УДК 330.115

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОПРОДУКТОВЫХ МОДЕЛЯХ

К.Ю.Борисов

I. Рассмотрим модель экономической динамики, описанную в [I] (там же содержатся доказательства всех утверждений, приведенных в этом пункте).

Пусть на $R_+^n$ определено многозначное отображение $a$ :

$$a(x)=\langle 0, Ax\rangle + F(x)\xi,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} \nu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nu_n \end{pmatrix}, \quad 0\leqslant \nu_i \leqslant 1 \quad (i=1,2,\dots,n),$$

$$\xi=\{x\in R_+^n / ln\leqslant 1\}, \quad l\in \operatorname{int} R_+^n,$$

$F$ - суперлинейный (т.е. вогнутый и положительно однородный) функционал, определенный на $R_+^n$ . Из определения видно, что отображение $a$ задает модель Неймана - Гейла $\mathfrak{X}$ .

Приведем пример модели $\mathfrak{X}$ . Пусть некоторая односекторная экономика определяется производственной функцией $F(K,L)$ (где $K$ - количество основных фондов, $L$ - количество рабочей силы), коэффициентом выбытия фондов $\mu$ $(0<\mu<1)$ и ставкой заработной платы $\omega$ . Имея к началу некоторого периода $\bar K>0$ единиц основных фондов и $\bar L>0$ единиц рабочей силы, за период можно произвести продукции в размере $F(\bar K,\bar L)$ в денежном выражении. Эту продукцию можно распределить на капиталовложения $\Delta K$ и приобретение рабочей силы по ставке $\omega$ . В итоге к началу следующего периода можно получить всевозможные сочетания $K \geq 0,\ L \geq 0$ , удовлетворяющие условиям

$$K \leq (1-\mu)\bar{K} + \Delta K, \quad \Delta K + \omega L \leq F(\bar{K}, \bar{L}).$$

Определим

$$\psi(x) = max\{ly / y \in a(x)\} = lAx + F(x).$$

Для приведенного примера функцию $\psi(K,L) = (1-\mu)K + F(K,L)$ можно интерпретировать как национальное богатство на конец периода, если в начале периода экономика находилась в состоянии $(K,L)$ .

ТЕОРЕМА I. Значение $\alpha$ задачи выпуклого программирования

$$\psi(x) \longrightarrow max, \quad x \in R^n_+, \quad lx \leq 1 \tag{I}$$

является неймановским темпом роста модели $\mathcal{Z}$ , решение $\bar{x}$ этой задачи - неймановским равновесным вектором, $l$ - неймановскими равновесными ценами.

Далее, для простоты, будем предполагать, что решение $x$ задачи (I) строго положительно и единственно. Тогда, как легко видеть, значение $\alpha$ задачи (I) является строгим темпом роста модели $\mathcal{Z}$ .

ЛЕММА I. Множество $G = \{x \in int\, R^n_+ / \psi(x)\bar{x} \geq Ax\}$ является телесным конусом, причем $\bar{x}$ - внутренняя точка этого конуса.

Пусть $q$ - эффективный функционал модели $\mathcal{Z}$ , т.е.

$$max\{q(y) / y \in a(x)\} = \alpha q(x) \quad (x \in R^n_+), \tag{2}$$

нормированный условием $q(\bar{x}) = 1$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\alpha q(x) \leq \psi(x) \ (x \in R^n_+), \quad \alpha q(x) = \psi(x) \ (x \in G).$$

Эти соотношения представляют интерес по следующим соображениям. Для любой траектории $\{x^t\}_0^\infty$ модели $\mathcal{Z}$ , в силу (2), выполняются соотношения

$$q(x^0) \geq \alpha^{-1} q(x^1) \geq \ldots \geq \alpha^{-t} q(x^t) \geq \ldots$$

В то же время из любой точки $\bar{x}^{\circ}$ исходит траектория $\{\bar{x}^{t}\}_{0}^{\infty}$ такая, что

$$q(\bar{x}^{0})=\alpha^{-1}q(\bar{x}^{1})=\ldots=\alpha^{-t}q(\bar{x}^{t})=\ldots$$

Такие траектории называются оптимальными в смысле $q$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть точка $x\in R^{n}_{+}$ такова, что $q(x)>0$. Тогда оптимальная в смысле $q$ траектория, исходящая из $x$, является эффективной траекторией.

