УДК 519.865.3

ВПОЛНЕ ДОГОВОРНЫЕ И ВАЛЬРАСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ В z-РЕПЛИКАХ РЫНКОВ

А.Н.Козырев

В этой работе исследуются соотношения между множествами вполне договорных и вальрасовских состояний в z-репликах рынка, удовлетворяющего стандартным требованиям [1]. Получены достаточные условия совпадения указанных множеств во всех репликах рынка, начиная со второй, и построен пример рынка, для всех реплик которого эти множества различны. Все основные результаты работы сосредоточены в §3. Первые два параграфа играют вспомогательную роль. В §1 вводятся основные определения и обозначения, а также сообщаются некоторые известные результаты теории рынков. Используемые здесь понятия договора, системы договоров и операции над ними не отличаются от аналогичных понятий из [2,3], а определения устойчивой системы договоров и вполне договорного состояния отличаются формой записи и отсутствием некоторых второстепенных деталей. Благодаря этому более наглядно проявляется сходство между множеством вполне договорных состояний и ядром рынка, можно даже говорить просто о двух различных определениях ядра. В §2 собраны необходимые сведения из теории субдифференцирования и доказаны три небольшие леммы, имеющие много полезных для дальнейшего следствий. Некоторые результаты этого параграфа известны или близки к известным, но они приводятся в удобной для последующего использования форме, несколько отличной от общепринятой [4,5]. Поэтому все три леммы снабжены полными доказательствами со ссылками на монографию [6].

§I. Рынки и r-реплики рынков

Рынком обычно называют четверку $\mathcal{E} = \langle N, R^m_+, \mathcal{U}, a \rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ - множество экономических агентов (торговцев), R^m_+ - множество допустимых наборов продуктов (товаров), $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ - набор функций полезности и $a = \{a^i\}_{i=1}^n \in (R^m_+)^n$ - начальное распределение товаров. Функции полезности удобно считать заданными на всем пространстве продуктов R^m, но принимающими значения $-\infty$ на множестве $R^m \setminus R^m_+$ и конечные значения - на R^m_+. Кроме того, относительно всех функций полезности будем предполагать строгую вогнутость на R^m_+, замкнутость в смысле замкнутости подграфика и монотонность по возрастанию. Эти требования соответствуют общепринятому стандарту [I] и не нуждаются в разъяснении. Без ограничения общности можно считать, что $a^i \neq 0$ для каждого $i \in N$ и $\sum_{i=1}^n a^i \in \operatorname{int} R^m_+$. В противном случае следует рассматривать рынок с меньшим числом торговцев или с меньшим числом наименований товаров. Пространством допустимых состояний рынка или возможных распределений товаров называется множество mn-мерных векторов

$$X = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in (R^m)^n \mid \sum_{i=1}^n x^i = \sum_{i=1}^n a^i\}.$$

Через P обозначим стандартный симплекс в R^m, называемый иногда симплексом цен, а через $\langle p, y \rangle$ - скалярное произведение векторов $p \in P$ и $y \in R^m$. Множество вальрасовских состояний, ядро и границу Парето рынка $\mathcal{E}$ обозначим соответственно через $W(\mathcal{E})$, $C(\mathcal{E})$ и $\Theta(\mathcal{E})$.

Как и в [2], договором v будем называть пару $(x(v), s(v))$, где

$$x(v) \in \operatorname{cone}(X - X), \quad s(v) \in \sigma = 2^N \setminus \{\varnothing\},$$

причем $x^i(v) = 0$ для всех $i \notin s(v)$, а системой договоров - конечное семейство $V = \{v_\xi\}_{\xi \in \Xi}$, где Ξ - множество номеров договоров. Обозначим через $\mathcal{W}$ совокупность всевозможных систем договоров, а через F - отображение, определенное на множестве $\mathcal{W} \times \sigma$ и сопоставляющее каждой паре (V, s), где $V \in \mathcal{W}$ и $s \in \sigma$, множество $F(V, s) \subset \mathcal{W}$, состоящее из всевозможных систем договоров, которые коалиция

S может получить из V, заключая новые договоры и разрывая часть старых. Свойства отображения F полностью определяются правилами заключения и разрыва договоров коалициями из $\mathfrak{S}$. Далее, как и в [2,3], предполагается, что произвольная коалиция $S \in \mathfrak{S}$ может заключать договоры с участием только тех торговцев, которые входят в S, и разрывая договоры, в которых задействован хотя бы один торговец из S. Формальная запись этих условий дана в [2]. Далее, положим $x(V) = \sum_{\xi \in \Xi} x(v_\xi)$ для $V \in \mathfrak{V}$.

