УДК 513.88

О ЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТОРАХ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО-ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

О.В.Левчук

В заметке строятся селекторы, выбирающие из производной Кларка локально-липшицевой функции некоторую точку. Причем такой выбор является линейным относительно самой функции. Таких селекторов получается достаточно много, чтобы каждая точка из производной Кларка выбиралась некоторым селектором. Показывается связь таких селекторов с точкой Штейнера. Доказываются некоторые теоремы о вычислении селектора субдифференциального отображения сложной функции. В качестве приложения получены некоторые точные формулы для нахождения производной Кларка сложной функции, а также доказывается гипотеза Линке о непустоте субдифференциала непрерывного сублинейного оператора из сепарабельного банахова пространства в отделимое полное локально-выпуклое пространство, упорядоченное замкнутым нормальным конусом положительных элементов.

1. Пусть X и Y - векторные пространства, тогда через $\mathcal{L}(X,Y)$ будем обозначать пространство линейных операторов из X в Y. Если $E \subset X$, то $Lin(E)$ и $co\,E$ означают линейную и выпуклую оболочку E соответственно. Если X - топологическое векторное пространство, то $cl\,E$ - замыкание E, а $\overline{co}\,E$ есть $cl\,co\,E$. Открытый шар в R^n радиуса r с центром в точке x обозначим через $B_r(x)$, причем $B_r(x) = B_r$ для $x = 0$ и $cl\,B_r(x) = \bar{B}_r(x)$.

Пусть теперь X и Y - нормированные пространства, $x \in X$. Под $Lip_{\bar{x}}(X,Y)$ будем понимать пространство функций, действующих из X в Y и удовлетворяющих условию Липшица на некоторой окрестности точки $\bar{x}$, т.е. для любой функции $f \in Lip_{\bar{x}}(X,Y)$ найдутся такая окрестность V точки x и число $a > 0$ (показатель Липшица), что выполняется $|f(x)-f(y)| \leq a|x-y|$.

Нам понадобится понятие субдифференциала Кларка [I]. Пусть $f \in Lip_{\bar{x}}(R^n, R^m)$. Субдифференциалом Кларка функции в точке $\bar{x}$ называется множество

$$\partial f(\bar{x}) = \overline{co}\, Lim\{f'_x \mid x \in X, \exists f'_x\},$$

где f'_x означает производную Фреше функции f в точке x, т.е. $\partial f(\bar{x})$ есть замкнутая выпуклая оболочка предельного множества производных f в тех точках, где они существуют. Различные свойства и приложения этого понятия рассмотрены в [I-5].

Мы будем рассматривать также обобщенный дифференциал. Это понятие было найдено Иоффе [6] и является обобщением кларковского субдифференциала на векторнозначные отображения, не использующим упорядоченности рассматриваемых пространств.

Пусть X и Y - локально-выпуклые пространства. Соответствие $\mathcal{A}$ из X в Y называется веером, если для любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $\lambda > 0$ выполнены условия:

а) $\mathcal{A}(x)$ - непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество;

б) $0 \in \mathcal{A}(0)$, $\lambda\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\lambda x)$;

в) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) \subset \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$.

Функция $S: X \times Y' \to R$, определенная равенством $S(x,y') = \sup\{\langle y, y' \rangle : y \in \mathcal{A}(x)\}$ называется опорной функцией $\mathcal{A}$.

Пусть теперь X и Y - нормированные пространства, f - липшицево отображение некоторой окрестности точки $\bar{x} \in X$ в Y. Обобщенным дифференциалом f в точке $\bar{x}$ называется веер $D_f f(x)$, опорная функция которого равна

$$f^\circ(\bar{x}, y'; h) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{\substack{|x-\bar{x}| < \varepsilon \\ |x+th-\bar{x}| < \varepsilon}} \left\{\frac{1}{t}\langle f(x+th) - f(x), y' \rangle\right\}.$$

Обозначим через $\partial_{\bar{x}}$ соответствие из $Lip_{\bar{x}}(X,Y)$ в $\mathcal{L}(X,Y)$, определенное по правилу $\partial_{\bar{x}}(f) = \{l \in \mathcal{L}(X,Y):$

$l(x)\in Df(\bar{x}), x\in X\}$, где $f\in Lip_{\bar{x}}(X,Y)$. В случае $X=R^n, Y=R^m$ легко показать, что $\partial f(\bar{x})=\partial_{\bar{x}}(f)$.

