Выпуск 32(49) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Выпуклый анализ

УДК 519.853+519.632

О РЕШЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

К.Гроссман, А.А.Каплан

Конечномерная аппроксимация вариационных неравенств, отвечающих некоторым практически важным задачам математической физики, приводит к специфическим задачам выпуклого программирования. Погрешность, возникающая в результате аппроксимации, определяет пределы разумной точности решения порожденных экстремальных задач. В данной работе исследуется вопрос об использовании для решения таких задач метода штрафов, в котором выбор параметра штрафа согласуется с точностью аппроксимации. При избранном способе согласования решение конечномерной задачи с нужной точностью достигается за один шаг метода штрафов, причем введение штрафа не увеличивает "овражности" минимизируемой функции.

Основные идеи избранного подхода изложены применительно к следующей модельной задаче.

Рассматривается вариационная задача

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2qu \right] dx\,dy \to \min! \quad (1)$$

при условии

$$u \in K \equiv \{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \rho_1 \leq w \leq \rho_2 \text{ на } \Omega \}. \quad (2)$$

Здесь $\rho_1, \rho_2 \in W_\infty^2(\hat{\Omega})$, $q \in C(\bar{\Omega})$ – заданные функции, $\rho_1 < \rho_2$ на $\hat{\Omega}$; $\bar{\Omega}$ – замыкание Ω , а область $\hat{\Omega} \supset \Omega$ более точно будет определена ниже. Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет условию конуса и ее граница достаточно гладкая (кусочно).

I°. Для решения задачи (I)-(2) применяется метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Чтобы сразу не углубляться в проблемы, связанные с построением аппроксимаций, обеспечивающих хорошую обусловленность гессиана минимизируемого функционала в дискретизованных задачах и требуемую точность учета граничных условий, предполагаем вначале, что $\Omega = \{(x,y): 0<x<1,\ 0<y<1\}$ и для искомого элемента $\bar{u}$ гарантировано включение $\bar{u} \in W_2^2(\Omega)$.

Приближенное решение задачи (I)-(2) ищется в виде

$$u_h(x,u) = \sum_{i,j=1}^{N-1} u_{ij}\,\varphi_{ij}(x,y), \tag{3}$$

где $N>0$ – целое, $h = 1/N$,

$$\varphi_{ij}(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{h}-i,\ \frac{y}{h}-j\right),$$

а

$$\varphi(s,t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|s|+|t|+|s-t|}{2} & \text{при } |s|+|t|+|s-t| \le 2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Носителем функции φ_{ij} является множество

$$D_{ij} = \left\{(x,y): \left|\frac{x}{h}-i\right| + \left|\frac{y}{h}-j\right| + \left|\frac{x-y}{h}-i+j\right| \le 2\right\}.$$

Ясно, что $u_{ij} = u_h(ih, jh)$ и, значит,

$$J(u_h) = \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left[\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h}\right)^2\right] -$$

$$- h^2 \sum_{i,j=1}^{N-1} q_{ij}\,u_{ij}. \tag{4}$$

Здесь

$$u_{0j} = u_{Nj} = 0\ (j=0,1,\ldots,N),$$

$$u_{i0} = u_{iN} = 0\ (i=0,1,\ldots,N),$$

$$q_{ij}=h^{-2}\int_{Q} q\varphi_{ij}\,dx\,dy=h^{-2}\int_{D_{ij}} q\varphi_{ij}\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Множество K_h функций u_h вида (3) при условиях

$$\rho_1^{ij}\leqslant u_{ij}\leqslant\rho_2^{ij},\qquad i,j=1,\dots,N-1,$$

$$(\rho_1^{ij}\equiv\rho_1(ih,jh),\ \rho_2^{ij}\equiv\rho_2(ih,jh))$$

определяет внутреннюю в смысле [I] аппроксимацию множества K.