Система договоров V доминируема по коалиции $S \in \mathfrak{S}$, если существует вектор

$$\bar{x} \in conv\{a + x(V') \mid V' \in F(V, S)\}$$

такой, что для каждого $i \in S$ выполняется неравенство

$$u_i(\bar{x}^i) \geqslant u_i(a^i + x^i(V)),$$

причем для некоторого $i_0 \in S$ неравенство строгое.

Система договоров V, не доминируемая ни по одной коалиции из $\mathfrak{S}$, называется устойчивой, а соответствующее ей состояние рынка $a + x(V)$ – вполне договорным. Множество вполне договорных состояний рынка $\mathcal{E}$ обозначим через $D(\mathcal{E})$. Тогда из доказанного в [3] следует справедливость цепочки включений

$$C(\mathcal{E}) \supset D(\mathcal{E}) \supset W(\mathcal{E}).$$

Напомним, что r-репликой $\mathcal{E}^r$ рынка $\mathcal{E}$ называется составная экономическая модель, включающая r субэкономик $\mathcal{E}(\nu)$, $\nu = \overline{1,r}$, идентичных исходной модели рынка. Все составляющие рынка $\mathcal{E}(\nu)$ отличаются от соответствующих составляющих других субэкономик только номером ν. Каждый торговец рынка $\mathcal{E}^r$ имеет двойной номер (ν, i), где $\nu = \overline{1,r}$ и $i = \overline{1,n}$. Как и в исходной модели, считаются допустимыми все коалиции. Допустимые состояния рынка $\mathcal{E}^r$ обозначаются через $\{x(\nu)\}_{\nu=1}^r$, при этом разумеется $x(\nu) \in (R_+^m)^n$ для всех $\nu = \overline{1,r}$ и $\sum_{\nu=1}^r \sum_{i=1}^n x^i(\nu) = r \sum_{i=1}^n a^i$. В распределениях из ядра r-реплики рынка однотипные игроки (торговцы) получают равные доли [1], т.е. для любого $\{x(\nu)\}_{\nu=1}^r \in C(\mathcal{E}^r)$ при всех ν, $\nu' = \overline{1,r}$, выполняются равенства $x(\nu) = x(\nu')$. В дальнейшем, если это не приводит к путанице, используется запись $x \in C(\mathcal{E}^r)$ вместо $\{x(\nu)\}_{\nu=1}^r \in C(\mathcal{E}^r)$, где $x(\nu) = x$

для всех $\nu=\overline{1,r}$. В этом смысле множества вальрасовских состояний рынков $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^r$ совпадают, а ядра рынков $\mathcal{E}^r$ стягиваются к множеству вальрасовских состояний [I], т.е. из условия $x\in C(\mathcal{E}^r)$ для всех $r=\overline{1,\infty}$ следует $x\in W(\mathcal{E})$. Поскольку любое вальрасовское состояние является вполне договорным, а вполне договорное обязательно принадлежит ядру, отсюда сразу следует равенство $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} D(\mathcal{E}^r)=W(\mathcal{E})$. Более тонкие свойства последовательности множеств $\{D(\mathcal{E}^r)\}_{r=1}^{\infty}$ исследуются в §3.

§2. Некоторые свойства субдифференциалов функций полезности

Поскольку рассматриваемые в этой работе функции полезности вогнуты, а субдифференциал в [6] определен для выпуклой функции, почти все ссылки на [6] следует понимать с точностью до знаков неравенств.

Производную функции u_i в точке y по направлению y' обозначим через $u_i'(y;y')$, а ее субдифференциал в той же точке - через $\partial u_i(y)$. Производная по направлению $u_i'(y;\cdot)$, понимаемая как функция от вектора направления y', монотонна, вогнута и положительно однородна [6]. Субдифференциал вогнутой функции является выпуклым замкнутым множеством. Если $y\in \operatorname{int}\operatorname{dom} u_i$, то множество $\partial u_i(y)$ непусто и компактно [6], но для $y\notin \operatorname{int}\operatorname{dom} u_i$ множество $\partial u_i(y)$ может оказаться пустым.

ЛЕММА I. Если $x\in\Theta(\mathcal{E})$, то из условия $x^i\neq 0$ следует $\partial u_i(x^i)\neq\emptyset$, причем $\partial u_i(x^i)\subset \operatorname{int} R_+^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in\Theta(\mathcal{E})$ и $\partial u_{i_0}(x^{i_0})=\emptyset$, $x^{i_0}\neq 0$, для некоторого $i_0\in N$. Тогда существует направление $y\in R^m$ такое, что

$$u_{i_0}'(x^{i_0};y)=\infty;\quad u_{i_0}'(x^{i_0};-y)=-\infty.$$

Для каждого $i\in N$ положим $\tilde{x}^i=\sum\limits_{i=1}^{n} a^i/n$. Состояние $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^{n}$ допустимо, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i=\sum\limits_{i=1}^{n} a^i$, причем $\tilde{x}^i\in \operatorname{int} R_+^m$, $i\in N$. Найдется $\lambda\geqslant 0$, для которого $\lambda\tilde{x}^{i_0}\geqslant y$, а потому

$$u_{i_0}'(x^{i_0};\lambda\tilde{x}^{i_0})\geqslant u_{i_0}'(x^{i_0};y)=\infty.$$

