (2) и $\bar{y}-\bar{x}-\bar{z}\neq0$. Из А1) следует, что решение $(\bar{x},\bar{x}+\bar{z},\bar{z})$ допустимо и оптимально в (2). Но, как было установлено выше, в таком случае $\bar{y}=\bar{x}+\bar{z}$. Единственность решения задачи (2) установлена.

Пусть $(\xi_s,\gamma_s)\longrightarrow(\xi_0,\gamma_0)$ при $s\to\infty$, а $(\bar{x}_s,\bar{y}_s,\bar{z}_s)$ -

решение задачи (2), соответствующей (ξ_s, γ_s), $s = 0, 1, 2, \ldots$ Покажем, что $(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s) \longrightarrow (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$. Предположим, что это не так. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$. В силу $\rho 2)$ множество ξ_0 содержит (x, y). Привлекая свойство ρ I), выберем последовательность $(x_s, y_s) \in \xi_s$, сходящуюся к $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$. Из A5), A8) вытекает, что $\bar{y}_0 > \bar{x}_0$. Тогда можно считать, что $y_s - x_s \geqslant 0$. Элемент $(x_s, y_s, y_s - x_s)$ допустим в задаче (2), соответствующей (ξ_s, γ_s). Имеют место следующие предельные соотношения:

$$\gamma_0(\bar{z}_0) = \lim_{s\to\infty} \gamma_0(y_s - x_s) = \lim_{s\to\infty} [\gamma_s(y_s - x_s) -$$

$$-(\gamma_s(y_s - x_s) - \gamma_0(y_s - x_s))] = \lim_{s\to\infty} \gamma_s(y_s - x_s);$$

$$\gamma_0(\tilde{z}) = \lim_{s\to\infty} \gamma_0(\bar{z}_s) = \lim_{s\to\infty} [\gamma_s(\bar{z}_s) -$$

$$-(\gamma_s(\bar{z}_s) - \gamma_0(\bar{z}_s))] = \lim_{s\to\infty} \gamma_s(\bar{z}_s).$$

Так как $\gamma_s(\bar{z}_s) \geqslant \gamma_s(y_s - x_s)$, то и $\gamma_0(\tilde{z}) \geqslant \gamma_0(\bar{z}_0)$. Это противоречит единственности оптимального решения задачи (2). Лемма доказана

ЗАМЕЧАНИЕ I. Так как множество $W_0 \times C_0$ – компакт, то отображение, сопоставляющее каждому элементу $(\xi, \gamma) \in W_0 \times C_0$ оптимальное решение задачи (2), равномерно непрерывно на $W_0 \times C_0$. На языке $\varepsilon - \delta$ последнее формулируется следующим образом: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, что $\|(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) - (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)\| \leqslant \varepsilon$, как только $\bar{\rho}((\xi_1, \gamma_1), (\xi_2, \gamma_2)) \leqslant \delta$, где $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ – оптимальное решение задачи (2), соответствующей $(\xi_i, \gamma_i) \in W_0 \times C_0$, $i = 1, 2$. В силу A5), A7) компонента $\bar{z}$ в оптимальных решениях задач (2) строго положительна. Из тех же соображений непрерывности компоненты на компакте $W_0 \times C_0$ найдется $\sigma > 0$, $\sigma \in R^n_+$, что $\bar{z} > \sigma$ для всех решений (2) при $(\xi, \gamma) \in W_0 \times C_0$.

Обозначим через $(\bar{x}_{\alpha t}, \bar{y}_{\alpha t}, \bar{z}_{\alpha t})$ решение задачи (2), соответствующей паре $(\Omega_{\alpha t}, u_{\alpha t})$, $\alpha \in L$, $t \geqslant 0$. Из замечания I вытекает, что

$$\|(\bar{x}_{\alpha t}, \bar{y}_{\alpha t}, \bar{z}_{\alpha t}) - (\bar{x}_{\alpha, t+1}, \bar{y}_{\alpha, t+1}, \bar{z}_{\alpha, t+1})\| = O(|\alpha|). \quad (3)$$

§3. Доказательство теоремы

Определим траекторию $X_\alpha(t) = (x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t))_{t=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$x_\alpha(t) = \bar{x}_{\alpha t}, \quad y_\alpha(t) = \bar{y}_{\alpha t}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

$$z_\alpha(0) = \bar{z}_{\alpha 0},$$

$$z_\alpha(t) = \bar{y}_{\alpha, t-1} - \bar{x}_{\alpha t}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