В нашей модели $\mathfrak{X}$ при $x\in\sigma$ точка $\bar{y}\in a(x)$ такая, что $q(\bar{y})=max\{q(y)/y\in a(x)\}$, находится на неймановском равновесном луче. А это означает, что оптимальная в смысле $q$ траектория, исходящая из $x\in\sigma$, за один шаг выходит на магистраль и там остается. Для примера модели $\mathfrak{X}$, приведенного выше, это означает, что если начальное состояние $(K,L)$ находится в некоторой конической окрестности неймановского равновесного луча, то для построения эффективной траектории достаточно, например, на каждом шаге максимизировать национальное богатство.

2. В этом пункте нас будут интересовать траектории модели $\mathfrak{X}$, исходящие из точек, не принадлежащих, вообще говоря, множеству $\sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. $x\notin\sigma\Rightarrow\alpha q(x)\neq\psi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $X=\{x\in R^{n}_{+}/\psi(x)=1\}$. Из построения отображения $a$ и функционала $\psi$ имеем, что $ly=1$ только для таких $y\in a(x)$ при $x\in X$, что $y\geqslant Ax$. А это значит, что если $\bar{x}\in a(x), x\in X$, то $x\in\sigma$. Если же $x\notin\sigma, x\in X$, то $\bar{x}\notin a(x)$, и так как $a(x)\subset$

$$\subset\{y\in R^{n}_{+}/ly<1\}\quad\text{и}\quad max\{\psi(y)/y\in R^{n}_{+}, ly\leqslant 1\}$$

достигается в единственной точке $\bar{x}$, имеем

$$max\{\psi(y)/y\in a(x)\}<\alpha=\alpha\psi(x).$$

Значит, $\psi(x)\neq\alpha q(x)$. Для завершения доказательства напомним, что функционалы $\psi$ и $q$ однородны.

СЛЕДСТВИЕ. Функционал $\psi$ не является, вообще говоря, эффективным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $\{x^{\tau}\}_0^T$ ( $T$ либо конечно, либо бесконечно) называется локально-оптимальной в смысле функционала $f$ , если

$$f(x^{\tau}) = max\{f(x)/x \in a(x^{\tau-1})\}, \quad \tau = 1,2,\ldots,T,$$

и $x^{\tau}$ лежит на эффективной границе множества $a(x^{\tau-1})$, $i = 1,2,\ldots,T$.

Для существования локально-оптимальных в смысле $f$ траекторий в модели $\mathfrak{X}$ достаточно, например, чтобы функционал $f$ был монотонно неубывающим.

В связи со следствием к предложению I и предложенной экономической интерпретацией функционала $\psi$ представляет интерес выяснить, когда локально-оптимальные в смысле $\psi$ траектории эффективны.

Определим $b(x) = \{y \in R_+^n / ly = lAx + F(x)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $n=2$ , то локально-оптимальная в смысле $\psi$ траектория $\{x^{\tau}\}_0^{\infty}$ эффективна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n=2$ множество $b(x^{\tau})$, $\tau = 0,1,2,\ldots$, является отрезком, ибо $l \in int\, R_+^2$ . По лемме I на таком отрезке функционал $\psi$ и эффективный функционал $q$ достигают максимума в одной точке. Из этого и вогнутости функционалов $q$ и $\psi$ они достигают максимума на отрезке $a(x^{\tau}) \cap b(x^{\tau})$, $\tau = 0,1,\ldots$ , т.е. на эффективной границе множества $a(x^{\tau})$ , $\tau = 0,1,\ldots$ , - тоже в одной точке. Следовательно, траектория, локально-оптимальная в смысле $\psi$ , является оптимальной в смысле $q$ и по теореме 2 эффективной.

Приведем числовой пример, который показывает, что предложение 2 нельзя распространить даже на трехмерный случай. Этот пример основан на следующем соображении. В трехмерном случае множества $b(x)$, $x \in R_+^n$, являются двухмерными симплексами и локально-оптимальная траектория $\{\bar{x}^{\tau}\}_0^T$ , двигаясь по симплексам $b(\bar{x}^{\tau})$, $\tau = 1,2,\ldots,T$ , может выйти на магистраль (если вообще выйдет) уже не самым коротким путем, как это было при движении по отрезкам.

