Выпуск 32(49) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Выпуклый анализ

УДК 513.88

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫПУКЛЫХ СООТВЕТСТВИЙ

А.Г.Кусраев

Введение

Весьма удобными для нужд выпуклого анализа оказываются аналоги классических теорем об открытом отображении и замкнутом графике для выпуклых соответствий (или многозначных отображений с выпуклым графиком в другой терминологии). По-видимому, первый результат такого рода содержится неявно в [1]. Затем, несколько более слабые версии этого факта, но сформулированные уже как принцип открытости, получены в [2] и [3]. Во всех трех упомянутых работах используется модификация метода обкатывающего шара Банаха. В [4] для случая выпуклых соответствий в локально-выпуклых пространствах рассмотрен комбинированный метод Птака - Келли [5,6] и получен соответствующий вариант принципа открытости.

Один из наиболее интересных способов, приводящих к принципу открытости, связан с концепцией тканности Де Вильде [7,8], которая весьма существенно расширяет область применения метода обкатывающего шара. Цель настоящей статьи - приспособить технику, связанную с этой концепцией, к случаю выпуклых соответствий. В первом параграфе вводятся понятия тканного множества и полутканного соответствия в топологических векторных пространствах и обсуждаются простейшие их свойства. Второй параграф содержит различные версии принципа открытости для выпуклых соответствий. В третьем параграфе приводятся результаты об автоматической открытости и непрерывности выпуклых операторов.

§I. Полутканные соответствия

Обозначим через I множество всех мультииндексов $(n_1,\dots,n_k)$, где $k,n_1,\dots,n_k \in N$. Пусть F – некоторое множество и $\mathcal{P}(F)$ – множество всех его подмножеств. Тканью множества F называется отображение $\omega: I \to \mathcal{P}(F)$, удовлетворяющее условиям:

I) $\bigcup\{\omega(n_1): n_1 \in N\} = F$;

2) $\bigcup\{\omega(n_1,\dots,n_k): n_k \in N\} = \omega(n_1,\dots,n_{k-1})$

для всех $k>1$. Таким образом, ткань ω множества F задается семейством $\{\omega(n_1,\dots,n_k)\}$ его подмножеств, занумерованным всевозможными мультииндексами $(n_1,\dots,n_k)\in I$ и таким, что выполнены условия I) и 2).

Пусть X – топологическое векторное пространство (т.в.п.) и $F\subset X$. Ткань ω множества F называется совершенной, если для любой последовательности натуральных чисел (n_k) существует последовательность неотрицательных чисел (λ_k) такая, что множество $\{k:\lambda_k>0\}$ бесконечно и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x_k$ сходится к некоторому $x\in X$ при любом выборе $x_k \in \omega(n_1,\dots,n_k)$ и $\gamma_k \in [0,\lambda_k]$. При этом говорят, что последовательность (λ_k) ω-ассоциирована с последовательностью (n_k). Множество $F\subset X$ называется тканным в точке $x\in F$, если множество $F-x$ допускает совершенную ткань. Полагая в этом определении $F=X$ и $x=0$, приходим к понятию тканного пространства (см. [7,8]).

Важную роль в дальнейшем играет понятие cs-замкнутости, введенное в [9]. Множество F в топологическом векторном пространстве называется cs-замкнутым, если сумма любого сходящегося ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$, где $x_n\in F$, $\lambda_n \geq 0$, $n=1,2,\dots$, и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$, содержится в F. Свойства cs-замкнутых множеств изучались в [I]. Очевидно, что всякое cs-замкнутое множество является выпуклым. Напомним (см. [10]), что подмножество F декартова произведения $X\times Y$ называется соответствием из X в Y и отождествляется с многозначным отображением $x\mapsto F(x) = \{y\in Y:(x,y)\in F\}$. При этом приняты обозначения $F^{-1}(y) = \{x\in X:(x,y)\in F\}$ и $F[U]=\bigcup\{F(x):x\in U\}$, где $y\in Y$ и

$U \subset X$ (см. [10]). Эффективное множество $dom\, F$ соответствия F определяется равенством $dom\, F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$. Введем теперь основной класс соответствий. Соответствие F из т.в.п. X в т.в.п. Y называется полутканным в точке $x \in dom\, F$ (или просто полутканным, когда $x = 0$), если оно cs-замкнуто и его эффективное множество $dom\, F$ тканно в точке x. Многочисленные примеры полутканных соответствий доставляет следующий простой факт вместе с теорией тканных пространств [7,8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если F – выпуклое и полутканное в точке x_0 соответствие из X в Y, а G – cs-замкнутое подмножество в F и $x_0 \in dom\, G$, то G полутканно в той же точке. В частности, если X – тканное пространство, то всякое cs-замкнутое соответствие F из X в Y полутканно в любой точке $x_0 \in dom\, F$.

