Выпуск 31(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.865.3

АЛГОРИТМЫ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛЯХ ОБМЕНА С ФИКСИРОВАННЫМИ БЮДЖЕТАМИ

В.И.Шмырев

В настоящей заметке рассматриваются простейшие экономические модели обмена в следующем описании.

Пусть $I=\{1,2,\dots,m\}$ - множество участников и $J=\{1,2,\dots,n\}$ - множество продуктов модели. Каждый из участников характеризуется некоторым бюджетом $\lambda_i>0$, вектором интенсивностей x^i и вектором целевой функции c^i из R^n_+. Предполагается, что все c^i ненулевые, а $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i=1$. При фиксированном векторе цен p из симплекса $\sigma=\{p=(p_1,\dots,p_n)\,|\,p\geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{n}p_j=1\}$ i-й участник выбирает вектор интенсивностей $x^i\geq 0$ так, чтобы оптимизировать целевую функцию (c^i,x^i) при соблюдении бюджетного ограничения $(p,x^i)=\lambda_i$. Вектор цен p называется равновесным вектором (точкой равновесия), если среди оптимальных решений задач участников найдутся такие $\tilde{x}^i$, $i\in I$, что $\sum\limits_{i\in I}\tilde{x}^i=(1,\dots,1)=\theta$.

Если для каждого из участников под оптимизацией понимать максимизацию, то получаем собственно модель обмена, для которой известен подход, сводящий задачу отыскания равновесия к задаче максимизации функции

$$\gamma(x^1,\dots,x^n)=\prod_{i\in I}(c^i,x^i)^{\lambda_i}$$

на множестве M, описываемом условиями $\sum\limits_{i\in I}x^i=\theta$, $x^i\geq 0$, $i\in I$, [1, с.350-360].

Если для каждого $i\in I$ требование максимизации целевой функции (c^i,x^i) заменить требованием минимизации, то получаем иную модель, которую условимся называть моделью кооперации. Применение упомянутого подхода к этой модели затрудняется тем обстоятельством, что задача минимизации функции γ на множестве M является задачей невыпуклой оптимизации, и глобальный минимум функции γ на M (равный нулю) достигается на любом допустимом решении вида $x^{i_0}=\theta$, $x^i=0$ при $i\neq i_0$, которое не является равновесным.

В предположении, что $c^i>0$ для всех $i\in I$, ниже излагается подход, позволяющий получить алгоритмы для определения равновесия как в собственно модели обмена, так и в модели кооперации. В основе предлагаемого подхода лежит рассмотрение порождаемых моделью кусочно-постоянных отображений симплекса цен в себя, введенных автором для более общего класса моделей (с переменными бюджетами) в [2]. Искомые состояния равновесия задаются неподвижными точками этих отображений. В исследуемом случае упомянутые отображения оказываются в некотором смысле потенциальными. Это позволяет строить алгоритмы отыскания их неподвижных точек, аналогичные предложенным автором в [3,4] для монотонных кусочно-постоянных отображений в R^n.

Для единообразия и краткости изложения условимся везде в дальнейшем под opt понимать max в случае модели обмена и min - в случае модели кооперации.

I. Признаки точек равновесия

Как и в [2], свяжем с исследуемой моделью (обмена, кооперации) следующую параметрическую транспортную задачу, в которой параметрами являются компоненты вектора цен $p=(p_1,\dots,p_n)$:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}\ln c_{ij} - opt! \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij}=\lambda_i, \quad i\in I, \qquad (2)$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij}=p_j, \quad j\in J, \qquad (3)$$

$$z_{ij}\geqslant 0, \quad i\in I,\ j\in J. \qquad (4)$$

Здесь c_{ij} - компоненты векторов c^i, $i\in I$.

Система ограничений двойственной задачи в случае модели обмена будет иметь вид

$$u_i + v_j \geq \ln c_{ij}, \quad i \in I, \; j \in J, \qquad (5)$$

а для модели кооперации знак неравенства в этой системе следует изменить на противоположный. Задача (I)-(4) разрешима при любом $p \in \sigma$. Пусть $W(p) \subset R^{m+n}$ - множество векторов $w = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$, задающих оптимальное решение двойственной задачи при данном $p \in \sigma$, и $V(p) \subset R^n$ - проекция этого множества на подпространство переменных $v_1, \ldots, v_n$. Обозначим через $\Phi(p)$ множество

$$\Phi(p) = \{e^v = (e^{v_1}, \ldots, e^{v_n}) \mid v = (v_1, \ldots, v_n) \in V(p)\} \cap \sigma.$$

Ясно, что при любом $p \in \sigma$ множество $\Phi(p)$ лежит в относительной внутренности симплекса σ: $\Phi(p) \subset \sigma^0$. Таким образом, определено точечно-множественное отображение $\Phi: \sigma \to \sigma^0$.

ТЕОРЕМА I. *Неподвижные точки отображения Φ, и только они, задают равновесные векторы цен модели.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{p} \in \Phi(\bar{p})$ и $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$, $(i,j) \in I \times J$, - оптимальное решение транспортной задачи модели при $p = \bar{p}$. Тогда $\bar{p} > 0$ и, ввиду (3), векторы $\bar{x}^i$ с компонентами $\bar{x}_{ij} = (\bar{x}_{ij} / \bar{p}_i) \geqslant 0$ удовлетворяют условию $\sum_{i \in I} \bar{x}^i = \theta$. Покажем, что вектор $\bar{x}^i$ решает задачу i-го участника. Из (2) следует, что $\bar{x}^i$ является допустимым вектором в этой задаче: $(\bar{p}, \bar{x}^i) = \lambda_i$. Убедимся в его оптимальности. Для определенности будем рассматривать модель обмена. Из $\bar{p} \in \Phi(\bar{p})$ следует $\ln \bar{p} = (\ln \bar{p}_1, \ldots, \ln \bar{p}_n) \in V(\bar{p})$. Это означает, что найдется такой вектор $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$, который вместе с $\bar{v} = \ln \bar{p}$ образует оптимальное решение задачи, двойственной к транспортной задаче модели: $\bar{w} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n) \in W(p)$, т.е. $u_i = \bar{u}_i$ и $v_j = \bar{v}_j$ удовлетворяют условиям (5), причем если $\bar{x}_{ij} > 0$, то соответствующее неравенство в (5) выполняется как равенство. Вводя $\bar{y}_i = e^{\bar{u}_i}$, получаем

$$\bar{y}_i \bar{p}_j \geqslant c_{ij}, \quad (i,j) \in I \times J, \qquad (6)$$

и здесь имеет место равенство, если $\bar{x}_{ij} > 0$, т.е. если $\bar{x}_{ij} > 0$. Это и доказывает, что вектор $\bar{x}^i$ оптимален в задаче i-го участника.