Обозначая

$$\underline{u}=(u_{11},\dots,u_{1,N-1},\ u_{21},\dots,u_{2,N-1},\dots$$

$$\dots,u_{N-1,1},\dots,u_{N-1,N-1}),$$

$$f_h(\underline{u})=J(u_h)\Big|_{\substack{u_{0j}=u_{Nj}=0,\\ u_{i0}=u_{iN}=0,\quad i,j=0,1,\dots,N,}}$$

можем перейти от аппроксимирующей задачи

$$J(u_h)-\min! \qquad u_h\in K_h \qquad (6)$$

к эквивалентной ей задаче

$$f_h(\underline{u})-\min! \qquad (7)$$

$$\underline{u}\in G_h\equiv\{z\in R^{(N-1)^2}:\rho_1^{ij}\leqslant z_{ij}\leqslant\rho_2^{ij}\ \text{для}\ i,j=1,\dots,N-1\}. \qquad (8)$$

Попытаемся оценить оптимальные значения двойственных переменных для задачи (7)-(8). Обозначая через $\underline{u}^h\equiv\{u_{ij}^h\}_{i,j=1,\dots,N-1}$ ее решение, определим множества

$$I^1=\{(i,j):u_{ij}^h=\rho_1^{ij}\}, \qquad (9)$$

$$I^2=\{(i,j):u_{ij}^h=\rho_2^{ij}\}.$$

Согласно признаку оптимальности, двойственные переменные λ_{ij}, отвечающие оптимальной точке u^k, выражаются следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} & \text{, если } (i,j) \in I^2, \\ \dfrac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} & \text{, если } (i,j) \in I^1, \\ 0 & \text{, если } (i,j) \notin I^1 \cup I^2. \end{cases}$$

Но

$$\frac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} = 4u_{ij}^k - u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k - u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k - q_{ij}h^2$$

и при $(i,j) \in I^2$ должно быть $\dfrac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} \leq 0$. Тем самым с учетом $u^k \in G_h$ имеем

$$4\rho_2^{ij} - \rho_2^{i+1,j} - \rho_2^{i-1,j} - \rho_2^{i,j+1} - \rho_2^{i,j-1} - q_{ij}h^2 \leq$$
$$\leq \frac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} \leq 0.$$

Соответственно, при $(i,j) \in I^1$

$$4\rho_1^{ij} - \rho_1^{i+1,j} - \rho_1^{i-1,j} - \rho_1^{i,j+1} - \rho_1^{i,j-1} - q_{ij}h^2 \geq$$
$$\geq \frac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}} \geq 0,$$

так что, если $\rho_1, \rho_2 \in W_\infty^2(\Omega)$, получаем

$$\left|\frac{\partial f_h(u^k)}{\partial u_{ij}}\right| \leq ch^2, \quad i,j = 1,\dots,N-1,$$

и, значит,

$$\lambda_{ij} \leq ch^2, \quad (i,j) \in I^1 \cup I^2, \tag{10}$$

где c - не зависящая от h константа.

Если L - общая константа Липшица для градиентов функций ρ_1 и ρ_2 на Ω, то в качестве c годится

$$c = 2L + \sup_{(x,y)\in\Omega} |q(x,y)|. \tag{11}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задача упругопластического кручения цилиндрического стержня состоит в минимизации функционала (1) (с $q = const. > 0$) на множестве

$$\tilde{K} = \{u \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega) : |\nabla u| \le 1 \text{ на } \Omega\}.$$

Она, как известно, приводится к виду (1)-(2), причем $\rho_2(x,y) = dist((x,y), \Gamma)$, а ограничения снизу на u по существу отсутствуют. В случае, если Γ есть объединение конечного числа кривых из класса C^3, решение этой задачи $\bar{u}$ принадлежит $W_p^2(\Omega)$, $1<p<+\infty$, и $\bar{u}/_{\Omega_0} \in W_\infty^2(\Omega_0)$ при условии, что $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ [3].

Отметим, что в данном случае функция ρ_2 не принадлежит $W_\infty^2(\Omega)$. Однако, если, например, Ω - выпуклый многогранник, то за счет малого изменения внутри зоны упругости*), где $\bar{u} < \rho_2$, она может быть сглажена так, что полученная в результате функция $\hat{\rho}$ принадлежит $C^2(\bar{\Omega})$ и ее использование вместо ρ_2 не меняет $\bar{u}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Более сложным путем (с использованием предложения 1.4.1 из [5])соотношение (10) устанавливается в случае, когда ρ_1, ρ_2 не обладают указанной выше гладкостью, но гарантировано, что $\bar{u} \in W_\infty^2(\Omega)$.

