УДК 513.88

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ОПОРНОГО МНОЖЕСТВА ВЕЕРА

И.В.Шапкин

В последнее время в связи с вопросами продолжения линейных операторов и нелинейной аппроксимации в векторных пространствах возникло понятие веера [1]. Техника вееров оказывается весьма полезной во многих вопросах выпуклого анализа [2,3]. В настоящей работе изучается экстремальная структура опорного множества веера. При этом используется метод бинарного пересечения, предложенный Нахбином [4]. Отметим, что опорные множества сублинейных операторов и их экстремальная структура изучены достаточно хорошо [3,5].

1. Определения и обозначения. Пусть X, Y – линейные пространства. Соответствие $\mathcal{U} \subseteq X \times Y$ называется веером, если:

(1) $\mathcal{U}(x)$ не пустое, выпуклое множество для всякого x из X;

(2) $0 \in \mathcal{U}(0)$;

(3) $\lambda\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(\lambda x)$ для всех $\lambda > 0$ и $x \in X$ (положительная однородность);

(4) $\mathcal{U}(x+u) \subseteq \mathcal{U}(x) + \mathcal{U}(u)$ для всех $x, u \in X$ (субаддитивность).

Множество $\partial\mathcal{U} = \{T \in L(X,Y) \mid Tx \in \mathcal{U}(x) \ \forall x \in X\}$ называется опорным множеством веера $\mathcal{U} \subseteq X \times Y$. Символом $L(X, Y)$ обозначается совокупность всех линейных операторов из X в Y.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ – совокупность всех подмножеств векторного пространства, X, а $\mathcal{P}_c(X)$ – совокупность всех выпуклых подмножеств в X. Семейство $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется сцепленным, если для любых $E, F \in \mathcal{E}$ выполняется $E \cap F \neq \emptyset$.

Совокупность $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_c(X)$ обладает свойством бинарного пересечения, если для любого сцепленного семейства $\mathcal{E}' \subseteq t(\mathcal{E}) = \{x + \lambda E \mid x \in X, \lambda \in R^1, E \in \mathcal{E}\}$ выполняется: $\bigcap\{E \mid E \in \mathcal{E}'\} \neq \emptyset$.

Напомним, что рецессивным конусом выпуклого множества в векторном пространстве X, называется множество $rec(E) = \{x \in X \mid E + R^1_+ x \subseteq E\}$, где $R^1_+ = \{r \in R^1 \mid r > 0\}$.

Семейство $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_c(X)$ называется направленным, если для произвольных множеств $E, F \in \mathcal{E}$ существует множество $G \in \mathcal{E}$, поглощающее E и F. Пусть $X_E = \mathcal{L}in(E)$ для всех $E \in \mathcal{E}$ и $X_{\mathcal{E}} = \bigcup\{X_E \mid E \in \mathcal{E}\}$.

2. Теорема Нахбина для семейства выпуклых множеств. Применением техники бинарного пересечения могут быть получены следующие утверждения.

2.1. Пусть E - выпуклое симметричное множество, содержащееся в единичном шаре B_1 пространства $C(Q)$ всех непрерывных функций на некотором стоуновском компакте Q. Если совокупность $\{E, B_1\}$ обладает свойством бинарного пересечения, то:

(1) E является inf- и sup-замкнутым множеством;

(2) E - замкнутое множество в топологии нормированного пространства $C(Q)$.

2.2. Пусть E удовлетворяет условиям в 2.1. Семейство $\{E, B_1\}$ обладает свойством бинарного пересечения в том и только в том случае, когда E есть порядковый отрезок в $C(Q)$.

2.3. Пусть $\mathcal{E}$ - совокупность выпуклых, симметричных множеств, содержащихся в $B_1 \subseteq C(Q)$, причем $B_1 \in \mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}$ обладает свойством бинарного пересечения в том и только в том случае, когда каждое множество E из семейства $\mathcal{E}$ является ограниченным порядковым отрезком в $C(Q)$.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{E}$ - направленная совокупность выпуклых подмножеств в X, не имеющих ненулевых рецессивных направлений. Тогда эквивалентны следующие условия:

(I) $\mathfrak{E}$ обладает свойством бинарного пересечения;