Далее везде X будет означать сепарабельное банахово пространство, $\bar{x}\in X$.

2. ТЕОРЕМА I. Соответствие $\partial_{\bar{x}}\subset Lip_{\bar{x}}(X,R^n)\times\times\mathcal{L}(X,R^n)$ имеет линейные селекторы, причем для любых $f\in Lip_{\bar{x}}(X,R^n)$, $l\in\partial_{\bar{x}}(f)$ найдется такой линейный селектор s соответствия $\partial_{\bar{x}}$, что $s(f)=l$. Другими словами, существует множество $S=S(X,\bar{x},R^n)$, содержащееся в $\mathcal{L}(Lip_{\bar{x}}(X,R^n),\mathcal{L}(X,R^n))$, такое, что для $f\in Lip_{\bar{x}}(X,R^n)$, $x\in X$ выполняется

$$\bigcup_{s\in S} s(f)x=\mathcal{D}f(\bar{x})x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – произвольная окрестность точки $\bar{x}$. Следует установить справедливость теоремы только для $(Lip_{\bar{x}}(X,R^n))_V$ – пространства функций, удовлетворяющих условию Липшица на V.

Для каждой окрестности U точки $\bar{x}$ рассмотрим $E=\{e_1,\dots,e_k,\dots\}$ – счетное множество линейно-независимых векторов, последовательность чисел $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots)$ и вектор $h\in X$, удовлетворяющие условиям:

I) $cl\ Lin\ E=X$,

2) $|e_k|=1$ для любого $k\in N$,

3) $\alpha_k\in(0,1/2^k)$ для любого $k\in N$. (2.I)

4) для любых $\tau_1,\dots,\tau_k$ таких, что $\tau_i\in[0,\alpha_i]$, выполняется $x+h+\sum_{i=1}^{k}\tau_i e_i\in U$.

Пусть $K^m=K^m(\alpha,E,h,U)$ – прямоугольный m-мерный параллелепипед, равный $\prod_{i=1}^{m}[0,\alpha_i]$. Обозначим через $f_m(\tau)$ функцию из R^m в R^n, определенную равенством $f_m(\tau)=f(\bar{x}+h+\sum_{i=1}^{m}\tau_i e_i)$. Так как f_m удовлетворяет условию Липшица на K^m, то существует почти всюду на K^m производная $(f_m)'_\tau$. Тогда для $e_k\in E$, где $k\le m$, полагаем

$$\mathcal{L}^m(f)e_k=\int_{K^m}(f_m)'_\tau e_k\,d\tau\Big/\int_{K^m}d\tau,$$

где $(f_m)'_\tau e_k$ равно значению $(f_m)'$ от вектора $(0,\ldots,0,1,\ldots$ $\ldots,0)\in R^{m^k}$. По теореме Лебега о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной [13] получаем

$$\mathcal{L}^m(f)e_k = \int_{K_k^m} (f_m((\tau_1,\ldots,\tau_{k-1},\alpha_k,\tau_k,\ldots,\tau_{m-1})) -$$

$$-f_m((\tau_1,\ldots,\tau_{k-1},0,\tau_k,\ldots,\tau_{m-1}))\,d\tau, \qquad (2.2)$$

где K_k^m – $(m-1)$-мерный параллелепипед, равный $[0,\alpha_1]\times\ldots$ $\ldots\times[0,\alpha_{k-1}]\times[0,\alpha_{k+1}]\times\ldots\times[0,\alpha_m]$.