Таким образом, доказано, что каждая неподвижная точка отображения φ задает равновесный вектор цен модели. Покажем обратное.

Пусть при $p=\bar{p}\in\sigma$ векторы $\bar{x}^i$, $i\in I$, являются оптимальными в соответствующих задачах участников и $\sum_{i\in I}\bar{x}^i=\theta$. Тогда очевидно, что $\bar{p}>0$. Действительно, если рассматривается модель обмена, то при равенстве нулю какой-либо из компонент вектора $\bar{p}$ задачи участников не имели бы оптимальных векторов ввиду положительности векторов c^i; если же рассматривается модель кооперации, то из $\bar{p}_{j_0}=0$ следовало бы $\bar{x}_{ij_0}=0\ \ \forall i\in I$ и потому $0=\sum_{i\in I}x_{ij_0}\neq 1$.

Дальнейшие рассуждения повторяют выкладки первой части доказательства в обратном порядке. Рассмотрим для определенности случай модели обмена. Из оптимальности $\bar{x}^i$ в задаче i-го участника следует существование такого $\bar{y}_i$, что выполняется система неравенств (6), причем для $\bar{x}_{ij}>0$ соответствующее неравенство этой системы выполняется как равенство. Очевидно, что $\bar{y}_i>0$. Принимая $\bar{z}_{ij}=\bar{p}_j\cdot\bar{x}_{ij}$ и $\bar{u}_i=\ln\bar{y}_i$, $\bar{v}_j=\ln\bar{p}_j$, получим, как легко видеть, оптимальное решение задачи (I)-(4) и двойственной к ней соответственно. Таким образом, $\ln\bar{p}\in V(\bar{p})$, т.е. $\bar{p}\in\varPhi(\bar{p})$, что и требовалось доказать.

Для отыскания неподвижных точек отображения φ воспользуемся тем обстоятельством, что порождающее его отображение $V:\sigma\to R^n$ потенциально в следующем смысле. Пусть $f:\sigma\to R^1$ - функция, задающая для каждого $p\in\sigma$ оптимальное значение целевой функции задачи (I)-(4). Для модели кооперации f является выпуклой функцией и

$$\partial f(p)=V(p), \tag{7}$$

где $\partial f(p)$ - субдифференциал функции f в точке p. Для модели обмена функция f будет вогнутой, и, как легко видеть, для выпуклой функции $g=-f$ будем иметь $-\partial g(p)=$ $=V(p)$. Для простоты и единообразия изложения представляется целесообразным в рассматриваемом случае для вогнутой функции f через $\partial f(p)$ обозначить ее супердифференциал в точке p, считая по определению $\partial f(p)=-\partial g(p)$. Тем самым равенство (7) будет иметь место и для модели обмена. В результате условие равновесности вектора $p\in\sigma^0$ можно записать в виде: $\ln p\in\partial f(p)$.

Пусть $h(p)$ – энтропия с противоположным знаком, т.е. функция, определяемая для $p \in \sigma^{\circ}$ формулой $h(p)=(p, \ln p)$ и доопределяемая до непрерывности на границе σ. Рассмотрим на σ функцию

$$\varphi(p) = h(p) - f(p).$$

Для модели обмена φ является выпуклой функцией, однако для модели кооперации это уже лишь разность двух выпуклых функций с одной и той же эффективной областью: $dom(h)=dom(f)=\sigma$.

При любом $p \in \sigma^{\circ}$ функция φ дифференцируема по любому направлению q, не выводящему при малых сдвигах из σ°, и для производной $\varphi'(p,q)$, используя известную формулу вычисления производной по направлению от выпуклой функции, получаем представление

$$\varphi'(p,q) = \underset{v \in \partial f(p)}{opt} (q, \ln p - v). \qquad (8)$$

Отсюда, как легко видеть, следует, что соотношение $\ln p^{\circ} \in \partial f(p^{\circ})$ эквивалентно условию: при любом $q=(q_1, q_2, \dots, q_n) \neq 0$, $\sum_{j \in J} q_j = 0$, выполняется неравенство $\varphi'(p^{\circ}, q) \cdot \varphi'(p^{\circ}, -q) \geq 0$. Точку p°, для которой выполняется такое условие, естественно называть стационарной точкой функции φ.

Резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Стационарные точки функций φ, и только они, задают равновесные векторы цен модели.

Если воспользоваться сопряженными функциями, получим двойственный аналог этого утверждения. Пусть f^{*} – функция, сопряженная f. При этом если f – вогнутая функция (т.е. рассматривается модель обмена), то по определению считаем $f^{*} = -(-f)^{*}$.