Так как $(x_\alpha(t), y_\alpha(t)) \in Q_{\alpha t}$, то для допустимости траектории в модели α достаточно, чтобы $z_\alpha(t) \geq 0$, $t = 1, 2, \ldots$ В силу (3) и неравенства $\bar{z}_{\alpha t} = \bar{y}_{\alpha t} - \bar{x}_{\alpha t} \geq \sigma > 0$ найдется $\tau_1 > 0$ такое, что $z_\alpha(t) \geq \frac{1}{2}\sigma$ при $|\alpha| \leq \tau_1$. Из определения траектории $X_\alpha(t)$ и из (3) вытекает оценка

$$\|(x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t)) - (x_\alpha(t+1), y_\alpha(t+1), z_\alpha(t+1))\| = O(|\alpha|). \quad (4)$$

В задаче (2), соответствующей $(Q_{\alpha t}, u_{\alpha t})$, $\alpha \in L$, $t \geq 0$, по теореме Куна – Таккера (см. [2], с.78) существует неотрицательный линейный функционал $p_\alpha(t)$ такой, что

$$u_{\alpha t}(\bar{z}_{\alpha t}) + p_\alpha(t)(\bar{y}_{\alpha t} - \bar{x}_{\alpha t} - \bar{z}_{\alpha t}) \geq u_{\alpha t}(z) + p_\alpha(t)(y - x - z), \quad (5)$$

$(x, y) \in Q_{\alpha t}$, $z \geq 0$. Так как $\bar{z}_{\alpha t} > 0$, то $\frac{\partial u_{\alpha t}}{\partial z}(\bar{z}_{\alpha t}) = p_\alpha(t)$.

ЛЕММА 3. Имеют место оценки

$$\|p_\alpha(t)\| \leq p_0, \quad (6)$$

$$|p_\alpha(t) - p_\alpha(t+1)| = O(|\alpha|), \ \alpha \in L, \ t = 0, 1, \ldots, \quad (7)$$

где p_0 – число, не зависящее от выбора $\alpha \in L$, $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (6) следует из представления $p_\alpha(t) = \frac{\partial u_{\alpha t}}{\partial z}(z_{\alpha t})$ и A7). Пусть (7) не имеет места. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательности $\alpha_s \in L$, $t_s \geq 0$, $i_s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $s = 1, 2, \ldots$, такие, что $|\alpha_s| \to 0$ при $s \to \infty$ и

$$\left| \frac{\partial u_{\alpha_s,t_s}}{\partial z^{i_s}}(\bar{z}_{\alpha_s,t_s}) - \frac{\partial u_{\alpha_s,t_{s+1}}}{\partial z^{i_s}}(\bar{z}_{\alpha_s,t_{s+1}}) \right| > \varepsilon .$$

По условию А7) можно выбрать $\delta > 0$ таким, что

$$\left| \frac{\partial u_{\alpha t}}{\partial z^{i}}(z') - \frac{\partial u_{\alpha t}}{\partial z^{i}}(z'') \right| \le \frac{\varepsilon}{4} ,$$

как только $|z'-z''|<\delta,\ \alpha\in L,\ t\ge 0,\ 1\le i\le n$. Справедливо следующее тождество:

$$u_{\alpha_s,t_s}(\bar{z}_{\alpha_s,t_s}+\delta e_{i_s}) - u_{\alpha_s,t_s+1}(\bar{z}_{\alpha_s,t_s+1}+\delta e_{i_s}) =$$

$$= u_{\alpha_s,t_s}(\bar{z}_{\alpha_s,t_s}) - u_{\alpha_s,t_s+1}(\bar{z}_{\alpha_s,t_s+1}) +$$

$$+ \int_0^\delta \left(\frac{\partial u_{\alpha_s,t_s}}{\partial z^{i_s}}(\bar{x}_{\alpha_s,t_s}+\theta e_{i_s}) - \frac{\partial u_{\alpha_s,t_s+1}}{\partial z^{i_s}}(\bar{x}_{\alpha_s,t_s+1}+\theta e_{i_s}) \right) d\theta ,$$

где e_{i_s} - i_s -й единичный орт. При $s\to\infty$ имеем $|u_{\alpha_s,t_s}-u_{\alpha_s,t_s+1}|\to 0,\ \bar{z}_{\alpha_s,t_s}-\bar{z}_{\alpha_s,t_s+1}\to 0$. Ввиду А7), как левая часть равенства, так и сумма первых двух слагаемых правой части стремятся к нулю при $s\to\infty$. Тогда и интеграл должен стремиться к нулю при $s\to\infty$.