2°. При решении задачи (7)-(8) методом штрафов, учитывая условие (8) с помощью функции штрафа

$$\Phi_h(\underline{u}) = \alpha \sum_{i,j=1}^{N-1} (-u_{ij} + \rho_1^{ij} + \sqrt{(\rho_1^{ij} - u_{ij})^2 + \tau}\,) +$$

$$+ \alpha \sum_{i,j=1}^{N-1} (u_{ij} - \rho_2^{ij} + \sqrt{(u_{ij} - \rho_2^{ij})^2 + \tau}\,), \tag{12}$$

(см. [2]), согласуем выбор положительных параметров α и τ с шагом сетки h.

*) О распределении зон упругости и пластичности см. [3].

Соответствующая вспомогательная задача состоит в безусловной минимизации функции

$$F_h(\underline{u}) = f_h(\underline{u}) + \Phi_h(\underline{u}). \qquad (13)$$

Пусть $\tilde{u}^h = \arg\min_{\underline{u}\in R^{(N-1)^2}} F_h(\underline{u})$.

Оценим обусловленность матрицы $F_h''(\underline{u})$ в окрестности точки $\tilde{u}^h$.

Как известно (см., например, [4]), постоянная матрица $A = f_h''(\underline{u})$ размерности $(N-1)^2 \times (N-1)^2$ имеет собственные числа

$$\lambda_{k,l} = 4\left(\sin^2\frac{k\pi h}{2} + \sin^2\frac{l\pi h}{2}\right), \quad k,l = 1,\dots,N-1.$$

Тем самым ρ–число обусловленности этой матрицы суть*)

$$\rho_A = \frac{\max\limits_{k,l}\lambda_{kl}}{\min\limits_{k,l}\lambda_{kl}} = \frac{\sin^2\frac{N-1}{2N}\pi}{\sin^2\frac{1}{2N}\pi} \approx 4h^{-2}\pi^2.$$

Матрица $B(\underline{u}) = \Phi_h''(\underline{u})$ имеет вид

$$B(u) = \alpha z\cdot \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{[(\rho_1^{ij}-u_{ij})^2+z]^{3/2}} + \frac{1}{[(u_{ij}-\rho_2^{ij})^2+z]^{3/2}}\right\}$$

и для ее собственных чисел μ_{kl} справедливы оценки

$$\max_{k,l}\mu_{kl} \le 2\alpha z^{-1/2},$$

$$\min_{k,l}\mu_{kl} \ge \frac{1}{\sqrt{2}(d_2-d_1)^3}\,\alpha z,$$

– последняя при условии, что $d_1 < \inf\limits_{(x,y)\in\Omega}\rho_1(x,y)$.

---

*) С учетом структуры такие матрицы принято считать хорошо обусловленными [6].

$d_2 > \sup\limits_{(x,y)\in Q} \rho_2(x,y), \quad \tau < (d_2 - d_1)^2$ и
$d_1 \leqslant u_{ij} \leqslant d_2$ для $i,j = 1, \ldots, N-1$.

Из принципа Релея следует, что для максимального собственного числа γ_{max} матрицы $F_h''(\underline{u})$ имеет место оценка

$$\gamma_{max} = \max_{|z|\neq 0} \frac{z^T (A + B(\underline{u}))z}{z^T z} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|z|\neq 0} \frac{z^T A z}{z^T z} + \max_{|z|\neq 0} \frac{z^T B(\underline{u}) z}{z^T z} \leqslant$$

$$\leqslant 8 \sin^2 \frac{N-1}{2N}\pi + 2a\tau^{-1/2},$$

а

$$\gamma_{min} = \min_{|z|\neq 0} \frac{z^T (A + B(\underline{u}))z}{z^T z} \geqslant$$

$$\geqslant 8 \sin^2 \frac{h\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}(d_2 - d_1)^3} a\tau .$$