Отсюда в силу положительной однородности функции $u'_{i_0}(x^{i_0};\cdot)$ получим $u'_{i_0}(x^{i_0};\tilde{x}^{i_0})=\infty$. Направление x^{i_0} допустимо, следовательно, $u'_{i_0}(x^{i_0};-\lambda x^{i_0})>-\infty$ при любом $\lambda>0$. Направления $\tilde{x}^i-x^i$ для всех $i\in N$ также допустимы, т.е. $u'_i(x^i;\tilde{x}^i-x^i)>-\infty$. Ввиду строгой монотонности функций u_i при всех $i\in N$ выполняются неравенства $u'_i(x^i;x^{i_0})>0$, а значит, найдется $\lambda>0$ такое, что

$$\lambda u'_i(x^i;x^{i_0})+(n-1)u'_i(x^i;\tilde{x}^i-x^i)>0$$

для каждого $i\in N$. Откуда в силу вогнутости и положительной однородности функций $u'_i(x^i;\cdot)$ получаются неравенства

$$u'_i(x^i;\tilde{x}^i-x^i+[\lambda/(n-1)]x^{i_0})>0,\ i\neq i_0;\ u'_{i_0}(x^{i_0};\tilde{x}^{i_0}-(\lambda+1)x^{i_0})=\infty.$$

Это значит, что $x\notin\Theta(\varepsilon)$, но $x\notin\Theta(\varepsilon)$ по первоначальному предположению. Из полученного противоречия следует непустота субдифференциала $\partial u_{i_0}(x^{i_0})$. Остается проверить включение $\partial u_{i_0}(x^{i_0})\subset \operatorname{int} R^m_+$. Предположим противное, т.е. существует вектор $\bar{g}\in\partial u_{i_0}(x^{i_0})\setminus \operatorname{int} R^m_+$. Тогда найдется вектор $y\in R^m_+$, $y\neq 0^{i_0}$, удовлетворяющий условию $\langle\bar{g},y\rangle\le 0$. С другой стороны, для любого направления $y\in R^m$ выполняется неравенство

$$u'_{i_0}(x^{i_0};y)\le \inf\{\langle y,g\rangle \mid g\in\partial u_{i_0}(x^{i_0})\}\le\langle\bar{g},y\rangle,$$

т.е. $u'_{i_0}(x^{i_0};y)\le 0$, что противоречит строгой монотонности функции u_{i_0}. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $x\in C(\varepsilon)$, то $\partial u_i(x^i)\neq\emptyset$ для всех $i\in N$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $x\in C(\varepsilon)$ и направление $y\in R^m$ допустимо в точке $x^i\in R^m_+$, то производная $u'_i(x^i;y)$ конечна.

Обозначим через $\operatorname{cone} G$ коническую оболочку множества G, а через $\operatorname{cl}\operatorname{cone} G$ – ее замыкание.

ЛЕММА 2. Пусть K_i, $i=\overline{0,l}$, – выпуклые замкнутые множества, причем K_i, $i=\overline{1,l}$ – конусы, а K_0 не содержит начала координат. Если

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{cone}\,K_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i\right) = \{0\},$$

то существует набор $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ векторов $f_i \in R^m$ таких, что

$$\inf\{\langle f_i, g\rangle \mid g \in K_i\} \geq 0$$

для каждого $i=\overline{1,\ell}$ и

$$\sup\{\langle \sum_{i=1}^{\ell} f_i, g\rangle \mid g \in K_0\} < 0,$$

т.е. множество K_0 можно строго отделить от набора конусов $\{K_i\}_{i=1}^{\ell}$ набором гиперплоскостей, проходящих через начало координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества

$$K = \prod_{i=0}^{\ell} K_i, \quad Q = \{q = (g, g, \ldots, g) \in (R^m)^{\ell+1}\}$$

выпуклы и замкнуты в $R^{m(\ell+1)}$, причем $K \cap Q = \emptyset$ или, что то же самое, $0 \notin K - Q$. Более того, $0 \notin \mathrm{cl}(K-Q)$, иначе,

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{cone}\,K_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i\right) \neq \{0\},$$