Докажем, что последовательность $\mathcal{L}^m(f)e_k$ сходится при $m\to\infty$. Имеем

$$|\mathcal{L}^m(f)e_k-\mathcal{L}^{m+1}(f)e_k|=\Big|\int_{K^m}(f_m)'_\tau e_k\,d\tau\Big/\int_{K^m}d\tau-\int_{K^{m+1}}(f_{m+1})'_\tau e_k\,d\tau\Big/\int_{K^{m+1}}d\tau\Big|.$$

Учитывая, что f_{m+1} – липшицева функция с показателем a на K^{m+1}, и используя равенство (2.2), получаем

$$|\mathcal{L}^m(f)e_k-\mathcal{L}^{m+1}(f)e_k|<(2a\cdot\alpha_{m+1})/\alpha_k<(2a/\alpha_k)/2^{m+1}.$$

Значит, последовательность $\mathcal{L}^m(f)e_k$ сходится. Так как векторы $E=\{e_1,\ldots,e_k,\ldots\}$ линейно-независимы, то определен линейный оператор $\mathcal{L}(f):\mathrm{Lin}\,E\to R^n$ такой, что $\mathcal{L}(f)e_k=\lim\limits_{m\to\infty}\mathcal{L}^m(f)e_k$. Легко показать, что $\mathcal{L}(y'\circ f)=y'\circ\mathcal{L}(f)$ для любого $y'\in R^{n'}$. Следовательно,

$$y'\circ\mathcal{L}(f)x\leqslant\sup\{(y'\circ f(x'+\alpha x)-y'\circ f(x'))/\alpha,\ \alpha>0,\ x'\in U\cap V,\ x'+\alpha x\in U\cap V\}$$

для любого $x\in\mathrm{Lin}\,E$. Так как y' произвольное из $R^{n'}$, то $\mathcal{L}(f)$ ограничен на $\mathrm{Lin}\,E$ и существует единственное линейное непрерывное продолжение $\mathcal{L}(f)$ на $X=\mathrm{cl}\,\mathrm{Lin}\,E$. Обозначим это продолжение через $S_u=s(\alpha,E,h,u)$. Беря всевозможные α,E,h,u, удовлетворяющие условиям (2.1), построим, как и выше, операторы $s(\alpha,E,h,u)$. Пусть S_u – множество всех таких операторов. Тогда очевидно, что для каждого $s_u\in S_u$ выполняется

$$y'\circ s_u(f)x\leqslant\sup\{(y'\circ f(x'+\alpha x)-y'\circ f(x'))/\alpha,\ \alpha>0,\ x'\in U\cap V,\ x'+\alpha x\in U\cap V\} \qquad (2.3)$$

где $y'\in R^{n'}_+$, $x\in X$. Пусть $S=\bigcap\overline{\mathrm{co}}\,S_u$, где пересечение берется по всем окрестностям точки $\bar{x}$. Из (2.3) следует, что для любых $f\in \mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X, R^n)$, $x\in X$ выполняется

$$\bigcup_{s\in S} s(f)x \subset \mathcal{D}f(\bar{x})x.$$

Докажем включение в обратную сторону. Пусть для некоторой функции $f\in \mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X, R^n)$ выполнено $(x,y)\in\mathcal{D}f(\bar{x})$, т.е. $y\in\mathcal{D}f(\bar{x})x$. Тогда по определению $\mathcal{D}f(x)$ получаем, что

$$\langle y,y'\rangle \leq \sup\{(y'\circ f(x'+\alpha x)-y'\circ f(x'))/\alpha,\ \alpha>0,\ x'\in\mathcal{U}\cap V,\ x'+\alpha x\in\mathcal{U}\cap V\}$$