ТЕОРЕМА 3. Точки равновесия модели, и только они, являются стационарными точками функции $\psi(p) = -f^{*}(\ln p)$ на σ°.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p° – равновесная точка, т.е. $\ln p^{\circ} \in \partial f(p^{\circ})$. Так как $\partial h(p^{\circ})$ – множество точек вида $x = \ln p^{\circ} + \lambda\theta$, $\lambda \in R^1$, то условие $\ln p^{\circ} \in \partial f(p^{\circ})$ можно записать в виде $\ln p^{\circ} \in \partial h(p^{\circ}) \cap \partial f(p^{\circ})$. Это означает, что $p^{\circ} \in \partial h^{*}(\ln p^{\circ}) \cap \partial f^{*}(\ln p^{\circ})$. Но $h^{*}(x) = \ln \sum_{j \in J} e^{x_j}$, и

$\partial h^*(x)$ при любом $x \in R^n$ состоит из одного элемента $q(x) = e^{x}/\sum_{j\in J} e^{x_j}$ (здесь x_j – компоненты вектора x). Таким образом, $q(\ln p^\circ) \in \partial f^*(\ln p^\circ)$; это означает, что точка $x^\circ = \ln p^\circ$ является стационарной для функции $g(x) = h^*(x) - f^*(x)$. Делая замену переменных $x = \ln p$, $p > 0$, получаем, что p° является стационарной точкой функции $\bar\psi(p) = g(\ln p)$ на множестве $Int\, R^n_+$, а значит, и на σ°. Остается учесть, что на σ° выполняется $h^*(\ln p) = \ln \sum_{j\in J} p_j = 0$, а потому $\bar\psi(p) = \psi(p)$. Таким образом, p° – стационарная точка функции $\psi(p)$ на σ°, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение доказывается аналогично. Нужно лишь учесть, что функция g принимает постоянные значения на прямых с направляющим вектором $\theta = (1, \ldots, 1)$, а тем самым стационарность точки p° для функции ψ на σ° эквивалентна ее стационарности для $\bar\psi$ на $Int\, R^n_+$. Теорема доказана.

2. Алгоритмы

Полученные признаки точек равновесия позволяют формулировать и обосновывать различные алгоритмы их отыскания. Рассмотрим для модели кооперации процедуру метода итераций, задаваемого соотношением $p^{k+1} \in \Phi(p^k)$, т.е. по имеющейся точке $p^k \in \sigma$ в качестве p^{k+1} принимается любая из точек множества $\Phi(p^k)$.

ТЕОРЕМА 4. Для модели кооперации метод итераций дает точку равновесия за конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем для модели кооперации следующее свойство функции ψ : при $q \in \Phi(p)$ выполняется неравенство

$$\psi(q) - \psi(p) \geq (p, \ln p - \ln q). \qquad (9)$$

Действительно, условие $q \in \Phi(p)$ дает $\ln q \in \partial f(p)$, т.е. $p \in \partial f^*(\ln q)$. Функция f^* для модели кооперации является выпуклой, а потому

$$f^*(\ln p) \geq f^*(\ln q) + (p, \ln p - \ln q), \qquad (10)$$

что и означает (9).

Воспользуемся теперь неравенством (9) для $q = p^{k+1}$

и $p=p^k$. Отметим, что в силу известного свойства энтропии правая часть в этом неравенстве неотрицательная при любых $p, q \in \sigma$ и равна нулю лишь при $q=p$. Тем самым, пока $p^{k+1} \neq p^k$, мы будем иметь $\psi(p^{k+1})-\psi(p^k)>0$. Более того,

$$\psi(p^{k+1}) > \psi(p) \quad \forall p \in \Phi^{-1}(p^{k+1}).$$

Следовательно, текущая точка процесса p^s при $s>k+1$ уже не может попасть в множество $\Phi^{-1}(p^{k+1})$, в котором находится точка p^k. Остается учесть, что среди множеств $\Phi^{-1}(p)$, $p \in \sigma^o$, имеется лишь конечное число различных (ввиду полиэдральности множества допустимых решений задачи, двойственной к транспортной задаче (I)-(4)). Отсюда и получаем конечность процесса итераций. Теорема доказана.

Отметим, что при реализации рассмотренного метода можно на очередном шаге процесса для решения транспортной задачи (I)-(4) (при фиксированном $p=p^{k+1}$) воспользоваться процедурой двойственного метода последовательного улучшения. В этой связи рассмотрим еще один метод, основанный на той же процедуре и позволяющей находить состояние равновесия в модели кооперации.

Пусть на очередном шаге процесса нам известно некоторое двойственно-допустимое базисное множество $\mathcal{B}_k$ задачи (I)-(4). Это множество определяет с точностью до постоянного слагаемого совокупность величин $(-u_i)$, $i \in I$, и v_j, $j \in J$, таких, что u_i и v_j образуют решение системы

$$u_i + v_j = \ln c_{ij}, \quad (i,j) \in \mathcal{B}_k.$$

Тем самым однозначно определяется вектор $p^k \in \sigma^o$:

$$p_j^k = e^{v_j} / \sum_{s=1}^{n} e^{v_s}, \quad j \in J.$$

Рассмотрим при $p=p^k$ систему условий (2)-(3), дополнив ее требованием $x_{ij}=0, (i,j) \notin \mathcal{B}_k$. Полученная система имеет единственное решение $x_{ij}=x_{ij}^k$. Если оно оказалось неотрицательным, то это означает, что $p^k \in \Phi(p^k)$ и, значит, p^k - равновесный вектор цен модели. Если же для некоторой пары $(i_o, j_o) \in \mathcal{B}_k$ оказалось $x_{i_o j_o}^k < 0$, то заменяем в соответствии с правилами двойственного метода последовательного улучшения пару (i_0, j_0) некоторой парой (i', j'), получая, таким образом, множество $\mathcal{B}_{k+1}$. Будем именовать описанный процесс "методом соседней вершины". Докажем его сходимость в предположении двойственной невырожденности задачи (I)-(4): для любого двойственно-допустимого решения число неравенств двойственной задачи, обращающихся на данном решении в равенства, не превосходит $m+n-1$. Это условие обеспечивает единственность решения задачи (I)-(4) при любом $p \in \sigma$.

ТЕОРЕМА 5. При выполнении условия двойственной невырожденности задачи (I)-(4) метод соседней вершины дает точку равновесия для модели кооперации за конечное число шагов.