Однако

$$\left| \int_0^\delta \frac{\partial u_{\alpha_s,t_s}}{\partial z^{i_s}}(\bar{x}_{\alpha_s,t_s}+\theta e_{i_s}) - \frac{\partial u_{\alpha_s,t_s+1}}{\partial z^{i_s}}(\bar{x}_{\alpha_s,t_s+1}+\theta e_{i_s}) \right) d\theta \Big| \ge \frac{\varepsilon}{2}\delta ,$$

так как в силу выбора δ подынтегральное выражение на $[0,\delta]$ сохраняет знак и по модулю не меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Получено противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Справедлива следующая оценка:

$$-p_\alpha(t)x_\alpha(t)+p_\alpha(t+1)x_\alpha(t+1)+u_{\alpha,t+1}(z_\alpha(t+1))+O(|\alpha|)\ge$$
$$\ge -p_\alpha(t)x+p_\alpha(t+1)(y-z)+u_{\alpha,t+1}(z); \qquad (8)$$
$$(x,y)\in Q_{\alpha t},\quad 0\le z\le y.$$

Согласно лемме последовательность $(p_\alpha(t))$ является характеристикой с точностью до величин порядка малости $O(|\alpha|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$-p_\alpha(t)x_\alpha(t)+p_\alpha(t+1)x_\alpha(t+1)+u_{\alpha,t+1}(z_\alpha(t+1))+p_\alpha(t)x-$$

$$-p_\alpha(t+1)(y-z)-u_{\alpha,t+1}(z)=[u_{\alpha t}(\bar z_{\alpha t})-p_{\alpha t}(y-x-z)-u_{\alpha t}(z)]+$$

$$+[u_{\alpha t}(z)-u_{\alpha,t+1}(z)]+[u_{\alpha,t+1}(z_\alpha(t+1))+u_{\alpha t}(z_\alpha(t+1))]+$$

$$+p_\alpha(t)(x_\alpha(t+1)-x_\alpha(t))+[u_{\alpha t}(z_\alpha(t+1))-u_{\alpha t}(z_\alpha(t))]+$$

$$+[u_{\alpha t}(z_\alpha(t))-u_{\alpha t}(\bar z_{\alpha t})]+(p_\alpha(t)-p_\alpha(t+1))(y-z-x_\alpha(t+1)).$$

Так как в (5) $p_\alpha(t)(\bar y_{\alpha t}-\bar x_{\alpha t}-\bar z_{\alpha t})$ обращается в нуль, то первое слагаемое в правой части предыдущего тождества неотрицательно. Остальные слагаемые правой части тождества имеют порядок малости $O(|\alpha|)$ и в силу равномерной ограниченности технологических множеств, определения функционала $|\alpha|$ и оценок (3), (4), (6), (7). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда существуют числа $\delta(\varepsilon)>0$, $\tau(\varepsilon)>0$ такие, что выполнено следующее свойство. Для всякой модели $\alpha\in L$, $|\alpha|<\tau(\varepsilon)$ и всякого $t>0$ из неравенства

$$max(|x_\alpha(t)-x|,|y_\alpha(t)-y|)>\varepsilon,\quad (x,y)\in\Omega_{\alpha t}$$

следует оценка

$$-p_\alpha(t)x_\alpha(t)+p_\alpha(t+1)x_\alpha(t+1)+u_{\alpha,t+1}(z_\alpha(t+1))\geq$$

$$\geq-p_\alpha(t)x+p_\alpha(t+1)(y-z)+u_{\alpha,t+1}(z)+\delta(\varepsilon),\quad 0\leq z\leq y. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что невозможно подобрать числа $\delta(\varepsilon)$, $\tau(\varepsilon)>0$, при которых справедлива указанная оценка. Тогда существуют последовательности $\alpha_s, t_s, x_s, y_s, z_s$

такие, что

$|\alpha_s| \to 0$ при $s \to \infty$, $\max(|x_{\alpha_s}(t_s) - x_s|, |y_{\alpha_s}(t_s) - y_s|) > \varepsilon$, $(x_s, y_s) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$, $0 \le z_s \le y_s$,