что противоречит условию леммы. Пусть $f = \{f_0, f_1, \ldots, f_\ell\} \in R^{m(\ell+1)}$ - ближайшая к началу координат точка из $\mathrm{cl}(K-Q)$. Остается убедиться, что $\sum_{i=1}^{\ell} f_i = -f_0$ и набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ строго отделяет K_0 от $\{K_i\}_{i=1}^{\ell}$. Точка $0 \in R^{m(\ell+1)}$ - ближайшая к f из точек множества Q, так как $(f-q) \in \mathrm{cl}(K-Q)$ для всех $q \in Q$. Расстояние между точками f и $q = (g, g, \ldots, g)$ в пространстве $R^{m(\ell+1)}$ равно

$$\rho(f;q) = \sqrt{\langle f-q, f-q\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{\ell} \langle f_i - g, f_i - g\rangle}$$

и достигает минимума при $g = 0$, следовательно, градиент функции $\psi(g) = \rho^2(f,q)$ от $g \in R^m$ равен нулю при $g=0$. Это значит, что выполняется равенство $\sum_{i=0}^{\ell} f_i = 0$, т.е, $f_0 = -\sum_{i=1}^{\ell} f_i$. Для любого $y \in \mathrm{cl}(K-Q)$ выполняется неравенство $\langle f, y-f\rangle \geq 0$, т.е. $\langle f, y\rangle \geq \langle f, f\rangle$. Если $y^i \in K_i$ при всех $i=\overline{1,\ell}$, то

$$\tilde{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i + y^i, f_{i+1}, \ldots, f_\ell) \in \mathrm{cl}(K-Q),$$

а потому $\langle y^i, f_i \rangle \geqslant 0$, в противном случае

$$\langle \tilde{f}, f \rangle = \langle f, f \rangle + \langle y^i, f_i \rangle < \langle f, f \rangle,$$

чего не может быть. Если $y^0 \in K_0$, то

$$\tilde{y} = (y^0, 0, 0, \ldots, 0) \in cl(K-Q),$$

откуда

$$\langle f_0, y^0 \rangle = \langle f, \tilde{y} \rangle \geqslant \langle f, f \rangle > 0$$

для всякого $y^0 \in K_0$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $K(x^i) = cl\ cone\ \partial u_i(x^i),\ i=\overline{1,n}$, и $\bigcap_{i=1}^{n} K(x^i) = \{0\}$, то существует набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^n$,для которого выполняются равенство $\sum_{i=1}^n f_i = 0$ и неравенства

$$\inf\{\langle f_i, g \rangle \mid g \in \partial u_i(x^i)\} > 0, \quad i \in N, \qquad (\mathrm{I})$$

т.е. субдифференциалы $\partial u_i(x^i)$ можно строго разделить набором гиперплоскостей, проходящих через начало координат.

В самом деле, применяя лемму 2 к набору конусов $K(x^i)$, $i \neq \nu$, и субдифференциалу $\partial u_\nu(x^\nu)$ при каждом $\nu \in N$ получим набор векторов $\{f_i^\nu\}_{i=1}^n$, строго отделяющий субдифференциал $\partial u_\nu(x^\nu)$ от набора конусов $\{K(x^i)\}_{i \neq \nu}$. Остается положить $f_i = \sum_{\nu=1}^n f_i^\nu$ для каждого $i = \overline{1,n}$. Конус $\bigcap_{i=1}^n K(x^i)$ обозначим через $K(x)$, так как в дальнейшем изложении он упоминается постоянно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\bar{g} \in R^m$ и $\langle \bar{g}, g \rangle > 0$ для всякого $g \neq 0$ из $K(x)$, тогда существует набор $\{f_i\}_{i=1}^n$ векторов $f_i \in R^m$ и число $\lambda \geqslant 0$ такие, что $\sum_{i=1}^n f_i = \lambda \bar{g}$ и выполняются неравенства (I).

Действительно, полупространство $K_0 = \{g \in R^m \mid \langle \bar{g}, g \rangle \leqslant 0\}$, определяемое вектором $\bar{g}$, является выпуклым конусом. Следовательно, каждый субдифференциал $\partial u_\nu(x^\nu)$, $\nu \in N$ можно строго отделить от набора конусов $\{K_0, \{K(x^i)\}_{i \neq \nu}\}$ набором гиперплоскостей, определяемых векторами $\{f_i^\nu\}_{i=0}^n$. Набор векторов $\{f_i\}_{i=0}^{n}$, где $f_i=\sum_{\nu=1}^{n} f_i^{\nu}$, $i=\overline{0,n}$, удовлетворяет равенству $\sum_{i=0}^{n} f_i=0$ и неравенствам (I). Для $i=0$ выполняется условие

$$\inf\{\langle f_0, g\rangle \mid g\in K_0\}\geqslant 0,$$

что возможно только в том случае, если $\langle f_0, g\rangle\geqslant 0$ для всех g из K_0, т.е. $\sum_{i=1}^{n}\langle f_i, g\rangle\leqslant 0$ при $g\in K_0$. А последнее возможно только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} f_i=\lambda\bar{g}$ при некотором $\lambda\geqslant 0$. Случай $\lambda=0$ соответствует условию $K(x)=\{0\}$, т.е. следствию I.