для любого $y\in R^{n'}$ и любой окрестности $\mathcal{U}$ точки $\bar{x}$. Так как супремум в правой части берется в R, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $\alpha_0>0$ и $x_0'\in\mathcal{U}\cap V$, что $x_0'+\alpha_0 x\in\mathcal{U}\cap V$ и

$$\langle y,y'\rangle \leq (y'\circ f(x_0'+\alpha_0 x)-y'\circ f(x_0'))/\alpha_0+\varepsilon.$$

Выбираем $e_1=\alpha_0 x, e_2,\dots,e_k,\dots$ произвольно, $\alpha_1=1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\dots$ — достаточно маленькими, полагаем $h=x_0-x$, получаем $s_{\mathcal{U}}=s(E,\alpha,h,u)$ такие, что

$$s_{\mathcal{U}}(y'\circ f)x > (y'\circ f(x_0'+\alpha_0 x)-y'\circ f(x_0'))/\alpha_0-\varepsilon.$$

А так как ε — произвольное число, строго большее нуля, то для любого $y'\in R^{n'}$

$$\langle y,y'\rangle \leq \sup\{\langle s(f)x,y'\rangle,\ s\in S\}.$$

Но $\{s(f)x,\ s\in S\}$ — выпуклое компактное множество в R^n, а y' — произвольное из $R^{n'}$. Следовательно, найдется $s'\in S$ такое, что $s'(f)x=y$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $s\in S(X,x,R)$, тогда множеству $S(X,\bar{x},R^n)$ принадлежит оператор $s'\in\mathcal{L}(\mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X,R^n),\mathcal{L}(X,R^n))$, определенный по правилу: значение s' от $f=(f^1,\dots,f^n)$ равно $(s(f^1),\dots,s(f^n))$. Наоборот, если некоторый $s'\in S(X,\bar{x},R^n)$, то найдется $s\in S(X,\bar{x},R)$ такой, что для любой функции $f=(f^1,\dots,f^n)\in\mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X,\bar{x},R^n)$ выполняется $s'(f)=(s(f^1),\dots,s(f^n))$.

В самом деле, как нетрудно заметить, $s'\in\overline{co}\,S_{\mathcal{U}}(X,\bar{x},R^n)$ для любой окрестности $\mathcal{U}$ точки x. Беря пересечение по всем $\mathcal{U}$, получаем $s'\in S(X,\bar{x},R^n)$. Пусть теперь, наоборот, $s'\in S(X,\bar{x},R^n)$. Тогда выполняется $s'(f)=(s(f^1),\dots,s(f^n))$, где $f=(f^1,\dots,f^n)\in\mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X,R^n)$, для $s\in\mathcal{L}(\mathcal{L}ip_{\bar{x}}(X,R),\mathcal{L}(X,R))$, определенного по правилу: значение s от $g \in Lip_{\bar{x}}(X, R)$ равно первой координате вектора $s((g, \ldots, g))$.

В дальнейшем будем отождествлять $s \in S(X, \bar{x}, R)$ с $s' = (s, \ldots, s) \in S(X, \bar{x}, R^n)$ и вместо $S(X, \bar{x}, R^n)$ будем писать $S(X, \bar{x})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in Lip_{\bar{x}}(X, R^n)$, $g \in Lip(R^n, R^m)$, причем функция y дифференцируема по Фреше в точке $f(\bar{x})$ и $\partial y(f(\bar{x})) = \{g'_{f(\bar{x})}\}$. Тогда для любого $s \in S$ выполняется

$$s(g \circ f) = y'_{f(\bar{x})} \circ s(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как y дифференцируема в точке $f(\bar{x})$, то $g(f(x)) = g(f(\bar{x})) + g'_{f(\bar{x})}(f(x) - f(\bar{x})) + O(f(x) - f(\bar{x}))$, и так как $\partial f_{(x)}(g) = \{g'_{f(x)}\}$, то $\partial_{\bar{x}}(O(f(\bar{x}) - f(x))) = \{0\}$. Значит, по теореме I выполняется $s(g \circ f) = y'_{f(x)} \circ s(f)$. Следствие доказано.