Следовательно, ρ -число обусловленности матрицы $F_h''(\underline{u})$ можно оценить сверху:

$$\rho \leqslant \frac{8\sin^2 \frac{N-1}{2N}\pi + 2a\tau^{-1/2}}{8\sin^2 \frac{1}{2N}\pi + \frac{1}{\sqrt{2}(d_2-d_1)^3} a\tau} . \qquad ([illegible])$$

3°. Определим функции

$$\tilde{u}_h(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \tilde{u}_{ij}^h \varphi_{ij}(x,y),$$

$$u_h(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N-1} u_{ij}^h \varphi_{ij}(x,y),$$

которые являются кусочно-линейными восполнениями, отвечающими векторам $\tilde{u}^h$ и $\underline{u}^h$, и оценим величину $|\tilde{u}_h - u_h|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}$.

При использовании семейства функций штрафа (I2) с условием $\tau \to 0$ из общих теорем о сходимости метода штрафов (см.[ ]) вытекает следующий результат.

Если

$$a > \max_{1 \le i,j \le N-1} \lambda_{ij} \qquad (I5)$$

(где, напомним, λ_{ij} – оптимальные значения множителей Лагранжа), $u^0 \in \operatorname{int} G$ – вектор в $R^{(N-1)^2}$ с компонентами $u^0_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_1^{ij} + \rho_2^{ij})$, выбор фиксированного значения параметра τ подчинен условию

$$\tau < \frac{1}{2} \min_{1 \le i,j \le N-1} (\rho_2^{ij} - \rho_1^{ij}) \qquad (I6)$$

и $\tilde{u}^h \in G_h$, то

$$f_h(\tilde{u}^h) - f_h(\underline{u}^h) <$$

$$< 2(N-1)\sqrt{\frac{2(f_h(u^0) - f_h(\underline{u}^h))}{\min\limits_{1 \le i,j \le N-1} (\rho_2^{ij} - \rho_1^{ij})}}\sqrt{a\tau}\ . \qquad (I7)$$

Но

$$f_h(\tilde{u}^h) - f_h(\underline{u}^h) = J(\tilde{u}_h) - J(u_h) =$$

$$= J'(u_h)(\tilde{u}_h - u_h) + \frac{1}{2} J''(u_h)(\tilde{u}_h - u_h, \tilde{u}_h - u_h) =$$

$$= J'(u_h)(\tilde{u}_h - u_h) + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}$$

Здесь $J'(u_h)$, $J''(u_h)$ – производные Фреше и $J'(u_h)(\tilde{u}_h - u_h) \ge 0$, так как

$$u_h = \arg\min_{u \in K_h} J(u).$$

Тем самым

$$f_h(\tilde{u}^h) - f_h(\underline{u}^h) \geqslant \frac{1}{2} \| \tilde{u}_h - u_h \|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)},$$

что вместе с (I7) дает

$$\| \tilde{u}_h - u_h \|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} < 4(N-1) \sqrt{\frac{2(f_h(u^\circ) - f_h(u^*))}{\gamma_h}} \sqrt{a\tau}, \quad (I8)$$

где

$$\gamma_h = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant N-1} (\rho_2^{ij} - \rho_1^{ij}). \quad (I9)$$

4^0. Исследуем вопрос о выборе параметров α и τ, при котором обеспечена хорошая обусловленность матрицы $F''(\underline{u})$ в достаточно широкой окрестности $\underline{u}^h$ и возможно более высокая точность оценки (I8).

Заметим, что матрица $F''_h(\underline{u})$ имеет такую же структуру, как и A. Для небольших h на основании (I4) имеем

$$P_{F''_h(\underline{u})} \leqslant \frac{8 + 2(a\tau)\tau^{-3/2}}{\pi^2 h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}(d_2 - d_1)^3} a\tau}. \quad (20)$$

Чтобы оценка (I8) была эффективна, необходимо выполнение соотношения $h^{-1}\sqrt{a\tau} \to 0$ при $h \to 0$.