Доказательство этого утверждения также основано на строгом возрастании в течение процесса значения функции ψ. Приведем предварительно некоторые необходимые в дальнейшем вспомогательные сведения относительно функции ψ и отображения Φ.

Будем говорить, что множество $\mathcal{B} \subset I \times J$ является i-накрывающим, если для каждого $i \in I$ непусто множество $\{j \in J \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность двойственно допустимых базисных множеств транспортной задачи (I)-(4) и их всевозможных i-накрывающих подмножеств. Каждому $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ сопоставим множество $\Omega(\mathcal{B})$ тех $p \in \sigma$, при которых существует решение системы (2)-(4) $x_{ij} = x_{ij}^{\mathcal{B}}(p)$, удовлетворяющее условию

$$x_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}. \qquad \text{(II)}$$

Все множества $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$, непусты. Это следует из того, что при $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}$, выполняется $\Omega(\mathcal{B}_1) \subset \Omega(\mathcal{B}_2)$. Поэтому достаточно убедиться в непустоте множеств $\Omega(\mathcal{B})$, порождаемых минимальными множествами из $\mathcal{L}$ (в упорядоченности, порождаемой отношением включения $\subset$). Для такого $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ множество I разбивается на подмножества $I_j = \{i \in I \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$, а $\Omega(\mathcal{B})$ состоит из единственной точки p с координатами:

$$\rho_j = \begin{cases} \sum\limits_{i\in I_j} \lambda_i & \text{, если } I_j \neq \emptyset \quad ; \\ 0 & \text{, если } I_j = \emptyset \quad . \end{cases}$$

Ясно также, что $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$, - полиэдральные множества, и точка $p\in\Omega(\mathcal{B})$ тогда и только тогда лежит в относительной внутренности $\Omega^\circ(\mathcal{B})$, когда все $x_{ij}^{\mathcal{B}}(p)>0, (i,j)\in\mathcal{B}$. Поскольку при каждом $p\in\sigma$ транспортная задача (I)-(4) имеет, ввиду условия двойственной невырожденности, единственное решение, то каждая точка $p\in\sigma$ принадлежит относительной внутренности лишь одного из множеств $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$.

Резюмируя, можем сказать, что множества $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$, образуют полиэдральное разбиение симплекса σ .

Каждое из множеств $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$, является некоторым участком линейности функции f . Ясно, что для всех $p\in\Omega^\circ(\mathcal{B})$ образ $\Phi(p)$ будет одним и тем же множеством, которое мы будем обозначать $\Xi(\mathcal{B})$. При этом если $\mathcal{B}$ - базисное множество, то $\Omega(\mathcal{B})$ телесно в аффинном носителе симплекса σ , а $\Xi(\mathcal{B})$ - одноточечное множество. Ясно, что из $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}_2$ следует $\Xi(\mathcal{B}_1)\supset\Xi(\mathcal{B}_2)$. Можно также показать, что множества $\Xi(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$, образуют полиэдральное разбиение множества σ° .

Относительно функции $\psi(q)=-f^*(\ln q)$, порождаемой моделью кооперации, нам потребуется при доказательстве теоремы следующее представление, получающееся из определения сопряженной функции:

$$\psi(q) = \min_{p\in\sigma}\{-(p,\ln q)+f(p)\}, \qquad (I2)$$

и минимум здесь достигается для всех $p\in\Phi^{-1}(q)$. Это означает, что при любом $\mathcal{B}\in\mathcal{L}$ функция ψ на $\Xi(\mathcal{B})$ совпадает с функцией $\psi_p(q)=-(p,\ln q)+f(p)$, если только $p\in\Omega(\mathcal{B})$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5. Пусть $\mathcal{B}_k\in\mathcal{L}$ - базисное множество и $\{p^k\}=\Xi(\mathcal{B}_k)$. Пусть оказалось $x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_k}(p^k)<0$, и мы переходим, используя процедуру двойственного метода последовательного улучшения, к базисному множеству $\mathcal{B}_{k+1}=\{(i',j')\}\cup\mathcal{B}_k\setminus\{(i_0,j_0)\}$, $\mathcal{B}_{k+1}\in\mathcal{L}$, и точке $p^{k+1}: \{p^{k+1}\}=\Xi(\mathcal{B}_{k+1})$. Ввиду условия двойственной невырожденности будем иметь $p^{k+1}\neq p^k$. Ясно, что множество $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_0, j_0)\} = \mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_{k+1}$ также принадлежит совокупности $\mathcal{L}$. Рассмотрим множество $\Omega' = \Omega(\mathcal{B}') = \Omega(\mathcal{B}_k) \cap \Omega(\mathcal{B}_{k+1})$. Легко видеть, что при $a \in \Omega'$ будем иметь $\ln p^k;\ \ln p^{k+1} \in V(a)$, т.е. $p^k; p^{k+1} \in \Xi(\mathcal{B}')$. Но тогда для функции $\psi_a(q) = -(a, \ln q) + f(a)$ будем иметь $\psi(p^k) = \psi_a(p^k)$ и $\psi(p^{k+1}) = \psi_a(p^{k+1})$. Таким образом, требуемое неравенство $\psi(p^{k+1}) > \psi(p^k)$ равносильно неравенству $\psi_a(p^{k+1}) > \psi_a(p^k)$. Докажем справедливость последнего.

Как отмечалось выше, множества $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$, являются участками линейности функции f. Из $p^k \in \Xi(\mathcal{B}_k)$ и $p^{k+1} \in \Xi(\mathcal{B}_{k+1})$ следует, что на $\Omega(\mathcal{B}_k)$ функция $f(p)$ имеет вид $(p, \ln p^k) + \Delta_k$, а на $\Omega(\mathcal{B}_{k+1})$ – аналогично $f(p) = (p, \ln p^k) + \Delta_{k+1}$, где Δ_k и Δ_{k+1} – некоторые константы. Ввиду выпуклости f и $p^k \neq p^{k+1}$, имеем

$$(p, \ln p^k - \ln p^{k+1}) > \Delta \text{ при } p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_k),$$

$$(p, \ln p^k - \ln p^{k+1}) = \Delta \text{ при } p \in \Omega(\mathcal{B}_k) \cap \Omega(\mathcal{B}_{k+1}),$$

где $\Delta = \Delta_k - \Delta_{k+1}$.