Весьма интересный класс (полу)тканных соответствий связан с понятием идеальной выпуклости. Соответствие F из X в Y называется полуидеально-выпуклым, если оно cs-замкнуто и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ сходится для любой ограниченной последовательности (x_n) из $dom\, F$ и последовательности неотрицательных чисел (λ_n) с $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Если $G \subset X$ и соответствие $G \times \{0\}$ полуидеально-выпукло, то говорят, что G – идеально-выпуклое множество.

ЗАМЕЧАНИЕ. Варианты понятия идеальной выпуклости появились впервые в [9] и [11] (см. также [1,12]). Различные идеально-выпуклые объекты и их свойства изучались в [13].

Данное определение идеально-выпуклого множества несколько отличается от определения, приведенного в [11], но они совпадают для секвенциально полных выпуклых множеств. Отметим также, что cs-компактные множества, введенные в [9] – это в точности ограниченные идеально-выпуклые множества.

Принятая здесь терминология в значительной степени мотивирована тем, что понятие (полу)идеальной выпуклости допускает простое эквивалентное описание в терминах монотонной (полу)полноты.

Выпуклое множество F в т.в.п. X называется монотонно замкнутым (монотонно полным), если для любой сходящейся последовательности (соответственно фундаментальной последовательности) (x_n) из F и для всякой ограниченной возрастающей последовательности (λ_n) из R таких, что

$$x_n \in \lambda_n F, \quad x_{n+1} - x_n \in (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\cdot F, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

имеем: $x \in \lambda F$, где $x = \lim x_n$, $\lambda = \lim \lambda_n$ (соответственно существует предел $x = \lim x_n$ и $x \in \lambda F$, где $\lambda = \lim \lambda_n$). Это определение можно перефразировать, воспользовавшись преобразованием Хермандера $H(F) = \{(x,\lambda) \in X \times R : \lambda \geq 0, x \in \lambda F\}$ множества F. Именно, выпуклое множество F монотонно замкнуто (монотонно полно), если для любой сходящейся последовательности (соответственно фундаментальной последовательности) (x_n, λ_n) в $H(F)$, возрастающей относительно предпорядка в $X \times R$, задаваемого конусом $H(F)$, имеем, что $\lim (x_n, \lambda_n) \in H(F)$ (соответственно существует предел $(x,\lambda) = \lim (x_n, \lambda_n)$ и $(x,\lambda) \in H(F)$).

Пусть теперь F - выпуклое соответствие из X в Y. Говорят, что F монотонно полуполно, если оно монотонно замкнуто, а эффективное множество $dom\, F$ монотонно полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. (1) Выпуклое множество в т.в.п. cs-замкнуто в том и только в том случае, если оно монотонно замкнуто;

(2) Соответствие из метризуемого л.в.п. в произвольное т.в.п. полуидеально-выпукло в том и только в том случае, если оно выпукло и монотонно полуполно.

Элементарное доказательство этого факта опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть X и Y - т.в.п., а F - полуидеально-выпуклое или выпуклое и монотонно полуполное соответствие из X в Y. Предположим, что либо $dom\, F$ ограничено, либо X метризуемо. Тогда соответствие F полутканно в любой точке $x_0 \in dom\, F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 = 0$. Если dom – ограниченное множество, то постоянное отображение

$$\omega : (n_1, \dots, n_k) \longmapsto dom\, F, \ (n_1, \dots, n_k) \in I,$$

представляет собой совершенную ткань множества $dom\, F$. Если же X метризуемо и (U_n) – базис закругленных окрестностей нуля в X такой, что $U_1 = X$ и $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n, n = 1, 2, \dots,$ то полусовершенную ткань соответствия F можно определить формулой

$$\omega : (n_1, \dots, n_k) \longmapsto U_k \cap dom\, F.$$

При этом в обоих случаях всякая последовательность (λ_n) строго положительных чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$, ω – ассоциирована с любой последовательностью натуральных чисел (n_k).