3. В этом пункте мы установим связь между построенными в теореме I селекторами и точкой Штейнера [7–12]. В работе Штейнера [7] было рассмотрено отображение, сопоставляющее каждому компактному выпуклому множеству некоторую его точку, которую теперь называют точкой Штейнера. При этом само отображение обладает свойствами предлинейности и инвариантности относительно вращения. Причем, как было потом показано [8], эти свойства определяют данное отображение однозначно. Различные геометрические приложения и свойства точки Штейнера были рассмотрены в [9].

Если отбросить требование инвариантности относительно вращения, то нельзя получить единственности такого отображения. Более того, как будет показано ниже, таких отображений достаточно много, чтобы каждая точка из выпуклого компактного множества выбралась некоторыми из них. Кроме того, отказ от инвариантности относительно вращения дает возможность перейти к бесконечномерному случаю.

Пусть X' – сопряженное к сепарабельному банахову пространству X со слабой топологией $\sigma(X', X)$. Обозначим через $conv(X')$ предлинейное пространство всех компактных выпуклых множеств в X' с топологией Хаусдорфа. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Существует множество T предлинейных и непрерывных отображений, сопоставляющих каждому $A \in conv(X')$ некоторую точку $t(A) \in A$, причем для каждых $A \in conv(X')$ и $a \in A$ найдется такое $t \in T$, что $t(A) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью двойственности Минковского [14] можно найти такой непрерывный сублинейный функционал P_A из X в R для каждого $A \in conv(X')$, что $\partial P_A = A$. Обозначим через T множество отображений $t(A) = s(P_A)$, когда s пробегает всё S. Очевидно, что все t предлинейны и $t(A) \in A$. Докажем, что каждое $t \in T$ непрерывно. Пусть $A^k \to A$ в топологии Хаусдорфа, т.е. $P_{A^k} \to P_A$ поточечно. Для каждого s_u найдутся такие E, α, h, удовлетворяющие условиям (2.1), что для любого $e_m \in E$ выполняется

$$\mathcal{L}^n(P_{A^k})e_m = \int_{K^n} (P_{A^k})'_{k+\sum \tau_i e_i} e_m \, d\tau \Big/ \int_{K^n} d\tau .$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{L}^n(P_{A^k})e_m = \int_0^{\alpha_1} d\tau_1 \ldots \int_0^{\alpha_{m-1}} d\tau_{m-1} \int_0^{\alpha_{m+1}} d\tau_{m+1} \ldots \int_0^{\alpha_n} (P_{A^k}(h + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} \tau_i e_i + \alpha_m e_m) -$$
$$- P_{A^k}(h + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} \tau_i e_i)) d\tau_n \Big/ \int_{K^n} d\tau .$$

Так как $\{P_{A^k}(x) | k \in N\}$ ограничено для каждого $x \in X$, то по принципу равномерной ограниченности $\{P_{A^k}(x) | k \in N\}$ равномерно ограничено. Следовательно, все подынтегральные функции в правой части ограничены одной интегрируемой функцией. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^n(P_{A^k})e_m = \mathcal{L}^n(P_A)$. Значит, $s_u(P_{A^k}) \to s_u(P_A)$ для всех $x \in Lin\,E$. А так как $s_u(P_{A^k}) \in \partial(P_{A^k})$, то множество $\{s_u(P_{A^k}) | k \in N\}$ равномерно ограничено. Поэтому $s_u(P_{A^k}) \to s_u(P_A)$ для всех $x \in cl\,Lin\,E = X$. Значит, $s(P_{A^k}) \to s(P_A)$, но $t(A^k) = s(P_{A^k})$, а $t(A) = s(P_A)$. Следовательно, $t(A^k) \to t(A)$. Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in Lip_{\bar{x}}(R^n, R^m)$, $g \in Lip_{f(\bar{x})}(R^m, R^k)$, $\bar{x} \in R^n$. Тогда для всех $s \in S(R^n, \bar{x})$ таких, что $s(f)$ – крайняя точка в $\partial f(\bar{x})$, выполняется