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} [-p_{\alpha_s}(t_s) x_{\alpha_s}(t_s) + p_{\alpha_s}(t_s+1) x_{\alpha_s}(t_s+1) + u_{\alpha_s, t_s+1}(z_{\alpha_s}(t_s+1)) + p_{\alpha_s}(t_s) x_s - p_{\alpha_s}(t_s+1)(y_s - x_s) - u_{\alpha_s, t_s+1}(z_s)] \le 0. \qquad (10)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что возможны два случая:

1) $|x_{\alpha_s}(t_s) - x_s| \ge \varepsilon$, $s = 1, 2, \ldots$,

2) $|y_{\alpha_s}(t_s) - y_s| \ge \varepsilon$, $s = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим первый случай. Так как $(x_{\alpha_s}(t_s), y_{\alpha_s}(t_s)) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$, $(x_s, y_s) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$, то из A4) следует, что

$$\left(\frac{x_{\alpha_s}(t_s) + x_s}{2} - v_s, \ \frac{y_{\alpha_s}(t_s) + y_s}{2} \right) \in \Omega_{\alpha_s, t_s}$$

для всякого $v_s \ge 0$, $|v_s| = \delta_2(\varepsilon)$. Пусть v параллелен вектору $p_{\alpha_s}(t_s)$. Тогда, применяя (6), (10), имеем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \Big[-p_{\alpha_s}(t_s) x_{\alpha_s}(t_s) + p_{\alpha_s}(t_s+1) x_{\alpha_s}(t_s+1) + u_{\alpha_s, t_s+1}(z_{\alpha_s}(t_s+1)) + p_{\alpha_s}(t_s) \left(\frac{x_{\alpha_s}(t_s) + x_s}{2} - v_s \right) - p_{\alpha_s}(t_s+1) \frac{x_{\alpha_s}(t_s+1) + y_s - z_s}{2} - u_{\alpha_s, t_s+1}\left(\frac{z_{\alpha_s}(t_s+1) + z_s}{2} \right)\Big] \le$$

$$\le \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{2} [-p_{\alpha_s}(t_s) x_{\alpha_s}(t_s) + p_{\alpha_s}(t_s+1) x_{\alpha_s}(t_s+1) + u_{\alpha_s, t_s+1}(z_{\alpha_s}(t_s+1)) + p_{\alpha_s}(t_s) x_s - p_{\alpha_s}(t_s+1)(y_s - z_s) -$$

$$-u_{\alpha_s,t_s}(z_s) - 2p_{\alpha_s}(t_s)v_s] \le -\sigma_1\delta_2(\varepsilon).$$

Последнее противоречит оценке (8). Для случая I) лемма доказана. Аналогично устанавливается справедливость леммы для случая 2. Лемма доказана.

Пусть $(\bar{x}_\alpha(t), \bar{y}_\alpha(t), \bar{z}_\alpha(t))$ – оптимальная траектория, исходящая из состояния $(x_\alpha(0), y_\alpha(0), z_\alpha(0))$. Введем обозначения

$$\pi_\alpha(t) = -p_\alpha(t)x_\alpha(t) + p_\alpha(t+1)x_\alpha(t+1) + u_{\alpha,t+1}(z_\alpha(t+1)),$$

$$\bar{\pi}_\alpha(t) = -p_\alpha(t)\bar{x}_\alpha(t) + p_\alpha(t+1)\bar{x}_\alpha(t+1) + u_{\alpha,t+1}(\bar{z}_\alpha(t+1)).$$

ЛЕММА 5. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\tau > 0$, зависящее от ε и обладающее следующим свойством: для любой модели $\alpha \in L$, $|\alpha| \le \tau$ существует бесконечное число моментов времени, для которых

$$\max(|\bar{x}_\alpha(t) - x_\alpha(t)|, |\bar{y}_\alpha(t) - y_\alpha(t)|) \le \varepsilon. \qquad \text{(II)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда существует последовательность α_s, $s = 1, 2, \ldots$, такая, что $|\alpha_s| \to 0$, $s \to \infty$ и неравенство (II) выполняется для конечного числа точек t во всякой модели α_s, $s = 1, 2, \ldots$. По предыдущей лемме существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и целое $s_0 > 0$ такие, что $\pi_{\alpha_s}(t) \ge \bar{\pi}_{\alpha_s}(t) + \delta(\varepsilon)$, как только

$$\max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t) - x_{\alpha_s}(t)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t) - y_{\alpha_s}(t)|) > \varepsilon, \quad s > s_0.$$