§2. Принцип открытости

Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 2.I. Пусть X и Y – т.в.п., F – выпуклое полутканное соответствие из X в Y, и предположим, что множество $F[X] \cap -F[X]$ второй категории в Y. Тогда существует последовательность (G_k) соответствий из X в Y, удовлетворяющая условиям:

I) $G_k \subset F$ и $G_{k+1} \subset G_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$;

2) для всякой последовательности (x_k, y_k) из условий $y_k \in G_k(x_k)$, $k = 1, 2, \dots,$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится к некоторому $x \in X$, а если сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ к элементу $y \in Y$, то $(x, y) \in F$;

3) множество $\overline{G_n[X]}$ есть окрестность нуля для всех $k = 1, 2, \dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – совершенная ткань множества $dom\, F$. Поскольку $dom\, F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega(k_1)$, имеем

$$F[X] \cap -F[X] = \bigcup_{k_1, k_1' = 1}^{\infty} F[\omega(k_1)] \cap -F[\omega(k_1')].$$

Так как множество в левой части этого равенства второй категории, найдутся такие номера n_1 и n_1', что замыкание множества $F[\omega(n_1)] \cap -F[\omega(n_1')]$ имеет непустую внутренность. Положим $e_1 = \omega(n_1)$ и $e_1' = \omega(n_1')$. Далее,

$$F[e_1] \cap -F[e_1'] = \bigcup_{k_2, k_2' = 1}^{\infty} F[\omega(n_1, k_2)] \cap -F[\omega(n_1', k_2')],$$

стало быть, по тем же соображениям, замыкание множества $F[\omega(n_1, n_2)] \cap -F[\omega(n_1', n_2')]$ имеет непустую внутренность при некоторых $n_2, n_2' \in N$. Обозначим $e_2 = \omega(n_1, n_2)$ и $e_2' = \omega(n_1', n_2')$. Продолжая этот процесс, получим последовательности $(n_k), (n_k'), (e_k)$ и (e_k'), причем

$$int(\overline{F[e_k] \cap -F[e_k']}) \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть (λ_k) и (λ_k') – последовательности неотрицательных чисел, ω-ассоциированные с (n_k) и (n_k') соответственно, причем можем считать, не умаляя общности, что $0 < \lambda_k, \lambda_k' < 1$, $\lambda_{k+1} < \frac{1}{2}\lambda_k$ и $\lambda_{k+1}' < \frac{1}{2}\lambda_k'$ для всех k. Положим $\nu_k = \min\{\lambda_k, \lambda_k'\}$ и

$$G_k = [0, \tfrac{\nu_k}{2}] e_k \times Y \cap F + [0, \tfrac{\nu_k}{2}] e_k' \times Y \cap F.$$

Поскольку последовательности (e_k) и (e_k') убывают, а F выпукло, то $G_k \subset F$ и $G_{k+1} \subset G_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Если окрестность нуля $U \subset X$ и $x \in X$ таковы, что $x + U$ содержится в замыкании $F[e_n] \cap -F[e_n']$, то

$$U \subset \tfrac{1}{2}U + \tfrac{1}{2}U \subset \tfrac{1}{2}\overline{F[e_n]} + \tfrac{1}{2}\overline{F[e_n']} \subset$$

$$\subset \overline{\tfrac{1}{\nu_k} G[X] + \tfrac{1}{\nu_k} G_k[X]} \subset \tfrac{2}{\nu_k}\overline{G_k[X]}.$$

Таким образом, $\overline{G_k(X]}$ – окрестность нуля.

Рассмотрим теперь последовательность $((x_n, y_k), y_k \in G_k(x_k)$ и представим ее в виде

$$(x_k, y_k) = \frac{\alpha_k}{2}(x_k^1, y_k^1) + \frac{\beta_k}{2}(x_k^2, y_k^2),$$

где $\alpha_k, \beta_k \in [0, V_k]$, $(x_k^1, y_k^1) \in F$, $(x_n^2, y_k^2) \in F$, $x_k^1 \in e_k$, $x_k^2 \in e_k^1$, причем можем считать, что $\alpha_k + \beta_k > 0$. В силу лу тканности множества $dom\, F$ ряды $\sum \alpha_k x_k^1$ и $\sum \beta_k x_k^2$ сходятся, но тогда сходится и ряд $\sum x_k$ к некоторому $x \in X$. Допустим, что ряд $\sum y_k$ также сходится, и обозначим через y его сумму. Тогда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\lambda_k}{2\lambda_k} x_k^1 + \frac{\beta_k}{2\lambda_k} x_k^2\right), \quad y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\alpha_n}{2\lambda_k} y_k^1 + \frac{\beta_k}{2\lambda_k} y_k^2\right),$$