При этом условии величина в правой части неравенства (20) по порядку не лучше h^{-2}, а для достижения порядка h^{-2} нужно, чтобы $a\tau^{-1/2}$ было ограничено при $h \to 0$:

$$a\tau^{-1/2} \leqslant c_1. \quad (2I)$$

Для того чтобы гарантировать выполнение неравенства (I5), ввиду (II) достаточно взять $\alpha = d h^2$, где $d - const.$, $d > c$. Тогда из (2I) следует $\tau \geqslant \frac{a^2}{c_1^2} > \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 h^4$, и ввиду произвола в выборе c_1 можно считать $(c/c_1)^2 < 1$. Замечая теперь, что с точки зрения оценки (I8) желательно, чтобы произведение $a\tau$ было возможно меньше, естественно выбрать

$$\tau = h^4, \quad a = d h^2. \quad (22)$$

5°. Покажем теперь, что при некотором уточнении константы α имеет место требуемое включение $\tilde{u}^{h} \in G_h$. Пусть v – фиксированная граничная точка множества ${}^{h}G_h$ ($v_{kl} = \rho_2^{kl}$ при фиксированных k, l). Для производной $\dfrac{\partial F_h(v)}{\partial v_{kl}}$ имеем оценку

$$\frac{\partial F_h(v)}{\partial v_{kl}} = 4\rho_2^{kl} - v_{k+1,l} - v_{k-1,l} - v_{k,l+1} -$$

$$- v_{k,l-1} - q_{kl} h^2 + \alpha h^2 \frac{\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl}}{\sqrt{(\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl})^2 + h^4}} \geqslant$$

$$\geqslant 4\rho_2^{kl} - \rho_2^{k+1,l} - \rho_2^{k-1,l} - \rho_2^{k,l+1} - \rho_2^{k,l-1} -$$

$$- q_{kl} h^2 + \alpha h^2 \frac{\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl}}{\sqrt{(\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl})^2 + h^4}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\alpha \frac{\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl}}{\sqrt{(\rho_2^{kl} - \rho_1^{kl})^2 + h^4}} - c\right] h^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\alpha \frac{\gamma_h}{\sqrt{\gamma_h^2 + h^4}} - c\right) h^2,$$

где γ_h определено согласно (I9). Считая, что $\hat{Q} \supset \{x : \inf_{y \in D} |x-y| < \delta\}$, $\delta > 0$ - const., можно указать $\gamma > 0$, при котором $\gamma_h \geqslant \gamma$ для всех h. Тем самым

$$\frac{\partial F_h(v)}{\partial v_{kl}} \geqslant \left(\alpha \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + h^4}} - c\right) h^2$$

и, если $h^2 < \gamma$, при $\alpha > c\sqrt{2}$ имеем $\dfrac{\partial F_h(v)}{\partial v_{kl}} > 0.$

Совершенно аналогично при $h^2 < \gamma$ и $\alpha > c\sqrt{2}$ получаем $\dfrac{\partial F_h(v)}{\partial v_{kl}} < 0$, если $v \in G_h$ и $v_{kl} = \rho_1^{kl}$ для некоторых kl.

Отсюда сразу следует, что в принятых предположениях относительно исходной задачи единственный минимум функции F_h на множестве G_h достигается внутри G_h и, ввиду выпуклости F_h, он является абсолютным минимумом F_h.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. Пусть для решения задачи (7)-(8) используется метод штрафов с функцией (I2), причем параметры функции штрафа a и τ выбраны следующим образом: $\tau = h^4$, $a = d h^2$, где $d > c\sqrt{2}$, а c удовлетворяет (10). Тогда при $h^2 \ll \gamma_h$ для восполнений $\tilde{u}_h$ и u_h справедлива оценка