(2) в $X_{\mathfrak{E}}$ можно определить структуру K-пространства так, что $\mathfrak{E}$ – некоторая совокупность ограниченных порядковых отрезков в $X_{\mathfrak{E}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь импликация (I) $\Rightarrow$ (2). По теореме Нахбина [4], для всякого $E \in \mathfrak{E}$ пространство X_E изоморфно $C(Q_E)$, где Q_E – некоторый стоуновский компакт. Причем $E = [-1_E, 1_E]_E$, где 1_E – порядковая единица K-пространства ограниченных элементов $(X_E, \leqslant_E)$. Рассмотрим теперь множества E, F из семейства $\mathfrak{E}$, и пусть F поглощает E, тогда X_E – подпространсво X_F. Система $\{E, F\}$ обладает свойством бинарного пересечения. Поэтому, следуя 2.3, заключаем, что существует элемент $e \in X_F^+ = \{x \in X_F \mid x \geqslant_F 0\}$ такой, что $[-1_E, 1_E]_E = e[-1_F, 1_F]_F$. Легко установить, что $[0, 1_E]_E = e[0, 1_F]_F$. Отсюда заключаем, что структура порядка в X_E, индуцированная X_F, совпадает с уже имеющейся там структурой порядка. Далее, так как $\mathfrak{E}$ – направленное семейство, то $X_{\mathfrak{E}}$ – подпространство X. На $X_{\mathfrak{E}}$ введем отношение порядка "$\leqslant$" следующим образом. Рассмотрим произвольные элементы x, y из $X_{\mathfrak{E}}$, тогда существует $X_E, E \in \mathfrak{E}$ такое, что $x, y \in X_E$. Поэтому будем считать, что $x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x \leqslant_E y$. Это определение корректно. Таким образом, $(X_{\mathfrak{E}}, \leqslant)$ является K-пространством, и каждое множество E семейства $\mathfrak{E}$ есть ограниченный порядковый отрезок в $(X_{\mathfrak{E}}, \leqslant)$.

Аналогичный результат получил А.Д.Иоффе. Именно, эквивалентность (I) и (2) из теоремы 2.4 устанавливается при условии замкнутости $\mathfrak{E}$ относительно сложения и "алгебраической" ограниченности любого $E \in \mathfrak{E}$ в следующем смысле: для произвольного $x \in X \setminus \{0\}$ существует число $t_0 > 0$ такое, что $E \cap (E + tx) = \varnothing$, когда $t \geqslant t_0$. Алгебраическая ограниченность множеств E из семейства $\mathfrak{E}$ обеспечивает условие $\operatorname{rec}(E) = \{0\}$. А направленность семейства $\mathfrak{E}$ вытекает из замкнутости $\mathfrak{E}$ относительно алгебранческой суммы.

Семейство $\mathcal{E}$ выпуклых множеств в векторном пространстве X мажорируется множеством $E \in \mathcal{E}$, если каждое F из $\mathcal{E}$ поглощается E.

2.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{E}$ – семейство выпуклых множеств в векторном пространстве X, не имеющих ненулевых рецессивных направлений, причем $\mathcal{E}$ мажорируется некоторым множеством E из $\mathcal{E}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(I) $\mathcal{E}$ обладает свойством бинарного пересечения;

(2) в X_E можно определить структуру K-пространства ограниченных элементов так, что $\mathcal{E}$ – некоторая совокупность ограниченных отрезков в X_E.

Если в 2.6 семейство $\mathcal{E}$ состоит из одного множества E, то получается результат одной из теорем Нахбина из [4]:

2.7. ТЕОРЕМА [4]. Пусть E – выпуклое множество в векторном пространстве X, не имеющее ненулевых рецессивных направлений. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(I) E обладает свойством бинарного пересечения;

(2) в X_E можно определить структуру K-пространства ограниченных элементов так, что $E=[-1_E, 1_E]$, где 1_E – порядковая единица в X_E.

3. Теорема Крейна – Мильмана. Нам потребуется следующая теорема.

3.I. ТЕОРЕМА [6]. Пусть X – произвольное векторное пространство, $P: X \longrightarrow C(S)$ – сублинейный оператор, где S – некоторый стоуновский компакт. Тогда выполняются следующие утверждения:

(I) $ext\, \partial P \neq \emptyset$, где $ext\, \partial P$ – множество крайних точек опорного множества сублинейного оператора P;

(2) $\partial P = \overline{co}\, ext\, \partial P$, где замыкание берется в сильной операторной топологии.

Веер $\mathfrak{A} \subseteq X \times Y$ называется $\mathcal{E}$-значным, если $\mathfrak{A}(x) \in \mathcal{E}$ для всякого x из X, где $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_c(X)$.

3.2. ТЕОРЕМА Крейна – Мильмана для вееров. Пусть X – векторное пространство, Y – топологическое векторное пространство, $\mathcal{E}$ – семейство замкнутых, выпуклых множеств в Y. Предположим, что $\mathcal{E}$ обладает свойством бинарного пересечения и мажорируется некоторым ограниченным E из $\mathcal{E}$.