ЛЕММА 3. Пусть $x\in X$, причем $\partial u_i(x^i)\neq\varnothing$ для каждого $i\in N$. Тогда $x\in\Theta(\mathcal{E})$, если и только если $K(x)\neq\{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in\Theta(\mathcal{E})$, если при этом $K(x)=\{0\}$, то субдифференциалы $\{\partial u_i(x^i)\}_{i=1}^{n}$ можно строго разделить набором гиперплоскостей, проходящих через начало координат, т.е. существует набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, для которых выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} f_i=0_n$ и неравенства (I). Положим $f_i(\varepsilon)=f_i+\varepsilon y^i$, где $y^i=\sum_{\nu=1}^{n} a^{\nu}/n-x^i$, а $\varepsilon>0$ достаточно мало, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf\{\langle f_i, g\rangle \mid g\in\partial u_i(x^i)\}>-\varepsilon u_i'(x^i; y^i),\quad i\in N.$$

Тогда $f_i(\varepsilon)\in \operatorname{int}\operatorname{dom} u_i'(x^i;\cdot)$ и, следовательно,

$$u_i'(x^i; f_i(\varepsilon))=\inf\{\langle g, f_i(\varepsilon)\rangle \mid g\in\partial u_i(x^i)\}>0$$

для каждого $i\in N$, что противоречит условию $x\in\Theta(\mathcal{E})$, поэтому $K(x)\neq\{0\}$.

Пусть $p\in K(x)$ и $\|p\|=1$, тогда для каждого $i\in N$ найдется $\lambda_i>0$ такое, что $\lambda_i p\in\partial u_i(x^i)$. В самом деле, если $p\in K(x^i)$ для некоторого $i\in N$, то существует последовательность $\{p^i(k)\}_{k=1}^{\infty}$ векторов $p^i(k)\in\partial u_i(x^i)$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{k\to\infty} p^i(k)/\|p^i(k)\|=p.$$

Если эта последовательность ограничена, то $\lambda_i p\in\partial u_i(x^i)$ при некотором $\lambda_i>0$, а если не ограничена, то p – рецессивное направление множества $\partial u_i(x^i)$. Совокупность рецессивных направлений субдифференциала $\partial u_i(x^i)$ представляет собой конус

$$0^+\partial u_i(x^i)=\{g\in R^m_+ \mid \langle g, x^i\rangle = 0\}.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^n x^i = \sum_{i=1}^n a^i \in \operatorname{int} R^m_+$, не существует общего для всех $\partial u_i(x^i)$, $i\in N$, рецессивного направления. Если же $\lambda_{i_0} p \in \partial u_i(x^{i_0})$ для некоторых $i_0\in N$ и $\lambda_{i_0}>0$, то $p\in \operatorname{int} R^m_+$. Следовательно, $p\notin \partial u_i(x^i)$ для всех $i\in N$. Поэтому для каждого $i\in N$ найдется $\lambda_i>0$, при котором $\lambda_i p\in \partial u_i(x^i)$. Если при этом $x\notin \Theta(\mathcal{E})$, то найдется вектор $\bar{x}\in X$, удовлетворяющий условиям $u_i(\bar{x}^i)>u_i(x$ при всех $i\in N$. Это значит

$$\inf\{\langle g, \bar{x}^i - x^i\rangle \mid g\in \partial u_i(x^i)\} \geq u_i'(x^i; \bar{x}^i - x^i)>0$$

и, следовательно, $\langle p, \bar{x}^i - x^i\rangle > 0$ для каждого $i\in N$. Но тогда $\sum_{i=1}^n \langle p, \bar{x}^i - x^i\rangle > 0$, что противоречит равенству $\sum_{i=1}^n \bar{x}^i = \sum_{i=1}^n x^i$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $p\in K(x)$ и $p\neq 0$, то для каждого $i\in N$ найдется $\lambda_i>0$ такое, что $\lambda_i p\in \partial u_i(x^i)$.

§3. Вполне договорные и вальрассовские состояния в r-репликах рынка

Напомним, что состояние $\bar{x}\in X$ принадлежит $W(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда существует вектор цен $\bar{p}\in P$, удовлетворяющий условиям:

(а) $\langle \bar{p}, \bar{x}^i\rangle = \langle \bar{p}, a^i\rangle$, $i\in N$,

(б) $u_i(x^i) = \max\{u_i(x^i) \mid \langle \bar{p}, x^i\rangle \leq \langle \bar{p}, a^i\rangle\}$, $i\in N$.

В настоящем параграфе исследуются условия совпадения множеств $\mathcal{D}(\mathcal{E}^r)$ и $W(\mathcal{E}^r)$ при $r>1$. Для этой цели потребуются некоторые вспомогательные утверждения, доказываемые ниже.