$$|\tilde{u}_h - u_h|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} < 4\sqrt{\frac{2d(f_h(u^0) - f_h(u^h))}{\gamma_h}}\, h^2. \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фактически при доказательстве теоремы использовалось более слабое условие относительно функций ρ_1 и ρ_2: $\rho_1, \rho_2 \in W^2_\infty(\Omega)$, $\rho_1 < \rho_2$ на Ω. При этом выбор шага h, удовлетворяющий условию $h^2 \ll \gamma_h$, вообще говоря, не всегда возможен. В прикладных задачах, однако, такой выбор не встречает затруднений. Если $\bar{\gamma} = \inf_{(x,y)\in\Omega} (\rho_2(x,y) - \rho_1(x,y)) > 0$, из (23) следует первый (по h) порядок величины $|\tilde{u}_h - u_h|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$. При $\bar{\gamma} = 0$ он, вообще говоря, хуже.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Качество полученных оценок существенно определяется тем, насколько точно решение исходной задачи может быть аппроксимировано с помощью элементов u_h. Для задачи упругопластического кручения и задачи с препятствием[ж)] на хороших областях известна (см. [7], гл. 5) оценка

$$|\bar{u} - u_h|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \le q_1 h, \quad (24)$$

которая не может быть улучшена. Таким образом, порядок оценки (24) согласуется с (23).

ж) Относительно гладкости решений таких задач см. [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Распространение описанного подхода и доказанной выше теоремы для достаточно широкого класса областей не встречает каких-либо затруднений, если использовать простейший способ приближенного учета граничных условий - так называемый "снос". Однако такой учет граничных условий вносит погрешность порядка h, распространение которой может привести к потере точности.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При использовании подходящим образом сконструированных нерегулярных сеток простой снос граничных условий обеспечивает достаточную точность их учета. Кроме того, такие сетки удобно учитывают особенности определяемого решения.

Выбирая нерегулярную сетку, как описано в [4, с.69], ищем решения в виде

$$u_h = \sum_{k \in M_h} u_k \varphi_k ,$$

где φ_k - кусочно-линейная базисная функция, носителем которой является объединение элементов области с вершиной в точке (x_k, y_k), M_h - множество индексов внутренних узлов (x_k, y_k) сеточной области $\Omega_{ih}^{k} \subset \Omega$.

Тогда имеем

$$f_h(\underline{u}) \equiv J(u_h) = \frac{1}{2} a(u_h, u_h) - \int_\Omega q u_h \, dx\, dy,$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

$\underline{u}$ - вектор с компонентами u_k, $k \in M_h$.

В [4] показано, что у положительно-определенной матрицы $f_h''(\underline{u}) = \{ a(\varphi_k, \varphi_\ell) \}_{k, \ell \in M_h}$ максимальное собственное число ограничено сверху константой ρ, не зависящей от h, а минимальное собственное число имеет порядок h^2.

Пусть

$$\rho_1^h = \{ \rho_1(x_k, y_k) \}_{k \in M_h},$$

$$\rho_2^h = \{ \rho_2(x_k, y_k) \}_{k \in M_h}, \quad G_h = \{ \underline{u} : \rho_1^h \le \underline{u} \le \rho_2^h \},$$

$$\underline{u}^k = \arg\min_{\underline{u}\in G_h} f_h(\underline{u})$$

и множества I^1 и I^2 определены аналогично (10). Ввиду того, что $a(\varphi_l,\varphi_l)>0$, $a(\varphi_k,\varphi_l)\le 0$ при $k\ne l$, имеем

$$\frac{\partial f_h(\rho_2^h)}{\partial u_l} \le \frac{\partial f_h(\underline{u}^h)}{\partial u_l} \equiv \sum_{k\in M_h} u_k a(\varphi_k,\varphi_l) - \int_\Omega q\varphi_l\, dx\, dy < 0,$$

если $l\in I^2$, и

$$\frac{\partial f_h(\rho_1^h)}{\partial u_l} \ge \frac{\partial f_h(\underline{u}^h)}{\partial u_l} > 0,$$

если $l\in I^1$.