Зафиксируем $s > s_0$. Пусть N_s – множество точек t, для которых выполнено (IO), $|N_s|$ – число таких точек, а t_s – наибольшая из таких точек. Для $T > t_s$ имеем

$$\sum_{t=1}^{T-1} u_{\alpha_s,t}(\bar{z}_{\alpha_s}(t)) - \sum_{t=1}^{T-1} u_{\alpha_s,t}(z_{\alpha_s}(t)) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1}(\bar{\pi}_{\alpha_s}(t) - \pi_{\alpha_s}(t)) - p_{\alpha_s}(T)\bar{x}_{\alpha_s}(T) + p_{\alpha_s}(T)x_{\alpha_s}(T) \le$$

$$\leqslant -(T-|N_s|)\delta(\varepsilon)+\sum_{t\in N_s}(\bar{\pi}_{\alpha_s}(t)-\bar{\pi}_{\alpha_s}(t))+p_{\alpha_s}(T)x_{\alpha_s}(T).$$

В силу A1), A7), A8), (6), величины $\sum_{t\in N_s}(\bar{\pi}_{\alpha_s}-\pi_{\alpha_s}(t))+$ $+p_{\alpha_s}(T)x_{\alpha_s}(T)$ ограничены равномерно по T. Поэтому

$$\varliminf_{T\to\infty}\left(\sum_{t=1}^{T}u_{\alpha_s,t}(\bar{z}_{\alpha_s}(t))-\sum_{t=1}^{T}u_{\alpha_s,t}(z_{\alpha_s}(t))\right)=-\infty.$$

Это противоречит оптимальности траектории $(\bar{x}_{\alpha_s}(t),\bar{y}_{\alpha_s}(t),$ $\bar{z}_{\alpha_s}(t))$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда существуют $\tau>0$, целое $M>0$, зависящие от ε и обладающие следующим свойством. Пусть $\alpha\in L$, $|\alpha|\leqslant\tau$, а множество $\{t_1^\alpha=0,t_2^\alpha,t_3^\alpha,\dots\}$ – упорядоченное по возрастанию множество всех таких точек t, для которых

$$\max(\|\bar{x}_\alpha(t)-x_\alpha(t)\|,\|\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t)\|)\leqslant\varepsilon.$$

Тогда это множество бесконечно и $t_{s+1}^\alpha-t_s^\alpha<M$, $s=0,1,2,\dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было установлено, что $z_\alpha(t)\geqslant\frac{1}{2}\sigma$, $t\geqslant0$, $|\alpha|\leqslant\tau_1$, где $\tau_1>0$ – некоторое число. Пусть ε_0 такое число, что для всех t, $\alpha\in L$, $|\alpha|\leqslant\tau_1$ выполнено следующее свойство: из того, что

$$\max(\|\bar{x}_\alpha(t)-x_\alpha(t)\|,\|\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t)\|)\leqslant\varepsilon_0,$$

следует

$$\bar{y}_\alpha(t)-x_\alpha(t+1)\geqslant0,\quad t=0,1,\dots$$

$$y_\alpha(t-1)-\bar{x}_\alpha(t)\geqslant0,\quad t=1,2,\dots\tag{12}$$

Возможность выбора ε_0 следует из представлений

$$\bar{y}_\alpha(t)-x_\alpha(t+1)=y_\alpha(t)-x_\alpha(t+1)+\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t)=z_\alpha(t)+\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t),$$

$$y_\alpha(t-1)-\bar{x}_\alpha(t)=y_\alpha(t-1)-x_\alpha(t)+x_\alpha(t)-\bar{x}_\alpha(t)=z_\alpha(t)+x_\alpha(t)-\bar{x}_\alpha(t)$$