ЛЕММА 4. Если $\bar{x}\in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ и

$$\operatorname{conv}(\{\bar{x}^i - a^i\}_{i=1}^n) \cap \operatorname{int} K^+(\bar{x}) = \emptyset,$$

где $K^+(\bar{x}) = \{y\in R^m \mid \langle y, g\rangle \geq 0 \ \forall g\in K(\bar{x})\}$, то $\bar{x}\in W(\mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конус $K(\bar{x})$ содержится в R^m_+, а конус $K^+(\bar{x})$ содержит R^m_+ и потому телесен. Его внутренность можно отделить от множества $\operatorname{conv}(\{\bar{x}^i - a^i\}_{i=1}^n)$ гиперплоскостью, проходящей через начало координат, т.е. найдется вектор $\bar{p}\in R^m$, удовлетворяющий условиям $\langle \bar{p}, q \rangle > 0$ для всех $q \in \operatorname{int} K^+(\bar{x})$ и $\langle \bar{p}, \bar{x}^i - a^i \rangle \leq 0$ для всех $i \in N$. Но тогда $\bar{p} \in K(\bar{x})$, так как $K(\bar{x}) = K^{++}(\bar{x})$. Согласно замечанию к лемме 3 предыдущего параграфа, для каждого $i \in N$ найдется множитель $\lambda_i > 0$, при котором $\lambda_i \bar{p} \in \partial u_i(\bar{x}^i)$. Но тогда для любого $x^i \in R^m_+$ справедлива оценка

$$u_i(x^i) \leq u_i(\bar{x}^i) + \lambda_i \langle \bar{p}, x^i - \bar{x}^i \rangle.$$

Если при этом $\langle \bar{p}, x^i \rangle \leq \langle \bar{p}, \bar{x}^i \rangle$, то $u_i(x^i) \leq u_i(\bar{x}^i)$. Следовательно, для каждого i выполняется условие максимума полезности при бюджетном ограничении. Условия соблюдения стоимостного баланса – $\langle \bar{p}, \bar{x}^i \rangle = \langle \bar{p}, a^i \rangle$ для каждого $i \in N$ также выполнены ввиду равенства $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i = \sum_{i=1}^{n} a^i$ и неравенств $\langle \bar{p}, \bar{x}^i - a^i \rangle \leq 0,\ i \in N$. Таким образом, $(\bar{p}, \bar{x})$ – конкурентное равновесие, т.е. $\bar{x} \in W(\mathcal{E})$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 5. Если $r > 1$ и $x \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^r)$, то

$$(x^i - a^i) \notin \operatorname{int} K^+(x),\quad i \in N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^r)$, то существует устойчивая система договоров $V = \{v_\xi\}_{\xi \in \Xi}$, удовлетворяющая условию

$$x = a + x(V).$$

Пусть $\alpha \in [0,1]$, S – коалиция, состоящая из всех торговцев за исключением (ν_0, i_0), где $(x^{i_0} - a^{i_0}) \in \operatorname{int} K^+(x)$, а

$$V^\alpha = \{\alpha v_\xi,\ (1-\alpha) v_\xi\}_{\xi \in \Xi}$$

– разбиение системы договоров V. Коалиция S может разорвать договоры αv_ξ для всех $\xi \in \Xi$ и заключить новый договор $v(S)$. В результате получится новое распределение товаров $\{\tilde{x}(\nu)\}_{\nu=1}^{r}$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{(\nu,i) \in S} \tilde{x}^i(\nu) = \sum_{(\nu,i) \in S} x^i(\nu) - \alpha \sum_{(\nu,i) \in S} x^i(\nu)(V) = \sum_{(\nu,i) \in S} x^i(\nu) + \alpha x^{i_0}(\nu_0)(V).$$

Если положить $f_0 = x^{i_0}(\nu_0)(V)$, то согласно следствию 2 леммы 2 существует набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющих равенству $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_0$ и набору неравенств (I). Как и в доказательстве леммы 3, векторы f_i можно подправить, положив $f_i(\varepsilon)=f_i+\varepsilon y^i$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} f_i(\varepsilon)=f_0$, а для каждого $i\in N$ имеем $f_i(\varepsilon)\in \operatorname{int}\operatorname{dom} u_i'(x^i;\cdot)$ и

$$u_i'(x^{i_0};f_i(\varepsilon))=\inf\{\langle f_i(\varepsilon),g\rangle \mid g\in\partial u_i(x^i)\}>0.$$

Договор $v(S)$ определим из условия

$$x^i(\nu_i)(v(S))=\alpha(f_i(\varepsilon)+x^i-a^i),\ i=\overline{1,n};\ x^i(\nu)(v(S))=\alpha(x^i-a^i),(\nu,i)\in S,\ \nu\neq\nu_1,$$