Пусть $F(x) = \min\limits_i c_i x$, $i=1,2,3$, где $c_1$ =(20, I6, 0), $c_2$ =(0, 8, I2), $c_3$ =(5, 4, I2), $l$ =(200,200,300),

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

Если $A$ единичная, то $lAy=ly$, а значит, на $b(x)$ функция $lAy$ постоянна, и локально-оптимальной в смысле $\psi$ траекторией является траектория, локально-оптимальная в смысле $F$.

В таблице приведены локально-оптимальная в смысле $F$ траектория $\{\bar{x}^{\tau}\}_0^3$ и траектория $\{x^{\tau}\}_0^3$, не являющаяся локально-оптимальной и исходящая из $x^0=\bar{x}^0$. Уже на третьем шаге траектория $\{x^{\tau}\}_0^3$ выходит на магистраль, причем

| $\tau$ | $\bar{x}^{\tau}$ | | | $F(\bar{x}^{\tau})$ | $x^{\tau}$ | | | $F(x^{\tau})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | I2 | I0 | 30 | 400 | I2 | I0 | 30 | 400 |
| I | I4 | I0 | 30 | 440 | I2 | I2 | 30 | 432 |
| 2 | I4 | I2,2 | 30 | 457,6 | I2 | I4,6 | 30 | 466,56 |
| 3 | I4 | I4,488 | 30 | 475,904 | I2,2458 | I5,3II | 30,622 | 489,952 |

$lx^3>l\bar{x}^3$ ($lx^3$ =I4698,56; $l\bar{x}^3$ =I4697,6). Если продолжить траекторию $\{\bar{x}^{\tau}\}_0^3$ оптимально, то [I] в некоторый момент $t$ она выйдет на магистраль. Однако если и траекторию $\{x^{\tau}\}_0^3$ продолжить оптимально, то она останется на магистрали, причем будут выполняться соотношения $x^{\tau}\gg\bar{x}^{\tau}$, $\tau=t, t+1, \ldots$

Здесь следует отметить следующее. Условие двумерности в предложении 2 является крайне сильным. Однако двухфакторные (фонды и рабочая сила) производственные функции являются очень распространенными. Приведенный только что пример показывает, что если и в моделях размерности более двух интерпретировать функционал $\psi$ как национальное богатство (что представляется допустимым), то максимизация на каждом шаге национального богатства может, вообще говоря, и не привести к построению эффективной траектории. А из этого следует, что при агрегировании мы можем потерять некоторую довольно существенную информацию.

3. В этом пункте откажемся от однородности функционала $F$ (пусть он будет выпуклым, монотонным, не достигающим на $R_+^n$ максимума), а матрицу $A$ возьмем единичной. В этом

случае отображение $a$ не является, вообще говоря, суперлинейным и выглядит следующим образом:

$$a(x) = \{y \in R_+^n / l(y-x) \leq F(x)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечная траектория $\{x^\tau\}_0^T$ называется оптимальной, если

$$F(x^T) = \max\{F(x) / x \in a^T(x^0)\},$$

где

$$a^0(x) = \{x\},\ a^t(x) = \bigcup_{y \in a^{t-1}(x)} a(y),\quad t = 1, 2, \ldots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность $\{p^\tau\}_1^T$ элементов $R_+^n$ порождена локально-оптимальной траекторией $\{x^\tau\}_0^T$, если в соответствии с необходимыми и достаточными условиями экстремума

$$p^\tau \in \partial F(x^\tau),\ p^\tau x^\tau = \max\{p^\tau x / x \in a(x^{\tau-1})\},\ \tau = 1, 2, \ldots, T$$

(здесь $\partial F(x)$ - субдифференциал функции в точке $x$ ).

Прежде чем сформулировать результаты этого пункта, сформулируем две очевидные леммы. Обозначим

$$N(p) = \{i \in 1:n / p_i/l_i \geq p_j/l_j \ \forall j \in 1:n\}.$$

Лемма 2. Пусть $p \in R_+^n$. Для того чтобы линейный функционал $p$ достигал своего максимума на множестве $a(\bar{x}) \cap b(\bar{x})$ в точке $\hat{x}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\hat{x} \geq \bar{x}$, по координатам $i \notin N(p)$ выполнялось $\hat{x}_i = \bar{x}_i$, а приращения по координатам $i \in N(p)$ были такими, что