и неравенства $x_\alpha(t) \geq \frac{1}{2}\sigma, \quad t=0,1,\ldots$

Положим $\varepsilon_1 = min(\varepsilon, \varepsilon_0)$. Тогда достаточно доказать лемму для ε_1. Предположим, что лемма не верна. Тогда существуют последовательности $\{\alpha_s\}, \{t_s^1\}, \{t_s^2\}, s=1,2,\ldots$, такие, что $|\alpha_s| \to 0$, $t_s^2 - t_s^1 \to \infty$ при $s \to \infty$ и, кроме того,

$$max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1) - x_{\alpha_s}(t_s^1)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^1) - y_{\alpha_s}(t_s^1)|) \leq \varepsilon_1,$$

$$max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2) - x_{\alpha_s}(t_s^2)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^2) - y_{\alpha_s}(t_s^2)|) \leq \varepsilon_1,$$

$$max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t) - x_{\alpha_s}(t)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t) - y_{\alpha_s}(t)|) > \varepsilon_1, \quad t_s^1 < t < t_s^2.$$

Определим траекторию $(\tilde{x}_{\alpha_s}(t), \tilde{y}_{\alpha_s}(t), \tilde{z}_{\alpha_s}(t))$ следующим образом:

$$(\tilde{x}_{\alpha_s}(t), \tilde{y}_{\alpha_s}(t), \tilde{z}_{\alpha_s}(t)) = \begin{cases} (\bar{x}_{\alpha_s}(t), \bar{y}_{\alpha_s}(t), \bar{z}_{\alpha_s}(t)), & t \leq t_s, \\ (x_{\alpha_s}(t_s^1+1), y_{\alpha_s}(t_s^1+1), \bar{y}_{\alpha_s}(t) - x_{\alpha_s}(t_s^1+1)), & t = t_s^1+1, \\ (x_{\alpha_s}(t), y_{\alpha_s}(t), z_{\alpha_s}(t)), & t_s^1+2 \leq t \leq t_s^2-1, \\ (\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2), \bar{y}_{\alpha_s}(t_s^2), y_{\alpha_s}(t_s^2-1) - \bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2)), & t = t_s^2, \\ (\bar{x}_{\alpha_s}(t), \bar{y}_{\alpha_s}(t), \bar{z}_{\alpha_s}(t)), & t > t_s^2 \end{cases} \tag{13}$$

Так как траектория $(\bar{x}_{\alpha_s}(t), \bar{y}_{\alpha_s}(t), \bar{z}_{\alpha_s}(t))$ оптимальна, а траектория $(\tilde{x}_{\alpha_s}(t), \tilde{y}_{\alpha_s}(t), \tilde{z}_{\alpha_s}(t))$ допустима, то должно выполняться неравенство

$$\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2} u_{\alpha_s,t}(\tilde{z}_{\alpha_s}(t)) \leq \sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2} u_{\alpha_s,t}(\bar{z}_{\alpha_s}(t))$$

С другой стороны,

$$\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2} (u_{\alpha_s,t}(\tilde{z}_{\alpha_s}(t)) - u_{\alpha_s,t}(\bar{z}_{\alpha_s}(t))) =$$

$$= -\rho_{\alpha_s}(t_s^1)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1)+\rho_{\alpha_s}(t_s^1+1)x_{\alpha_s}(t_s^1+1)+u_{\alpha_s,t_s^1+1}(y_{\alpha_s}(t_s^1)-x_{\alpha_s}(t_s^1+1))+$$

$$+\rho_{\alpha_s}(t_s^1)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1)-\rho_{\alpha_s}(t_s^1+1)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1+1)-u_{\alpha_s,t_s^1+1}(\bar{z}_{\alpha_s}(t_s^1+1))+$$

$$+\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2-2}(\pi_{\alpha_s}(t)-\bar{\pi}_{\alpha_s}(t))-\rho_{\alpha_s}(t_s^2-1)\,x_{\alpha_s}(t_s^2-1)+$$

$$+\rho_{\alpha_s}(t_s^2)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2)+u_{\alpha_s,t_s^2}(y_{\alpha_s}(t_s^2-1)-\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2))+$$

$$+\rho_{\alpha_s}(t_s^2-1)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2-1)-\rho_{\alpha_s}(t_s^2)\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2)-u_{\alpha_s,t_s^2}(\bar{z}_{\alpha_s}(t_s^2)). \qquad (14)$$

По лемме 4 для достаточно малых $|\alpha_s|$ (для достаточно больших s) справедлива оценка

$$\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2-2}(\bar{\pi}_{\alpha_s}(t)-\bar{\bar{\pi}}_{\alpha_s}(t)) \geq (t_s^2-t_s^1-2)\,\delta(\varepsilon_1),\quad \delta(\varepsilon_1)>0.$$