где $\nu_1\neq\nu_0$. При достаточно малых α выполняются равенства

$$u_i(\tilde{x}^i(\nu))=u_i(x^i(\nu)),\quad (\nu,i)\in S,\quad \nu\neq\nu_1,$$

и неравенства

$$u_i(\tilde{x}^i(\nu_1))>u_i(x^i(\nu_1)),\quad i=\overline{1,n},$$

т.е. система договоров V^α доминируема по коалиции $S\in\sigma$. Это противоречит первоначальному предположению об устойчивости V. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА I. Для рынка $\mathcal{E}$ с двумя торговцами множества $D(\mathcal{E}^z)$ и $W(\mathcal{E}^z)$ совпадают при всех $z>1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z>1$ и $x\in D(\mathcal{E}^z)$, то $(x^i-a^i)\notin \operatorname{int} K^+(x)$ для $i=1,2$ в силу леммы 5. Но $x^1-a^1=a^2-x^2$, поэтому прямая $\{\lambda(x^1-a^1)\mid \lambda\in R\}$, содержащая точки x^1-a^1 и x^2-a^2, не имеет пересечений с множеством $\operatorname{int} K^+(x)$. Из утверждения леммы 4 следует, что $x\in W(\mathcal{E})$, т.е. $W(\mathcal{E}^z)=D(\mathcal{E}^z)$ при $z>1$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если для некоторого $i_0\in N$ функция u_{i_0} дифференцируема на $\operatorname{int} R_+^m$ и $u_{i_0}^{-1}[u_{i_0}(a^{i_0})]\subset \operatorname{int} R_+^m$, то множества $D(\mathcal{E}^z)$ и $W(\mathcal{E}^z)$ совпадают при всех $z>1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{x(\nu)\}_{\nu=1}^{z}\in D(\mathcal{E}^z)$, то $x(\nu)=x$ при всех $\nu=\overline{1,z}$ для некоторого $x\in C(\mathcal{E})$, причем $x^{i_0}\in \operatorname{int} R_+^m$. В самом деле, из условия $x\in C(\mathcal{E})$ имеем $u_{i_0}(x^{i_0})\geq u_{i_0}(a^{i_0})>u_{i_0}(0)$, а из непрерывности функции u_i на R_+^m имеем $u_{i_0}(\alpha x^{i_0})=u_{i_0}(a^{i_0})$ для некоторого $\alpha>0$. По условию теоремы $u_{i_0}^{-1}[u_{i_0}(\alpha x^{i_0})]\subset \operatorname{int} R_+^m$, следовательно, $x^{i_0}\in \operatorname{int} R_+^m$. Субдифференциал $\partial u_{i_0}(x^{i_0})$ состоит из единственной точки $\operatorname{grad} u_{i_0}(x^{i_0})$, т.е. $K(x)$ – луч, а $K^+(x)$ – полупространство. В силу леммы

5 выполняются условия леммы 4, поэтому $x \in W(\mathcal{E})$. Но тогда $\mathcal{D}(\mathcal{E}^z) = W(\mathcal{E}^z)$ при $z > 1$, что и требовалось доказать.

Остается показать, что без дополнительных предположений относительно функций полезности или числа торговцев утверждение, аналогичное утверждениям теорем I и 2, неверно. Для этого понадобится еще одна небольшая лемма.

ЛЕММА 6. Если $x \in \theta(\mathcal{E}) \cap \operatorname{int} R^m_+$ и

$$q(s) = \sum_{i \in N \setminus S} (x^i - a^i) \notin \operatorname{int} K^+(x)$$

для каждой коалиции $S \in \mathcal{G}$, то $x \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что система договоров V, состоящая из одного договора v и удовлетворяющая условию $x = a + x(V)$, устойчива. Если V доминируема по некоторой коалиции S, то существует число $\alpha \in [0,1]$ и договор $\bar{v}$ такие, что $s(\bar{v}) = S$ и для каждого $i \in S$ выполняется неравенство $u_i(\tilde{x}^i) \geq u_i(x^i)$, где $\tilde{x} = \alpha a + (1-\alpha)x + x(\bar{v})$. Поскольку $q(s) \notin \operatorname{int} K^+(x)$, существует вектор $p(s) \in P \cap K(x)$, удовлетворяющий условию $\langle p(s), q(s)\rangle \leq 0$. Так как $\sum_{i \in S} (\tilde{x}^i - x^i) = \alpha q(s)$, отсюда следует оценка

$$\sum_{i \in S} \langle p(s), \tilde{x}^i - x^i \rangle = \alpha \langle p(s), q(s) \rangle \leq 0 .$$