Тогда для $\breve{\mathcal{E}}$ -значного веера $\mathcal{Q} \subseteq X \times Y$ такого, что $\partial\mathcal{Q} \neq \phi$, выполняется:

(1) $ext\, \partial\mathcal{Q} \neq \phi$;

(2) $\partial\mathcal{Q} = \overline{co}\; ext\, \partial\mathcal{Q}$, где замыкание берется в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через τ топологию в Y_E, индуцированную исходной топологией пространства Y. По теореме Нахбина из [4], Y_E изоморфно $C(Q_E)$, поэтому в Y_E определена топология равномерной сходимости σ, которая сильнее топологии τ. Относительно топологий τ и σ в $L(X, Y_E)$ можно определить две сильные операторные топологии, которые соответственно обозначим через τ' и σ'. Топология τ' слабее топологии σ'. Веер $\mathcal{Q} \subseteq X \times Y$ - $\breve{\mathcal{E}}$ - значный, поэтому существует сублинейный оператор $P: X \to Y_E$ такой, что $\partial P = \partial\mathcal{Q}$. Следуя 3.1, заключаем, что $ext\, \partial\mathcal{Q} \neq \phi$ и $\partial\mathcal{Q} = \overline{co}^{\sigma'} ext\, \partial\mathcal{Q}$. Опорное множество $\partial\mathcal{Q}$ веера $\mathcal{Q} \subseteq X \times Y$ - замкнутое множество в топологии τ'. Учитывая то, что τ' слабее σ', окончательно получаем: $\partial\mathcal{Q} = \overline{co}^{\tau'} ext\, \partial\mathcal{Q}$.

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [6] изучается экстремальная структура множества

$$L = \{T \in L(X,E) \,|\, Tx \in \tfrac{1}{2}[p(x) - p(-x)]e + \tfrac{1}{2}[p(x) + p(-x)]K_0 \;\; \forall x \in X\},$$

где X, E - локально-выпуклые хаусдорфовы топологические векторные пространства, $K_0 = K - y$, K - ограниченное выпуклое множество в E, обладающее свойством бинарного пересечения с единственным центром симметрии y, $e \in ext\, K_0$, $p: X \to R^1$ - непрерывный сублинейный функционал. Отметим, что в качестве следствия из теоремы 3.2 можно получить теорему из [6], утверждающую: $ext\, L \neq \phi$, $L = \overline{co}\, ext\, L$, где замыкание берется в сильной операторной топологии. Достаточно рассмотреть сублинейный оператор $P: X \to E$, $P(x) = p(x)e$. Тогда $L = \partial P$, а затем к вееру $\mathcal{Q}(x) = [-P(-x), P(x)]$ для всех x из X применим теорему 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 3.2 получается классическая теорема Крейна - Мильмана [7], а также следующая

ТЕОРЕМА (Нахбин Л.[8,9]). Пусть X - локально-выпуклое хаусдорфово топологическое векторное пространство. Предположим, что E - выпуклое ограниченное замкнутое множество в X, обладающее свойством бинарного пересечения. Тогда выполняются следующие утверждения:

(I) $ext\, E \neq \emptyset$;

(2) $E = \overline{co}\, ext\, E$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Г.Кусраеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. IOFFE A.D. On foundations of convex analysis. - Ann. N.Y. Acad. Sci., 1980, 337, p.103-117.
2. IOFFE A.D. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferential mappings. - Trans. Amer. Math. Soc., 1981, 266, N1, p.1-56.
3. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Локальный выпуклый анализ.- В кн.: Современные проблемы математики / Итоги науки и техники. Т.I9. М.: ВИНИТИ, 1982, с.I55-206.
4. NACHBIN L. A theorem of the Hahn - Banach type for linear transformations. - Trans.Amer.Math.Soc.,1950, 68, p.28-46.
5. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, I978.
6. OATES D.K. A non-compact Krein - Milman theorem. - Pacific J. Math., 1971, v.36, N3, p.781-788.
7. KREIN M.G., MILMAN D.P. On extreme points of regular convex sets. - Studia Math., 1940, v.9, p.133-138,
8. NACHBIN L. Some problems in extending and lifting continuous linear transformations. - Proc. Intern. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, p.340-350.
9. NACHBIN L. Sur l'abondance des points extremaux d'un ensemble convexe borné et fermé. - An. Acad. brasil. cieni., 1962, 34, 445-448.