Так как $t_s^2-t_s^1-2\longrightarrow\infty$ при $s\longrightarrow\infty$, то $\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2-2}(\pi_{\alpha_s}(t)-\bar{\bar{\pi}}_{\alpha_s}(t))\longrightarrow\infty$ при $s\to\infty$. Так как величины $\rho_{\alpha_s}(t)$, $x_{\alpha_s}(t)$, $y_{\alpha_s}(t)$, $\bar{x}_{\alpha_s}(t)$, $\bar{y}_{\alpha_s}(t)$ ограничены равномерно по $\alpha\in L$, $t\geq 0$, то левая часть (14) неограниченно возрастает при $s\to\infty$. Это противоречит оптимальности траектории $(\bar{x}_{\alpha_s}(t), \bar{y}_{\alpha_s}(t), \bar{z}_{\alpha_s}(t))$.
Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда существует $\tau>0$, зависящее от ε и обладающее следующим свойством: для всякой модели $\alpha\in L$, $|\alpha|\leq\tau$ выполнено неравенство

$$max(|\bar{x}_\alpha(t)-x_\alpha(t)|, |\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t)|)<\varepsilon,\quad t\geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей лемме, можно предполагать, что $\varepsilon<\varepsilon_1$. Предположим, что лемма не имеет места. Положим: $\varepsilon_2 = \dfrac{\delta(\varepsilon)}{3(\sigma_1 + K_1)}$, где $K_1 = \sup\limits_{\substack{|z|\le K \\ \alpha\in L,\, t>0}} \left| \dfrac{\partial u_{\alpha t}(z)}{\partial z} \right| < \infty$

в силу A7). По лемме 6 существуют $\tau_2 > 0$ и $T > 0$, что во всякой модели $\alpha \in L$, $|\alpha| \le \tau_2$ упорядоченное множество всех точек $\{ t_1^\alpha = 0, t_2^\alpha, t_3^\alpha, \ldots \}$, в которых

$$\max(|\bar{x}_\alpha(t) - x_\alpha(t)|, |\bar{y}_\alpha(t) - y_\alpha(t)|) \le \varepsilon_2$$

-бесконечное множество, причем $x_{s+1}^\alpha - x_s^\alpha < T$, $s = 1, 2, \ldots$

Так как лемма, по предположению, не имеет места, то существуют последовательности $\{\alpha_s\}, \{t_s\}, \{t_s^1\}, \{t_s^2\}$, $s = 1, 2, \ldots$, такие, что $|\alpha_s| \to 0$ при $s \to \infty$, $t_s^1 \le t_s \le t_s^2$, $t_s^2 - t_s^1 < T$ и, кроме того,

$$\max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1) - x_{\alpha_s}(t_s^1)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^1) - y_{\alpha_s}(t_s^1)|) \le \varepsilon_2,$$

$$\max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2) - x_{\alpha_s}(t_s^2)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^2) - y_{\alpha_s}(t_s^2)|) \le \varepsilon_2,$$

$$\max(|\bar{x}_{\alpha_s}(t_s) - x_{\alpha_s}(t_s)|, |\bar{y}_{\alpha_s}(t_s) - y_{\alpha_s}(t_s)|) \ge \varepsilon.$$

Определим траектории $(\tilde{x}_{\alpha_s}(t), \tilde{y}_{\alpha_s}(t), \tilde{z}_{\alpha_s}(t))$ по формуле (I3) применительно к определенным в настоящей лемме последовательностям $\{t_s^1\}, \{t_s^2\}$. Так как траектория $(\bar{x}_{\alpha_s}(t), \bar{y}_{\alpha_s}(t), \bar{z}_{\alpha_s}(t))$ оптимальна, то левая часть (I4) не должна быть положительной. Оценим правую часть (I4). По леммам 3, 4

$$\sum_{t=t_s^1+1}^{t_s^2-2} (\pi_{\alpha_s}(t) - \bar{\pi}_{\alpha_s}(t)) \ge -(T-2)\,O(|\alpha_s|) + \delta(\varepsilon).$$