где $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k$. Принимая во внимание неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leq 1$ и cs-замкнутость соответствия F, получаем $(x, y) \in F$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть X – т.в.п., Y – индуктивный предел бэровских метризуемых т.в.п. и F – выпуклое соответствие из X в Y. Предположим, что $y_0 \in core\, F[X]$ и F полутканно в точке $x_0 \in F^{-1}[y_0]$. Тогда соответствие F открыто в точке (x_0, y_0).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно предположить, что $X_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Пусть $Y = \varinjlim T_\alpha[Y_\alpha]$, где Y_α – метризуемые бэровские т.в.п. и $T_\alpha : Y_\alpha \to Y$ – линейные непрерывные операторы. Обозначим через u_α оператор из $X \times Y_\alpha$ в $X \times Y$, действующий по правилу $u_\alpha : (x, y) \mapsto (x, T_\alpha y)$, и пусть $F_\alpha = u_\alpha^{-1}(F)$. Рассмотрим произвольную топологическую нить (U_n) в X. Положим $V_n = (\frac{1}{2^n}F)[U_n] \cap -(\frac{1}{2^n}F)[U_n]$ и $V_n^\alpha = (\frac{1}{2^n}F_\alpha)[U_n] \cap -(\frac{1}{2^n}F_\alpha)[U_n]$. Тогда $V_n^\alpha = T_\alpha^{-1}[V]$ для любых α и n, а по определению индуктивного предела нить (V_n) является топологической, если (V_n^α) – топологическая нить в Y_α при всех α. Последнее же имеет место, если соответствия F_α открыты в нуль. Легко видеть, что $F_\alpha[X]$ – поглощающее подмножество в и F_α – выпуклое соответствие из X в Y_α, полутканное в точке $x_0=0$. Таким образом, без ограничения общности можно ограничиться случаем, когда Y – бэровское метризуемое т.в.п.

Воспользуемся теперь леммой 2.I. Пусть последовательность соответствий (G_k) удовлетворяет условиям I)–3) этой леммы. Тогда для любой окрестности нуля $U \subset X$ существует такой номер k_0, что $\sum\limits_{k=k_0}^{m} dom\, G_k \subset U$ для всех $m > k_0$. В самом деле, если это не так, то найдутся окрестности нуля $U \subset X$ и возрастающие последовательности натуральных чисел (n_k) и (m_k) и последовательность (x_k), $x_k \in dom G_k$, такие, что $m_k < n_{k+1}$ и $\sum\limits_{i=n_k}^{m_k} x_i \notin U$. Это, однако, невозможно, так как ряд $\sum x_k$ должен быть сходящимся в силу условия 2) леммы 2.I.

Пусть (V_k) – базис фильтра окрестностей нуля в Y такой, что $V_{k+1}+V_{k+1} \subset V_k$, $k=1,2,\dots$, и $V_k \subset \overline{G_k[X]}$. Тогда для всех k имеем

$$V_k \subset G_k[X] + V_{k+1}.$$

Для произвольной окрестности нуля $U \subset X$ выберем такой номер k_0, чтобы $\bigcup\limits_{m} \sum\limits_{k=k_0}^{m} dom\, G_k \subset U$, и покажем, что тогда $F[U] \supset V_{k_0}$. В самом деле, если $y_0 \in V_{k_0}$, то существует такая последовательность $(x_n, z_n) \in G_n$, $n > k_0$, что

$$y_n = z_n + y_{n+1}.$$

Суммируя это равенство по n от k_0 до $m > k_0$, получаем

$$y_{k_0} = \sum_{n=k_0}^{m} z_n + y_{m+1},$$

и, поскольку $y_{m+1} \longrightarrow 0$, ряд $\sum z_n$ сходится к y_{k_0}. В силу условия 2) леммы и выбора окрестности U ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ сходится к некоторому $x_0 \in U$, причем $(x_0, y_{k_0}) \in F$. Итак, $F[U] \supset V_{k_0}$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. П у с т ь X – т.в.п., Y –