С другой стороны,

$$z_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_k}(p) > 0 \quad \text{при } p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_k),$$

$$z_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_k}(p) = 0 \quad \text{при } p \in \Omega(\mathcal{B}_k) \cap \Omega(\mathcal{B}_{k+1}).$$

Учитывая, что $\Omega(\mathcal{B}_k) \cap \Omega(\mathcal{B}_{k+1}) = \Omega(\mathcal{B}')$ имеет размерность $n-2$, заключаем, что на σ условия

$$z_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_k}(p) < 0$$

и

$$(p, \ln p^k - \ln p^{k+1}) < 0$$

эквивалентны. Тем самым

$$(p^k; \ln p^k - \ln p^{k+1}) < \Delta.$$

Но, по свойству энтропии, $(p^k; \ln p^k) > (p^k; \ln p^{k+1})$ и, значит, $\Delta > 0$. Теперь при $a \in \Omega(\mathcal{B}_k) \cap \Omega(\mathcal{B}_{k+1})$ получаем

$$\psi_a(p^{k+1}) - \psi_a(p^k) = -(a, \ln p^{k+1} - \ln p^k) = \Delta > 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, при переходе от p^k к p^{k+1} строго возрастает значение функции ψ. Так как эти точки однозначно порождаются базисными множествами $\mathcal{B}_k$ и $\mathcal{B}_{k+1}$, то конечность процесса следует из конечности общего числа базисных множеств. Теорема доказана.

Для модели обмена функции φ и ψ являются строго выпуклыми. Поэтому модель обмена имеет единственную точку равновесия, которая будет общей точкой минимума этих функций. Следовательно, для отыскания равновесия в модели обмена можно воспользоваться любой процедурой минимизации функций φ и ψ. В частности, используя характер задания этих функций, можно строить конечные методы, основанные на идеях субоптимизации [6]. Приведем одну из таких процедур для минимизации функции ψ.

Несложно получить более явное описание множеств $\Xi(\mathcal{B})$, не использующее понятие оптимального решения транспортной задачи (I)-(4). Действительно, при $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$ множество векторов $w=(u_1,\dots,u_m, v_1,\dots,v_n) \in W(p)$, как легко видеть, будет описываться системой

$$u_i = \ln c_{ij} - v_j, \quad (i,j) \in \mathcal{B};$$

$$u_i = \operatorname*{opt}_{j \in J} (\ln c_{ij} - v_j),$$

Обозначая через y_i величины e^{u_i}, получаем для $q = e^v$ при $v \in V(p)$ условия

$$y_i = \frac{c_{ij}}{q_j}, \quad (i,j) \in \mathcal{B};$$

$$y_i = \operatorname*{opt}_{j \in J} \frac{c_{ij}}{q_j}, \quad i \in I.$$

Тем самым для множества $\Xi(\mathcal{B})$ получаем такое описание:

$$\Xi(\mathcal{B}) = \{q \in \sigma^\circ \mid \operatorname*{opt}_{k \in J} \frac{c_{ik}}{q_k} = \frac{c_{ij}}{q_k}, \ (i,j) \in \mathcal{B}\}.$$

Важно отметить, что $\Xi(\mathcal{B})$ представляет собой пересечение некоторого многогранного множества с σ° и лежит в аффинном многообразии $M(\mathcal{B})$, задаваемом системой линейных уравнений

$$\frac{p_j}{c_{ij}} = \frac{p_l}{c_{il}}, \quad (i,j),(i,l) \in \mathcal{B}. \tag{13}$$

Опишем также аффинное многообразие $L(\mathcal{B})$, пересечение которого с σ задает аффинный носитель многогранника $\Omega(\mathcal{B})$. Для этого введем граф $\Gamma(\mathcal{B})$ с множеством вершин $V = \{1,2,\ldots,m+n\}$ и множеством дуг $\{(i,m+j)|(i,j)\in\mathcal{B}\}$. Пусть τ – число компонент связности этого графа, V_ν – множество вершин ν-й компоненты связности, $I_\nu = I \cap V_\nu$, $J_\nu = \{j \in J | (m+j) \in V_\nu\}$. Как несложно показать, для $p \in \Omega(\mathcal{B})$ должна выполняться система линейных уравнений

$$\sum_{j\in I_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1,\ldots,\tau. \tag{14}$$

Эта система и описывает многообразие $L(\mathcal{B})$.

Перейдем теперь к описанию требуемого алгоритма минимизации функции ψ . Пусть $\mathcal{B}_k \in \mathcal{L}$ и нам известна некоторая точка $q^k \in \Xi(\mathcal{B}_k)$. В качестве начальной точки q^0 можно принять произвольную точку из σ^0 , формируя начальное $\mathcal{B}_0$ следующим образом:

$$\mathcal{B}_0 = \{(i,j)\in I\times J | \max_{k\in J} \frac{c_{ik}}{q_j^0} = \frac{c_{ij}}{q_j^0}\}.$$

Имея $\mathcal{B}_k$, находим точку $p = z^k \in \sigma$, удовлетворяющую уравнениям (13)-(14), т.е. $z^k \in L(\mathcal{B}_k) \cap M(\mathcal{B}_k) \cap \sigma$. Как легко видеть, такая точка определяется однозначно: на ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B})$ величины p_j , $j \in I_\nu$, определяются из уравнений (13) с точностью до постоянного множителя, который находится из соответствующего уравнения (14).

Возможны два случая:

(i) $q^k = z^k$;

(ii) $q^k \neq z^k$.