Остальные слагаемые левой части (I4) перепишем в следующем виде:

$$\pi_{\alpha_s}(t_s^1) + p_{\alpha_s}(t_s^1)(x_{\alpha_s}(t_s^1) - \bar{x}_{\alpha_s}(t_s^1)) +$$

$$+ u_{\alpha_s, t_s^1+1}(\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^1) - x_{\alpha_s}(t_s^1+1)) - u_{\alpha_s, t_s^1+1}(y_{\alpha_s}(t_s^1) - x_{\alpha_s}(t_s^1+1)) -$$

$$-\bar{\pi}_{\alpha_s}(t_s^1)+\pi_{\alpha_s}(t_s^2-1)+p_{\alpha_s}(t_s^2)(\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2)-x_{\alpha_s}(t_s^1))+$$

$$+u_{\alpha_s,t_s^2}(y_{\alpha_s}(t_s^2-1)-\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2))-$$

$$-u_{\alpha_s,t_s^2}(y_{\alpha_s}(t_s^2-1)-x_{\alpha_s}(t_s^2))-\bar{\pi}_{\alpha_s}(t_s^2-1).$$

По лемме 3

$$\pi_{\alpha_s}(t)-\bar{\pi}_{\alpha_s}(t)\geq -o(|\alpha_s|),\quad t=t_s^1,t_s^2-1.$$

Из (6) вытекает оценка

$$|p_{\alpha_s}(t)(x_{\alpha_s}(t)-x_{\alpha_s}(t))|\leq \sigma_1\cdot\varepsilon_2,\quad t=t_s^1,t_s^2-1.$$

Из определения величины K_1

$$|u_{\alpha_s,t_s^1+1}(\bar{y}_{\alpha_s}(t_s^1)-x_{\alpha_s}(t_s^1+1))-u_{\alpha_s,t_s^1+1}(y_{\alpha_s}(t_s^1)-x_{\alpha_s}(t_s^1+1))|\leq K_1\varepsilon_2,$$

$$|u_{\alpha_s,t_s^2}(y_{\alpha_s}(t_s^2-1)-\bar{x}_{\alpha_s}(t_s^2))-u_{\alpha_s,t_s^2}(y_{\alpha_s}(t_s^2-1)-x_{\alpha_s}(t_s^2))|\leq K_1\varepsilon_2.$$

Итак, должно выполняться неравенство

$$-T\cdot o(|\alpha_s|)+\delta(\varepsilon)-2(\sigma_1+K_1)\varepsilon_2\leq 0.$$

Переходя к пределу при $s\to\infty$, имеем

$$\delta(\varepsilon)-2(\sigma_1+K_1)\varepsilon_2\leq 0,\quad\text{или}\quad \varepsilon_2\geq\frac{\delta(\varepsilon)}{2(\sigma_1+K_1)}.$$

Это противоречит определению ε_2. Лемма доказана.

Из последней леммы вытекает справедливость сформулированной теоремы. Действительно, учитывая монотонность функций $u_{\alpha t}(z)$, можем считать, что $\bar{z}_\alpha(t+1)=\bar{y}_\alpha(t)-x_\alpha(t+1)$, $t=1,2,\ldots$ Так как $z_\alpha(t+1)=y_\alpha(t)-x_\alpha(t+1)$, то в силу леммы 7

$$\max(|\bar{x}_\alpha(t)-x_\alpha(t)|,|\bar{y}_\alpha(t)-y_\alpha(t)|,|\bar{z}_\alpha(t)-z_\alpha(t)|)\to 0 \quad (15)$$

при $|\alpha|\to 0$ равномерно по t.

Из (3) и определения траектории $\chi_\alpha(t)=(x_\alpha(t),y_\alpha(t),z_\alpha(t))$ следует

$$\chi_\alpha/_0\to 0\quad\text{при}\quad|\alpha|\to 0.$$

Отсюда и из (I5)

$$|\bar{x}_\alpha|_0 \to 0 \qquad \text{при} \qquad |\alpha| \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. GALE D. On optimal development in a multisector economy.- Rev. Econ. Studies, 34, N1, 1967, p.1-18.
2. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972.
3. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
4. ДАНИЛОВ В.И. Оптимальное развитие экономики с переменной технологией. - В кн.: Методы функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, 1978, с.3-22.
5. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. Равновесные траектории экономического роста. - В кн.: Методы функционального анализа в математической экономике. - М.: Наука, 1978, с.56-97.
6. ЕВСТИГНЕЕВ И.А., КАТЫШЕВ П.К. Нестационарные оптимизационные модели экономической динамики. - В кн.: Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1982, с.48-71.
7. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.06.1982 г.