$$s(g \circ f) = s(g \circ (s(f) - s(f)\bar{x} + f(\bar{x}))).$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть T — выпуклый компакт в R^n, t — крайняя точка в T, тогда для любых $\varepsilon>0,\ z>0$ найдутся δ^1, δ^2 такие, что $\delta^1/\delta^2>z$ и $co((T+\bar{B}_{\delta^2})/B_\varepsilon(t))\cap\bar{B}_{\delta^1}(t)=\varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы. Предположим противное. Тогда для любого $\delta^2>0$ точка $t\in co((T+B_{\delta^2})/B_\varepsilon)$. А так как выпуклая оболочка берется в R^n, то найдется $n+1$ точка $t^1_{\delta^2},\dots,t^{n+1}_{\delta^2}\in(T+B_{\delta^2})/B_\varepsilon(t)$, причем $t\in co\{t^1_{\delta^2},\dots,t^{n+1}_{\delta^2}\}$. Так как множество $(T+\bar{B}_{\delta^2})/B_\varepsilon$ компактно, то найдется последовательность $\delta^2_i\to 0$ такая, что $t^1_{\delta^2},\dots,t^{n+1}_{\delta^2}$ сходятся при $i\to\infty$. Обозначим $t^k=\lim t^{k_i}_{\delta^2_i},\dots$ для $k=\overline{1,n+1}$. Тогда $t\in co\{t^1,\dots,t^k\}$, но $t^k\in K\setminus B_\varepsilon(t)$. Значит, t — не крайняя точка. Полученное противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Достаточно проверить теорему для $\bar{x}=0$, $f(x)=0$, так как в противном случае мы можем рассмотреть $\hat{f}(x)=f(x+\bar{x})$, $\hat{g}(y)=g(y+f(\bar{x}))$.

По определению имеем, что $s\in\bigcap_u\overline{co}\,S_u$. А так как S_u ограничены и содержатся в конечномерном пространстве $\mathcal{L}(R^n,R^m)$, то из того, что семейство S_u фильтруется по убыванию, получаем $\bigcap_u\overline{co}\,S_u=co\bigcap_u cl\,S_u$. Теорему достаточно доказывать для $s\in\bigcap_u cl\,S_u$.

Действительно, если для таких s теорема доказана, то для произвольного $s\in S$, удовлетворяющего условию теоремы, найдутся $s^1,\dots,s^{nm+1}\in\bigcap_u cl\,S_u$, причем $s=\sum_{i=1}^{nm}\alpha_i s^i$ для некоторых $\alpha_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,n\cdot m+1}$, $\sum\alpha_i=1$. Тогда

$$s(g\circ f)=\sum_{i=1}^{n\cdot m+1}\alpha_i\cdot s^i(g\circ f)=\sum_{i=1}^{n\cdot m+1}\alpha_i s^i(g\circ s^i(f))=\sum_{i=1}^{n\cdot m+1}\alpha_i s^i(g\circ s(f))=s(g\circ s(f)),$$

так как $s^i(f)=s(f)$.

Нам осталось доказать теорему для $s\in\bigcap_u cl\,S_u$. Пусть $e>0$, $z>0$, $c>0$. Тогда, применяя лемму для выпуклого компактного множества $\partial f(\bar{x})$, вложенного в $R^{n\cdot m}$, и для точки $t=s(f)$, найдем такие $\delta^1>0$, $\delta^2>0$, что $\delta^1/\delta^2>z$ и

$$((\partial f(\bar{x})+\bar{B}_{\delta^2})/B_\varepsilon(s(f)))\cap\bar{B}_{\delta_1}(s(f))=\emptyset. \qquad (4.1)$$