Для функции $\psi\in W_\infty^2(\Omega)$ на треугольнике Δ_{kj}, являющемся элементом $supp(\varphi_k)$, справедливы соотношения ($\tilde{\psi}$ - кусочно-линейное восполнение функции ψ)

$$\left|\int_{\Delta_{kj}} \nabla(\psi-\psi_h)\nabla\varphi_k\, dx\, dy\right| =$$

$$= \left|\int_{\partial\Delta_{kj}} (\psi-\psi_h)\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\, ds\right| \le c_1 h^{-1}\int_{\partial\Delta_{kj}} |\psi-\psi_h|\, ds,$$

$$|\psi-\psi_h|_{C(\partial\Delta_{kj})} \le c_2 h^2 |\psi|_{W_\infty^2(supp(\varphi_k))},$$

причем c_1, c_2 не зависят от h ($\partial\Delta_{kj}$ - граница Δ_{kj}). С их использованием нетрудно получить, что при $\rho_1,\rho_2\in W_\infty^2(\Omega)$ имеет место

$$\left|\sum_{k\in M_h}\rho_i(x_k,y_k)\, a(\varphi_k,\varphi_l)\right| \le \hat{c}h^2,\quad i=1,2;\ l\in M_h,$$

где $\hat{c}$ не зависит от h.

Из этого, как и ранее, следует, что оптимальные значения λ_k, $k\in I^1\cup I^2$, множителей Лагранжа для задачи

$$f_h(\underline{u}) - \min!$$

$$\underline{u}\in G_h$$

удовлетворяют неравенству

$$0 \leq \lambda_k \leq c h^2, \tag{25}$$

где c не зависит от h.

Дальнейшие рассуждения, связанные с выбором параметров функции штрафа и получением оценки типа (23), по существу повторяют доказательство приведенной выше теоремы.

Использование метода штрафов для учета граничных условий в классической задаче Дирихле, как известно (см., например, [6]), позволяет без потери порядка точности в норме $W_2^1(\Omega)$ пользоваться конечноэлементными аппроксимациями на равномерной сетке. При соответствующих предосторожностях ([4], §3.4) удается предотвратить и ухудшение обусловленности вспомогательных задач. Схема согласования параметров штрафа и аппроксимации в применении к вариационным неравенствам была предложена В.Я.Ривкиндом[8].

Развитие в данной работе существенно иного подхода, опирающегося на предварительную оценку оптимальных значений двойственных переменных, позволило использовать систему функций штрафа $\{\Phi_h\}$, $\Phi_h : R^{(N-1)^2} \to R$, нормы градиентов которых в пространствах соответствующей размерности ($N \to \infty$ при $h \to 0$) ограничены равномерно по h. Это снимает ряд серьезных трудностей, связанных с наличием большого числа ограничений в аппроксимирующих задачах. Отметим также возможность эффективной оценки константы в неравенстве (23). Аппроксимация условия $u|_\Gamma = 0$ неравенством $-\alpha h^2 \leq u|_\Gamma \leq \alpha h^2$ позволяет осуществить в рассмотренной схеме метода штрафов одновременный учет граничного условия и неравенства $\rho_1 \leq u \leq \rho_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГЛОВИНСКИ Р., ЛИОНС Ж.-Л., ТРЕМОЛЬЕР Р. Численное исследование вариационных неравенств. - М.: Мир, 1979.
2. КАПЛАН А.А. Алгоритмы выпуклого программирования, использующие сглаживание точных функций штрафа. - Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №4, с.53-64.
3. CAFFARELLI L.A., FRIEDMAN A.The free boundary for elastic-plastic torsion problems. - Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v.252, p.65-97.

4. ОГАНЕСЯН Л.А., РУХОВЕЦ Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.
5. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А., УРАЛЬЦЕВА Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973.
6. МАРЧУК Г.И., АГОШКОВ В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981 г.
7. СЬЯРЛЕ Ф. Метод конечных элементов для эллиптических систем. – М.: Мир, 1980.
8. РИВКИНД В.Я. Метод конечного элемента (МКЭ) для решения задач с ограничениями. – Труды 3-й Всесоюзной конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, ч. II. Новосибирск, 1974, с.74-82.
9. BREZIS H., STAMPACCIA G. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. – Bull. Soc. Math. de France, 96, 1968, p. 153-180.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.12.1982 г.