В случае (i) при $p = q^k$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k$ оказывается совместной система условий (2), (3), (11) и мы определяем $x_{ij} = x_{ij}^{\mathcal{B}_k}(q^k)$. Если оказалось, что все x_{ij} неотрицательны, то $q^k \in \Omega(\mathcal{B}_k)$ и, следовательно, q^k – точка равновесия модели. Если же оказалось, что $x_{i_0 j_0} < 0$, то полагаем $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_0,j_0)\}$, $q^{k+1} = q^k$ и переходим к следующему шагу.

В случае (ii) возможно, что $z^k \in \Xi(\mathcal{B}_k)$. Тогда, принимая $q^{k+1}=z^k$, $\mathcal{B}_{k+1}=\mathcal{B}_k$, приходим к случаю ($i$). Если же $z^k \notin \Xi(\mathcal{B}_k)$, то полагаем $q(t)=q^k+t(z^k-q^k)$ и находим $t^*=\max\{t \mid q(t)\in \Xi(\mathcal{B}_k)\}$. Если при этом лимитирующим оказалось условие

$$\frac{q_{i_1}(t)}{c_{i_1 j_1}} \geqslant \frac{q_l(t)}{c_{il}}, \quad (i,l)\in \mathcal{B}_k, \quad (i_1,j_1)\notin \mathcal{B}_k, \qquad (15)$$

то принимаем $q^{k+1}=q(t^*)$, $\mathcal{B}_{k+1}=\mathcal{B}_k \cup \{(i_1,j_1)\}$ и переходим к следующему шагу.

ТЕОРЕМА 6. При выполнении условия двойственной невырожденности описанный метод субоптимизации дает равновесный вектор цен модели обмена за конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что значение функции ψ на последовательности точек q^k не возрастает. На множестве $\Xi(\mathcal{B}_k)$ функция ψ в соответствии с представлением (12), как уже отмечалось, совпадает с функциями ψ_p при $p\in \Omega(\mathcal{B}_k)$. Убедимся в том, что точка z^k является точкой минимума на $M(\mathcal{B}_k)\cap\sigma$ для любой из этих функций. При этом от функций $\psi_p(q)$ можно перейти к функциям $\bar\psi_p(q)=\bar\psi_p(q)+\ln\sum_{j\in J} q_j$, которые на σ совпадают с функциями $\psi_p(q)$. Функции $\bar\psi_p$, в свою очередь, являются положительно-однородными функциями нулевой степени, а потому можно заменить σ на R^n_+.

Зафиксируем произвольную точку $p=p^\circ\in\Omega(\mathcal{B}_k)$. Заметим, что если некоторая координата p_j° точки p° равна нулю, то функция $\bar\psi_{p^\circ}(q)$ монотонна по q_j, и ясно, что в точке минимума $\bar q$ этой функции на $M(\mathcal{B}_k)\cap R^n_+$ координата $\bar q_j$ также равна нулю. Сужая функцию $\bar\psi_{p^\circ}$ на подпространство $q_j=0$, получаем снова функцию того же вида, но в пространстве меньшей размерности. Ввиду этого можно ограничиться рассмотрением лишь случая $p^\circ>0$, что, как легко видеть, влечет $z^k>0$.

Множество $M(\mathcal{B}_k)\cap R^n_+$ представляет собой коническую оболочку точек s^ν, $\nu=1,\ldots,\tau$, каждая из которых определяется соответствующей компонентой связности описанного выше графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$:

$$s_j^\nu = z_j^k, \quad (m+j) \in V_\nu, \tag{I6}$$

$$s_j^\nu = 0, \quad (m+j) \notin V_\nu. \tag{I7}$$

Теперь ясно, что точка z^k тогда и только тогда является точкой минимума функции $\bar{\psi}_{\rho^\circ}$, когда производная этой функции по всем направлениям s^ν, $\nu = 1, \ldots, \tau$, обращается в точке z^k в ноль. Имеем

$$grad\,\bar{\psi}_{\rho^\circ}(z^k) = -\begin{pmatrix} \rho_1^\circ / z_1^k \\ \vdots \\ \rho_n^\circ / z_n^k \end{pmatrix} + \frac{1}{\sum\limits_{j \in J} z_j^k} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Учитывая $z^k \in \sigma$, получаем

$$\frac{\partial \bar{\psi}_{\rho^\circ}(z^k)}{\partial s^\nu} = -\sum_{j \in J_\nu} \frac{\rho_j^\circ}{z_j^k} \cdot z_j^k + \sum_{j \in J_\nu} z_j^k =$$

$$= -\sum_{j \in J_\nu} \rho_j^\circ + \sum_{j \in J_\nu} z_j^k = 0,$$

ибо $\rho^\circ, z^k \in L(\mathcal{B}_k)$.

Таким образом, точка z^k является точкой минимума для функций ψ_ρ, $\rho \in \mathcal{Q}(\mathcal{B}_k)$, на множестве $M(\mathcal{B}_k) \cap \sigma$. Тем самым при смещении из q^k в q^{k+1} значение этих функций не возрастает, а так как $q^{k+1}, q^k \in \Xi(\mathcal{B}_k)$, то это равносильно невозрастанию значения функции ψ. При этом, ввиду строгой выпуклости функций $\bar{\psi}_\rho$ на σ, в случае $q^{k+1} \neq q^k$ будет $\psi(q^{k+1}) < \psi(q^k)$. Покажем теперь, что такой случай непременно реализуется через конечное число шагов, если только текущая точка процесса уже не является искомой точкой минимума функции ψ.

Поскольку при реализации случая (ii) число элементов в множестве $\mathcal{B}_k$ только возрастает, то случай (ii) подряд может повториться лишь конечное число раз. Поэтому будем считать, не ограничивая общности, что для имеющейся точки q^k реализовался случай (i). Пусть при решении системы уравнений (2), (3), (II) оказалось $x_{i_0 j_0} < 0$, и мы переходим к следующему шагу с $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_0, j_0)\}$ и $q^{k+1} = q^k$. Опишем направление, ведущее из z^k в z^{k+1}.