индуктивный предел бэровских т.в.п., F – выпуклое замкнутое соответствие из X в Y. Пусть $y_0 \in \operatorname{core} F[X]$, $x_0 \in F^{-1}[y_0]$ и множество $\operatorname{dom} F$ тканно в точке x_0. Тогда соответствие F открыто в точке (x_0, y_0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.2, найдется последовательность (V_k) окрестностей нуля в Y такая, что

$$V_k \subset G_k[X] + V_{k+1}.$$

Пусть U и k_0 те же и $y_0 \in V_{k_0}$. Тогда опять существуют последовательности $y_k \in V_k$ и $((x_k, z_k)) \subset F$, $k \geq k_0$, такие, что

$$y_{k_0} = \sum_{n=k_0}^{m} z_n + y_{m+1}, \quad m \geq k_0.$$

Пусть $V \subset Y$ – произвольная окрестность нуля. Тогда

$$y_{m+1} \in V_{m+1} \subset G_{m+1}[X] + V,$$

стало быть, $y_{m+1} - z_{m+1}' \in V$ и $(x_{m+1}', z_{m+1}') \in G_{m+1}$ для некоторых x_{m+1}' и z_{m+1}'. Отсюда вытекает, что

$$y_{k_0} - \sum_{n=k_0}^{m} z_n - z_{m+1}' \in V, \quad m > k_0.$$

Ряд $\sum_{n=k_0}^{\infty} x_n$ по-прежнему сходится к некоторому $x_0 \in U$, поэтому для произвольной окрестности нуля $U_0 \subset X$ номер m можно выбрать так, чтобы $x_0 - \sum_{n=k_0}^{m} x_n \in U_0$ и $x_{m+1}' \in U_0$, откуда имеем

$$x_0 - \sum_{n=k_0}^{m} x_n - x_{m+1}' \in 2U_0.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=k_0}^{m} (x_n, z_n) + (x_{m+1}', z_{m+1}') \in F \cap [(x_0, y_0) + 2U_0 \times V],$$

что в силу замкнутости F и произвольности U_0 и V влечет $(x_0, y_0) \in F$.

Из теоремы 2.3 и предложения 1.3 вытекает следующий результат, который по существу содержится в [I].

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X и Y – т.в.п., F – выпуклое соответствие из X в Y и предположим, что выполнено одно из следующих условий:

I) Y – индуктивный предел бэровских метризуемых пространств, а F полуидеально-выпукло;

2) Y – индуктивный предел бэровских т.в.п., и F замкнуто.

Если, кроме того, либо X метризуемо, либо $\operatorname{dom} F$ ограничено, то соответствие F открыто в любой точке $(x_0, y_0) \in F$, для которой $y_0 \in \operatorname{core} F[X]$.

§3. Некоторые приложения.

В этом параграфе применим полученные результаты к вопросу об автоматической открытости и непрерывности выпуклых операторов. Обозначим $Y^\bullet = Y \cup \{+\infty\}$, где Y – упорядоченное векторное пространство, а $+\infty$ – наибольший элемент пространства $Y^\bullet$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляры. Будем использовать также стандартные обозначения для эффективного множества $\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ и надграфика $\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \leq y\}$, где $f : X \to Y^\bullet$. Если X и Y – т.в.п., то отображение f из X в $Y^\bullet$ называется открытым в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, если в точке $(x_0, f(x_0))$ открыто соответствие $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{dom} f\}$. Иными словами, f открыто в точке x_0 в том и только в том случае, если $f[U \cap \operatorname{dom} f]$ есть окрестность точки $f(x_0)$ для любой окрестности U точки x_0. Известно, что теорема Банаха о гомоморфизме не сохраняется, если в ней заменить линейный оператор на выпуклый (или даже на сублинейный) оператор. Однако при некоторых дополнительных предположениях справедлив аналогичный результат.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть X – упорядоченное т.в.п. с нормальным положительным конусом X^+, Y — индуктивный предел бэровских метризуемых пространств, упорядоченный посредством конуса $Y^\bullet$. Предположим, что $f: X \to Y^\bullet$ — выпуклый оператор, $x_0 \in int(dom\, f)$ и выполнены условия:

I) $y_0 = f(x_0) \in int(f[dom\, f])$;

2) сужение f на $dom\, f$ взаимнооднозначно, а обратное к нему отображение возрастает;