Так как $s\in\bigcap\limits_u cl\,S_u$, то $s\in cl\,S_u$, где u – такая окрестность точки $\bar{x}$, что $\inf\{\|f'_\tau-l\|,\ l\in\partial f(\bar{x})\}\leqslant\delta_2$ для любого $\tau\in u$. Значит, найдется $K^n\subset U$, для которого

$$\|s(f)-\int_{K^n}f'_\tau d\tau/\int_{K^n}d\tau\|\leqslant\delta_1/c. \qquad (4.2)$$

Пусть $A=\{\tau\in K^n/\|s(f)-f'_\tau\|>\varepsilon\}$. Очевидно, что $f'_{[A]}\subset$ $\subset(\partial f(\bar{x})+\bar{B}_{\delta^2})/B_\varepsilon(s(f))$. Тогда из (4.1) имеем $\overline{co}\,f[A]\cap$ $\cap\bar{B}_{\delta_1}(s(f))=\emptyset$. Значит,

$$\|\int_A f'_\tau d\tau/\int_A d\tau-s(f)\|\geqslant\delta'. \qquad (4.3)$$

Из (4.2) получаем

$$\|s(f)-\alpha_1\int_{K^n/A}f'_\tau d\tau/\int_{K^n/A}d\tau-\alpha_2\int_A f'_\tau d\tau/\int_A d\tau\|\leqslant\delta_1/c,$$

где

$$\alpha_1=\int_{K^n/A}d\tau/\int_{K^n}d\tau,\qquad \alpha_2=\int_A d\tau/\int_{K^n}d\tau.$$

Учитывая (4.3), получаем, что $\alpha_2\to 0$ при $z\to\infty$, $c\to\infty$. Рассмотрим

$$R=\|\int_{K^n}(g\circ f)'_\tau d\tau/\int_{K^n}d\tau-\int_{K^n}(g\circ s(f))'_\tau d\tau\|\leqslant\|\int_{K^n/A}(g\circ f)'_\tau d\tau/\int_{K^n}d\tau-\int_{K^n/A}(g\circ s(f))'_\tau d\tau/\int_{K^n}d\tau\|+$$
$$+a\,b\,\alpha_2,$$

где a, b – коэффициенты Липшица для функции f, g соответственно. Из определения множества A имеем

$$\|\int_{K^n/A}(g\circ f)'_\tau d\tau/\int_{K^n}d\tau-\int_{K^n/A}(g\circ s(f))'_\tau/\int_{K^n}d\tau\|\leqslant b\cdot\varepsilon.$$

Устремляя ε и α_2 к нулю, получаем, что $R\to 0$. Значит, $s(g\circ f)=s(g\circ s(f))$. Теорема доказана.

5. В [I–6] рассмотрены формулы вычисления производной Кларка сложной функции. Они, как правило, являются неточными, т.е. выполняются со знаком включения. В этом пункте мы получим некоторые точные формулы, т.е. выполненные со зна-

ком равенства.

Из теоремы 2 и следствия к теореме I легко получить следующие две формулы.

Пусть $f\in Lip_{\bar x}(X,R^n)$, $g\in Lip_{f(\bar x)}(R^n,R^m)$, g дифференцируема по Фреше в точке $f(\bar x)$ и $\partial_{f(\bar x)}(g)=\{g'_{f(\bar x)}\}$. Тогда

$$\partial_{\bar x}(g\circ f)=\bigcup_{s\in S} g'_{f(\bar x)}\circ s(f). \tag{5.I}$$

Пусть $f\in Lip_{\bar x}(R^n,R^m)$, $g\in Lip_{f(\bar x)}(R^m,R^k)$. И пусть из того, что $s(g\circ f)$ – крайняя точка в $\partial_{\bar x}(g\circ f)$, следует, что $s(f)$ – крайняя точка в $\partial f(\bar x)$. Тогда

$$\partial_{\bar x}(g\circ f)=\overline{co}\{s(g\circ(\tilde s(f)-s(f)\bar x+f(\bar x))\mid s\in S,\ s(gf)\in ch(\partial gf)\}, \tag{5.2}$$

где $ch(\partial g\circ f)$ означает множество крайних точек в выпуклом компакте $\partial_{\bar x}(g\circ f)$.