Рассмотрим графы $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ и $\Gamma(\mathcal{B}_{k+1})$. Граф $\Gamma(\mathcal{B}_{k+1})$ получается из графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ исключением дуги $(i_0, m+j_0)$, в результате чего компонента связности, содержащая эту дугу, разделится на две компоненты. Пусть речь идет о первой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, содержащей вершины $i \in I_1$ и $(m+j)$ при $j \in J_1$. При исключении дуги $(i_0, m+j_0)$ множества I_1 и J_1 разобьются на I_1', I_1'' и J_1', J_1'' соответственно. Пусть $i_0 \in I_1'$ и, следовательно, $j_0 \in J_1''$. Ввиду положительности λ_i из определения z^k следует, что условие $I_1 \neq \emptyset$ влечет $z_j^k > 0$, $j \in J_1$. Вычислим величину $\mu = \sum_{j\in J_1'} z_j^k \Big/ \sum_{j \in J_1''} z_j^k$ и образуем вектор s с компонентами:

$$s_j = \begin{cases} -z_j^k, & j \in J_1'; \\ \mu z_j^k, & j \in J_1''; \\ 0, & j \notin J_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что этот вектор и определяет направление, ведущее из z^k в z^{k+1}. Действительно, $\sum\limits_{j=1} s_j = 0$ и, значит, направление s не выводит из аффинного носителя симплекса σ. Координаты q_j точки q, соответствующие вершинам $(m+j)$ каждой компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{k+1})$, при сдвиге из q в направлении s меняются с сохранением взаимных пропорций, а это означает, что s не выводит из $M(\mathcal{B}_{k+1})$. Проверим, что при подходящем $t = \hat{t} > 0$ точка $q(t) = z^k + ts$ попадает в $L(\mathcal{B}_{k+1})$, для чего достаточным является выполнение условия

$$\sum_{j \in J_1'} q_j(\hat{t}) = \sum_{i \in I_1'} \lambda_i .$$

Из этого условия получаем

$$\hat{t} = \frac{\sum_{j\in J_1'} z_j^k - \sum_{i \in I_1'} \lambda_i}{\sum_{j \in J_1'} z_j^k}, \qquad (18)$$

а из

$$z_{i_0 j_0} = \sum_{i \in I_1'} \lambda_i - \sum_{j \in J_1'} z_j^k < 0$$

следует $\hat{t} > 0$.

Таким образом, полученное направление s ведет из точки $q^{k+1} = z^k$ в точку z^{k+1} . Рассмотрим теперь вопрос о возможности положительного сдвига в этом направлении в пределах множества $\Xi(\mathcal{B}_{k+1})$.

Каждая пара $(i,j) \notin \mathcal{B}_{k+1}$ порождает некоторое ограничение на величину сдвига:

$$\frac{c_{ij}}{q_j(t)} \leqslant \frac{c_{il}}{q_l(t)}, \quad (i,l) \in \mathcal{B}_{k+1} . \tag{19}$$

Ясно, что ограничение, порождаемое (i_0, j_0) , не является лимитирующим: с ростом t величина $q_{j_0}(t)$ возрастает, ибо $j_0 \in J_1''$, величина же $q_l(t)$ при $(i_0, l) \in \mathcal{B}_{k+1}$ убывает, ибо $l \in J_1'$.

Пусть лимитирующим оказалось ограничение (19), порождаемое $(i,j)=(i_1,j_1)$. Мы перейдем к следующему шагу, полагая $\mathcal{B}_{k+2} = \mathcal{B}_{k+1} \cup \{(i_1,j_1)\}$. Если при этом величина сдвига оказалась равной нулю, т.е. $q^{k+2} = q^{k+1}$, то это означает, что

$$\frac{c_{i_1 j_1}}{q_{j_1}^{k+1}} = \frac{c_{il}}{q_l^{k+1}}, \quad (i,l) \in \mathcal{B}_{k+1}, \tag{20}$$

и, значит, точка $q^{k+1} (= q^k = z^k)$ принадлежит множеству $\Xi(\bar{\mathcal{B}}_k)$ при $\bar{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \cup \{(i_1, j_1)\}$. В то же время $q^{k+1} \in L(\mathcal{B}_k) \subset L(\bar{\mathcal{B}}_k)$. Тем самым, если мы будем отправляться при выполнении очередного шага процесса от множества $\bar{\mathcal{B}}_k \in \mathcal{L}$ и точки $\bar{q}^k = q^{k+1} \in \Xi(\bar{\mathcal{B}}_k)$, то будем иметь случай (i). При этом, решая систему уравнений (2), (3), (II) при $p = \bar{q}^k$ и $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}_k$, получим величины $\bar{z}_{ij} = z_{ij}^{\bar{\mathcal{B}}_k}(\bar{q}^k)$, которые будут совпадать с величинами $z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(q^k)$, т.е. по-прежнему будем иметь $\bar{z}_{i_0 j_0} < 0$ и перейдем к следующему шагу с множеством $\bar{\mathcal{B}}_{k+1} = \bar{\mathcal{B}}_k \setminus \{(i_0, j_0)\} = \mathcal{B}_{k+2}$ и $\bar{q}^{k+1} = q^{k+2} (= q^{k+1})$.

Таким образом, ситуация, возникающая на шаге $(k+2)$, качественно та же самая, что была на шаге $(k+1)$, а потому ограничение на величину сдвига, порождаемое парой

(i_0, j_0) , снова не является лимитирующим.

Ясно, что шаги описанного типа с нулевой величиной сдвига могут повториться лишь конечное число раз, ибо текущее множество $\mathcal{B}_s$ при этом лишь расширяется, а ввиду предположения двойственной невырожденности задачи (I)-(4), если $\mathcal{B}_k$ - базисное множество, то при $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_0, j_0)\}$ не существует пары (i_1, j_1) , для которой выполнялось бы (20).