$$\sum_{i \in N(p)} l_i(\hat{x}_i - \bar{x}_i) = F(\bar{x}).$$

ЛЕММА 3. Пусть $p \in R_+^n$. Если $p\hat{x} \geq px$ и $F(\hat{x}) \geq F(x)$, то $\max\{py / y \in a(\hat{x})\} \geq \max\{py / y \in a(x)\}$, причем если $p\hat{x} > px$ или $F(\hat{x}) > F(x)$, то $\max\{py / y \in a(\hat{x})\} > \max\{py / y \in a(x)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность $\{p^\tau\}_1^T$ элементов $R_+^n$ удовлетворяет условию (*), если

$$N(\rho^{\tau_1}) \subset N(\rho^{\tau_2}) \text{ при } 1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T. \qquad (*)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть из точки $\hat{x}^0$ исходит локально-оптимальная в смысле $F$ траектория $\{\hat{x}^\tau\}_0^T$, которая порождает последовательность $\{\rho^\tau\}_1^T$, удовлетворяющую условию (*). Тогда траектория $\{\hat{x}^\tau\}_0^T$ оптимальна и всякая оптимальная траектория $\{x^\tau\}_0^T$, исходящая из точки $x^0 = \hat{x}^0$, локально-оптимальна в смысле $F$.

Докажем по индукции по $t \in 1:T$, что траектория $\{\hat{x}^\tau\}_0^t$ оптимальна, причем $F(\hat{x}^t) > F(x^t)$ для траектории $\{x^\tau\}_0^t$ $x^0 = \hat{x}^0$, не являющейся локально-оптимальной.

Для $t = 1$ это справедливо. Пусть доказали это утверждение для всех $t < t_1$ при некотором $t_1 \leq T$. Докажем его для $t = t_1$. Имеем $\rho^\tau \hat{x}^\tau = max\{\rho^\tau x / x \in a(\hat{x}^{\tau-1})\}$ $\tau = 1,2,\ldots,t_1$. По лемме 2 $\hat{x}^\tau \geq \hat{x}^{\tau-1}$, $\sum_{i \in N(\rho^\tau)} l_i(\hat{x}_i^\tau - \hat{x}_i^{\tau-1}) = F(\hat{x}^{\tau-1})$, $\hat{x}_i^\tau = \hat{x}_i^{\tau-1}$ при $i \notin N(\rho^\tau)$, $\tau = 1,2,\ldots,t_1$. Так как по условию (*)

$$N(\rho^\tau) \subset N(\rho^{t_1}), \quad \tau = 1,2,\ldots,t_1,$$

то $\hat{x}^\tau \geq \hat{x}^{\tau-1}$, $\sum_{i \in N(\rho^{t_1})} l_i(\hat{x}_i^\tau - \hat{x}_i^{\tau-1}) = F(\hat{x}^{\tau-1})$, $\hat{x}_i^\tau = \hat{x}_i^{\tau-1}$ при $i \notin N(\rho^{t_1})$, $\tau = 1,2,\ldots,t_1$, из чего по лемме 2 получаем

$$\rho^{t_1} x^\tau = max\{\rho^{t_1} x / x \in a(\hat{x}^{\tau-1})\}, \quad \tau = 1,2,\ldots,t_1. \qquad (3)$$

С другой стороны, по индукционному предположению имеем

$$F(\hat{x}^\tau) \geq F(x^\tau), \quad \tau = 1,2,\ldots,t_1 - 1, \qquad (4)$$

для любой траектории $\{x^\tau\}_0^{t_1}$, $x^0 = \hat{x}^0$. Из (3) и (4) последовательным по $\tau$ применением леммы 3 получаем

$$\rho^{t_1} \hat{x}^\tau \geq \rho^{t_1} x^\tau \; (\tau = 1,2,\ldots,t_1). \qquad (5)$$

Значит, $\rho^{t_1} \hat{x}^{t_1} = max\{\rho^{t_1} x / x \in a^{t_1}(\hat{x}^0)\}$. А так как $\rho^{t_1} \in \partial F(\hat{x}^{t_1})$, то в силу необходимых и достаточных условий оптимальности

$$F(\hat{x}^{t_1}) = max\{F(x) / x \in a^{t_1}(\hat{x}^0)\},$$

т.е. траектория $\{\hat{x}^\tau\}_0^{t_1}$ оптимальна.