3) соответствие $epi\, f$ полутканно в точке x_0. Тогда f открыто в точке x_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предположить, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Соответствие $epi\, f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2, следовательно, оно открыто в нуле. Пусть U — симметричная и нормальная окрестность нуля в X, содержащаяся в $dom\, f$, и выберем симметричную окрестность V нуля в Y таким образом, чтобы $V \subset (epi\, f)[U]$. Нетрудно видеть, что тогда имеет место включение $V \subset f[U] + Y^+$. Поскольку в силу выпуклости f имеем $-f[U] \subset f[U] - Y^+$, то верно также, что $V \subset f[U] - Y^+$, стало быть, $V \subset n_Y(f[U])$, где $n_Z(V) = (V + Z^+) \cap (V - Z^+)$ — нормальная оболочка множества V в упорядоченном векторном пространстве Z. Принимая во внимание монотонность оператора f^{-1}, легко проверить, что $n_Y(f[U]) \cap f[dom\, f] \subset \subset f[n_X(U)]$. Наконец, в виду условия I) теоремы и нормальности множества U, $n_X(U) = U$, заключаем, что $f[U]$ — окрестность нуля.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть X — тканное упорядоченное т.в.п. с нормальным положительным конусом, а Y — упорядоченное т.в.п., являющееся индуктивным пределом бэровских т.в.п. Пусть $f: X \to Y^\bullet$ — выпуклый оператор с замкнутым надграфиком, $x_0 \in int(dom\, f)$ и выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.1. Тогда оператор f открыт в точке x_0.

Доказательство повторяет предыдущие рассуждения с той только разницей, что нужно привлечь теорему 2.3 вместо теоремы 2.2.

Сформулируем теперь соответствующие результаты о непрерывности выпуклых операторов.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть X – индуктивный предел бэровских метризуемых т.в.п., Y – упорядоченное т.в.п. с нормальным положительным конусом, $f: X \to Y^{\cdot}$ – выпуклый оператор. Если $x_0 \in core(dom f)$ и $(epi f)^{-1} \subset Y \times X$ полутканно в точке $f(x_0)$, то оператор f непрерывен в точке x_0.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть X – индуктивный предел бэровских т.в.п., Y – упорядоченное т.в.п. с нормальным положительным конусом и $f: X \to Y^{\cdot}$ – выпуклый оператор, обладающий замкнутым надграфиком $epi f$. Если при этом $x_0 \in core(dom f)$, а множества $f[X]$ и Y^+ тканны в точке $f(x_0)$ и в нуле соответственно, то оператор f непрерывен в точке x_0.

Доказательство этих двух теорем проводится по той же схеме, что и в [4] с использованием теорем 2.1 и 2.2. Полутканность соответсвия $(epi f)^{-1}$ в теореме 3.4 следует из того, что сумма $f[X] + Y^+$ есть тканное в точке $f(x_0)$ множество, поскольку тканны $f[X]$ в точке $f(x_0)$ и Y^+ в нуле.

Из теорем 3.1 и 3.3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть X и Y – пространства Фреше, упорядоченные нормальными конусами. Пусть f – взаимно-однозначное выпуклое отображение X на все Y, обладающее монотонным возрастающим или убывающим обратным f^{-1}. Если, кроме того, надграфик $epi f$ cs-замкнут, то f – гомеоморфизм.

ЛИТЕРАТУРА

1. JAMESON G.J.O. Convex series. - Proc. Cambridge Phil. Soc., 1972, v.72, N1, p.37-48.
2. URSESCU C. Multifunctions with convex closed graph. - Czechoslovac Math.J., 1975, v.25, N3, p.438-441.
3. ROBINSON S.M. Regularity and stability for convex multivalued functions. - Math. Oper. Res., 1976, v.1, N2, p.130-143.
4. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения несплющенности в выпуклом анализе. - Сиб. мат. журн., 1981, т.22, № 6, с. 102-125.
5. ПТАК В. Полнота и теорема об открытом отображении. - Математика, 1960, т.4, № 6, с.39-67.
6. КЕЛЛИ Дж. Гиперполные топологические линейные пространства.- Математика, 1960, т.4, № 6, с.80-92.
7. DE WILDE M. Closed graph theorems and webbed spaces. - London: Academia Press, 1978.
8. ROBERTSON W. On the closed graph theorems and spaces with webs. - London Math. Soc., 1972, v. 24, N4, p.692-738.
9. JAMESON G.J.O. Ordered linear spaces. - Berlin, a.o.: 1970.
10. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
11. ЛИФШИЦ Е.М. Идеально выпуклые множества. - Функц. анализ и его прилож., 1970, т.4, вып. 4, с.76-77.

12. HOLMES P. Geometric functional analysis. - Berlin a.o.: Springer, 1975.
13. RODE G. Superconvexe analysis. - Arch. Math., 1980, v.34, N5, p. 452-462.
14. BAKER J.W. Continuity in ordered spaces. - Math. Z., 1968, v.104, N3, p.231-246.

Поступила в ред.-изд. отдел
I3.I2.I983 г.