В результате получено, что между двумя последовательными реализациями случая (i) значение функции ψ в текущей точке процесса строго убывает. Однако это значение в случае (i) однозначно определяется множеством $\mathcal{B}_k$. Тем самым, ни одно из множеств, фигурирующих при реализации случая (i), в дальнейшем встретиться уже не может, что и влечет конечность общего числа шагов процесса ввиду конечности общего числа множеств $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$. Теорема доказана.

3. Некоторые обобщения

Из выпуклости функции f , порождаемой моделью кооперации, следует, что при любых p^1 , $p^2 \in \sigma$ и $q^1 \in \Phi(p^1)$, $q^2 \in \Phi(p^2)$ выполняется неравенство

$$(p^1 - p^2, \ln q^1 - \ln q^2) \geqslant 0.$$

Кратко это можно записать в виде:

$$(p^1 - p^2, \ln \Phi(p^1) - \ln \Phi(p^2)) \geqslant 0.$$

Для модели обмена будет выполняться аналогичное неравенство противоположного знака. Именно это свойство отображения Φ , которое можно условно назвать логарифмической монотонностью, лежит в основе всех описанных выше построений, позволяющих находить неподвижные точки такого отображения. Использованное же свойство потенциальности, состоящее в существовании такой функции $f: R^n \to R^1$, для которой при $p \in \sigma$ выполняется $\partial f(p) = \ln \Phi(p) + \lambda\theta, \lambda \in R^1$, является вторичным, следующим из логарифмической монотонности отображения Φ . Поэтому приведенные выше рассмотрения обобщаются на случай произвольных кусочно-постоянных отображений симплекса σ в себя, обладающих свойством логарифмической монотонности и частным случаем которых являются отображения, порождаемые моделями обмена или кооперации. Опишем более точно класс отображений, о котором идет речь.

Как отмечалось в [2], в σ° можно ввести структуру линейного пространства, если под суммой элементов ρ^1 и ρ^2 из σ° понимать точку ρ с координатами $\rho_j = \rho_j^1 \rho_j^2 / \sum_{k=1}^{n} \rho_k^1 \rho_k^2$, а под произведением $\rho \in \sigma^{\circ}$ на вещественный скаляр t – точку q с координатами $q_j = \rho_j^t / \sum_{k=1}^{n} \rho_k^t$. Обозначим это линейное пространство через Σ. Таким образом, в σ° наряду с обычными многогранными множествами пространства R^n можно рассматривать также многогранные множества пространства Σ как множества решений конечных систем линейных (в Σ) неравенств. При этом линейными функционалами в Σ будут функции вида $\alpha(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \rho_i$ при $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Пусть в Σ задан полиэдральный комплекс ξ, клетки которого образуют разбиение всего Σ, т.е. каждая точка $q \in \Sigma$ принадлежит относительной внутренности лишь одной клетки из ξ. Рассмотрим точечно-множественное отображение $F: \sigma^{\circ} \to \sigma$, постоянное на относительной внутренности Ξ° каждой клетки $\Xi \in \xi$ и обладающее свойствами:

а) для полномерных клеток $\Xi \in \xi$ образ $F(\Xi^{\circ})$ является одноточечным множеством;

б) для любой клетки $Q \in \xi$ выполняется

$$F(Q^{\circ}) = conv\{F(\Xi^{\circ}) \mid \Xi \supset Q,\ \Xi \in \xi\},$$

где выпуклая оболочка берется в смысле пространства R^n.

Будем называть отображение F кусочно-постоянным логарифмически-монотонным возрастающим отображением, если выполняется условие:

в) для любых точек $\rho, q \in \sigma^{\circ}$

$$(\ln \rho - \ln q,\ v - w) \geq 0 \quad \forall v \in F(\rho),\ w \in F(q),$$

или короче:

$$(\ln \rho - \ln q,\ F(\rho) - F(q)) \geq 0.$$

Если в условии в) заменить знак неравенства на противоположный, то получим другой класс отображений, которые будем называть убывающими логарифмически-монотонными кусочно-постоянными отображениями.

Легко видеть, что отображение $F = \Phi^{-1}$ попадает в первый из описанных классов или во второй в зависимости от того, порождается Φ моделью кооперации или моделью обмена. При этом такие отображения будут обладать двумя особенностями:

1) многогранники $Q = F(Q^{\circ}), Q \in \xi$, покрывают весь симплекс σ (не пересекаясь по относительно внутренним точкам);

2) линейные (в пространстве Σ) функционалы, задающие полиэдральные множества $\Sigma \in \xi$, имеют специальный вид: $\alpha(p) = \ln p_i - \ln p_j$, благодаря чему эти множества задаются системой линейных неравенств в R^n.

Рассмотрение на симплексе кусочно-постоянных логарифмически-монотонных отображений сводится к рассмотрению монотонных кусочно-постоянных отображений в R^n , относительно которых автором была доказана их потенциальность [7]. Использование этого факта и позволяет проводить упомянутые отобщения описанных процедур поиска неподвижных точек. Например, если F - возрастающее логарифмически-монотонное отображение и $F(\sigma^{\circ}) \subset \sigma^{\circ}$, то неподвижная точка такого отображения может быть получена процедурой метода итераций: $p^{k+1} \in F(p^k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГЕЙЛ Д. Теория линейных экономических моделей. - М.: ИИЛ, 1963.
2. ШМЫРЕВ В.И. Монотонность в линейных моделях обмена. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.77-95.
3. ШМЫРЕВ В.И. Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n. - Докл. АН СССР, 1981, т.295, №2, с.299-301.
4. ШМЫРЕВ В.И. О построении алгоритмов отыскания неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n. - Оптимизация, 1982, вып. 29(46), с.32-44.
5. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
6. РУБИНШТЕЙН Г.Ш., ШМЫРЕВ В.И. Методы минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике. - Оптимизация, 1971, вып.1(18), с.82-117.
7. ШМЫРЕВ В.И. О потенциальности кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n .-Оптимизация,1981,вып.27(44),с.65-76.

Поступила в ред.-изд. отдел
01. 11. 1982 г.