6. В [II] Ю.Э.Линке была высказана гипотеза о том, что субдифференциал непрерывного сублинейного оператора из сепарабельного банахова пространства в полное отделимое локально-выпуклое пространство (о.л.в.п.), упорядоченное нормальным замкнутым конусом положительных элементов, непуст. Там же была показана непустота субдифференциала сублинейного оператора на конечномерном пространстве.

Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА [II]. *Пусть X – о.л.в.п., а Y – полное о.л.в.п., упорядоченное нормальным замкнутым конусом положительных элементов. Тогда для существования субдифференциала непрерывного сублинейного оператора p из X в Y необходимо, а если топология в X совпадает с топологией Макки (в частности, для метризуемых и бочечных пространств), то и достаточно, чтобы сопряженный оператор p' имел слабо непрерывные полулинейные селекторы. Причем для любого такого селектора τ существует $u\in\partial p$ такой, что $u'/Y'_+=\tau$.*

Напомним, что сопряженным оператором p' непрерывного сублинейного оператора p из X в Y называется отображение Y'_+ в $conv(X')$, при котором точка $y' \in Y'_+$ переходит в субдифференциал $\partial(y' \circ p)$. Здесь Y'_+ – конус положительных линейных функционалов из Y'.

Определим $\tau(y') = t(y' \circ p)$ для любого $y' \in Y'_+$, где $t \in T$ определено в п.3. Очевидно, что полученные τ удовлетворяют всем условиям теоремы, т.е. доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Субдифференциал непрерывного сублинейного оператора p из сепарабельного банахова пространства X в полное о.л.в.п. Y, упорядоченное нормальным замкнутым конусом положительных элементов, непуст, причем для любого $y' \in Y'_+$

$$y' \circ p(x) = \sup\{y' \circ u(x),\ u \in \partial p\}.$$

Автор выражает глубокую благодарность А.Г.Кусраеву за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications. – Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 205, p.247-262.
2. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Локальный выпуклый анализ.- В кн.: Современные проблемы математики / Итоги науки и техники, т.19. М.: 1982, с.155-206.
3. THIBAULT L. Quelquesproprietes des sous-differetiels de fonctions reeles localment Lipschitzennes definies sur un espace de Banach separable. - C.r. Acad. Sci., 1976, 282, N10, A507-510.
4. КУСРАЕВ А.Г. Об одном общем методе субдифференцирования. - Докл. АН СССР, 1981, т.257, №4, с.817-822.
5. ROCKAFELAR R.T. Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus. - Proc. London Math. Soc., 1979, 39, N2, p.331-335.

6. IOFFE A.D. Differentieles generalissees, d'applications localement Lipschitzenes d'un espace de Banach dans un autre. – C.r. Acad. Sci., 1979, AB289, A637–A640.
7. STEINER J. Vondem Krümmu ssehwerpunkte ebener Curven. – J. Reine Angew. Math., 21(1840), 33–63, 101–102. (Gesammelte Werke, Bd.2, Berlin, 1882, 99–159).
8. SCHNEIDER R.S. On Steiner points of convex bodies. – Israel J. Math., 1971, v.9, p.241–249.
9. ГРЮНБАУМ Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. – М.: Наука, 1971.
10. SHEPARAD G.C. A uniqueness theorem for the Steiner points of a convex region. – J. London Math. Soc., 43, 1968, p.439–444.
11. ЛИНКЕ Ю.Э. Применение точки Штейнера для исследования одного класса сублинейных операторов. – Докл. АН СССР, 1981, т.254, №5, с.1069–1072.
12. ЛЕВЧУК О.В. О производной Штейнера локально-липшицевых функций. – Оптимизация, 1982, вып.29(46), с.56–65.
13. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
14. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1976.

Поступила в ред.-изд. отдел
28.06.1982 г.