Пусть траектория $\{x^\tau\}_0^{t_1}$, $x^0=\hat{x}^0$, не оптимальна, т.е. для некоторого $\tau_1 \leqslant t_1$ неравенство в (4) оказывается строгим. Если $\tau_1 = t_1$, то $F(\hat{x}^{t_1}) > F(x^{t_1})$, что и требуется. Если $\tau_1 < t_1$, то по индукционному предположению неравенства в (4) строгие для $\tau = \tau_1, \dots, t_1 - 1$ и по лемме 3 в (5) неравенства строгие для $\tau = \tau_1 + 1, \dots, t_1$. Значит, $p^{t_1}\hat{x}^{t_1} > p^{t_1}x^{t_1}$, и так как $p^{t_1} \in \partial F(\hat{x}^{t_1})$, в силу необходимых и достаточных условий экстремума, $F(\hat{x}^{t_1}) > F(x^{t_1})$. Требуемое утверждение доказано для $t = t_1$. Теорема доказана.

Пусть $K(y,x) = \{i \in 1{:}n \,/\, y_i > x_i\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если функция $F$ такова, что $\forall x, y \in R_+^n / y \geqslant x$

$$p \in \partial F(y),\quad z \in \partial F(x) \Rightarrow p_i \geqslant z_i \quad \forall i \notin K(y,x), \tag{6}$$

тогда любая последовательность $\{p^t\}_1^T$, порожденная любой локально-оптимальной траекторией $\{x^t\}_0^T$, удовлетворяет условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО от противного. Пусть $\{x^\tau\}_0^T$ локально-оптимальна, а $\{p^\tau\}_1^T$ ею порождена. Предположим, что для некоторого $t \leqslant T$ найдется $i$ такой, что $i \in N(p^{t-1})$ и $i \notin N(p^t)$. По лемме 2 $x_i^t = x_i^{t-1}$ и из (6) $p_i^t \geqslant p_i^{t-1}$. Из полученного и из того, что $i \in N(p^{t-1})$, $i \notin N(p^t)$, имеем

$$j \in N(p^t) \Rightarrow p_j^t > p_j^{t-1}.$$

Итак, с учетом леммы 2 получаем

$$(p^t - p^{t-1})(x^t - x^{t-1}) = \sum_{j \in N(p^t)} (p_j^t - p_j^{t-1})(x_j^t - x_j^{t-1}) > 0,$$

а это противоречит монотонности субдифференциала вогнутой функции [2].

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций условие (6) означает соотношение $\partial^2 F / \partial x_i \partial x_j \geqslant 0$, $i \neq j$, которое справедливо, например, для функций $CES$ и Коббса – Дугласа со степенью однородности не больше единицы. С экономической точки зрения, оно означает, что "увеличение затрат ресурса $j$ улучшает условия применения ресурса $i$" [3].

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если $F$ - однородный функционал, то из предложения I легко видеть, что он не является эффективным. Из теоремы 3 следует, что в некоторых случаях в модели $\mathcal{Z}$, описанной в п.I, эффективные траектории можно строить не только с помощью эффективных функционалов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо вогнутости функционала $F$ можно предполагать, например, его квазивогнутость. В этом случае можно говорить, что последовательность $\{p^\tau\}_1^T$ порождена локально-оптимальной траекторией $\{x^\tau\}_0^T$, если $p^\tau$ являются опорными функционалами лебеговских множеств точек $x^\tau$ в этих точках и

$$p^\tau x^\tau = max\{p^\tau x / x \in \alpha(x^{\tau-1})\}, \quad \tau = 1, 2, \ldots, T.$$

В данном случае тоже можно сформулировать утверждения, аналогичные предложению 3 и теореме 3. Такое утверждение оказалось бы справедливым, например, для функций Коббса - Дугласа со степенью однородности выше единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [4] предлагаются иные, чем у нас, условия, которые накладываются на дважды непрерывно дифференцируемые функции, и обеспечивают выполнение условия (*) для градиентов и справедливость теоремы, аналогичной теореме 3.

## ЛИТЕРАТУРА


I. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложение к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, I980.
2. РОКАФЕЛЛАР Р.Т. Выпуклый анализ. - М.: Мир, I979.
3. ГРАНБЕРГ А.Г. Математические модели социалистической экономики. - М.: Экономика, I978.
4. ЗЕЛИКИН М.И., КОРНЕВ С.А. Синтез оптимальных траекторий для одной $n$-мерной многошаговой задачи оптимального управления. - Оптимальное управление. Математические вопросы управления производством, вып. 7. М.: Изд-во МГУ, I977, с.46-53.



Поступила в ред.-изд. отдел
03.06.I982 г.