Если при этом $u_{i_0}(\tilde{x}^{i_0}) > u_{i_0}(x^{i_0})$ для некоторого $i_0 \in N$, то $\langle p(s), \tilde{x}^{i_0} - x^{i_0}\rangle > 0$, поскольку $\lambda_0 p(s) \in \partial u_{i_0}(x^{i_0})$ при некотором $\lambda_0 > 0$ и

$$\inf\{\langle g, \tilde{x}^{i_0} - x^{i_0}\rangle \mid g \in \partial u_{i_0}(x^{i_0})\} \geq u'_{i_0}(x^{i_0}; \tilde{x}^{i_0} - x^{i_0}) > 0.$$

Найдется $i_1 \in S$ такой, что $\langle p(s), \tilde{x}^{i_1} - x^{i_1}\rangle < 0$. Если $\lambda_1 p(s) \in \partial u_{i_1}(x^{i_1})$, то

$$u_{i_1}(\tilde{x}^{i_1}) \leq u_{i_1}(x^{i_1}) + \lambda_1 \langle p(s), \tilde{x}^{i_1} - x^{i_1} \rangle$$

и $\lambda_1 > 0$, следовательно, $u_{i_1}(\tilde{x}^{i_1}) < u_{i_1}(x^{i_1})$, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Рассмотрим двухпродуктовый рынок $\mathcal{E}$ с четырьмя торговцами, имеющими одинаковые функции полезности $u_i = \sqrt{u}$, где

$$u(\alpha; \beta) = \min\{\alpha; \beta\} + (2\sqrt{\alpha\beta} + \alpha + \beta)/2$$

и различные начальные наборы товаров. Общее количество каждого товара в экономике положим равным двум условным единицам, причем для удобства примем условие $a^1+a^2=a^3+a^4$, т.е. $a^1+a^2=(1;1)$ и $a^3+a^4=(1;1)$. В качестве начального распределения товаров возьмем состояние рынка, определяемое парой векторов

$$a^1=(0;1);\quad a^3=(1/2-\lambda/2-\varepsilon;\ 1/2+\lambda/2),$$

где $\lambda>0$ и $\varepsilon>0$ достаточно малы, так что выполняется неравенство $\lambda+\varepsilon<1/2$. Функция $\sqrt{u}$ строго вогнута, а функция u нет, но эти функции определяют один и тот же предпорядок на R^2_+. Поскольку все используемые здесь свойства рынка зависят не от самих функций полезности, а от порождаемых ими предпорядков, можно положить $u_i=u$ для каждого $i\in N$. Полная производная функции u в точке $(\alpha;\beta)$ равна

$$\operatorname{grad} u(\alpha;\beta)=\left(\frac{\sqrt{\beta/\alpha}+1}{2};\ 1+\frac{\sqrt{\alpha/\beta}+1}{2}\right),$$

если $\alpha>\beta>0$, и

$$\operatorname{grad} u(\alpha;\beta)=\left(\frac{\sqrt{\beta/\alpha}+1}{2}+1;\ \frac{\sqrt{\alpha/\beta}+1}{2}\right),$$

если $\beta>\alpha>0$. При $\alpha=\beta>0$ функция u не дифференцируема, а ее субдифференциал равен

$$\partial u(\alpha;\alpha)=\{(1+\eta;\ 2-\eta)\mid 0\le\eta\le 1\},$$

причем субдифференциал не зависит от выбора $\alpha>0$. Конус

$$K=\operatorname{cl}\operatorname{cone}\partial u(\alpha;\alpha)=\operatorname{cl}\operatorname{cone}\partial\sqrt{u(\alpha;\alpha)}$$

определяется предпорядком, порождаемым функциями u и $\sqrt{u}$, следовательно, также не зависит от $\alpha>0$. Граница Парето $\theta(\mathcal{E})$ рынка $\mathcal{E}$ состоит из распределений товаров $x=\{x^i\}_{i=1}^4$, для которых выполняются равенства $x_1^i=x_2^i$, $i=\overline{1,4}$, поэтому для $x\in\theta(\mathcal{E})\cap\operatorname{int}R^{mn}_+$ конусы $K(x^i)$ совпадают с K и $K(x)=K$.

Рассмотрим состояния $\bar{x}=\{\bar{x}^i\}_{i=1}^4$ и $x=\{x^i\}_{i=1}^4$, где $\bar{x}_j^i=(a_1^i+a_2^i)/2$, а $x_j^i=1/2$, $j=1,2$, для каждого $i=\overline{1,4}$. При любом η, $0\le\eta\le1$, состояние $x(\eta)=\eta x+(1-\eta)\bar{x}$ принадлежит границе Парето, причем только при $\eta=0$ оно является вальрасовским. Действительно, если $\eta=0$, то

$x(\eta)=\bar{x}$, причем пара $(\bar{p},\bar{x})$, где $\bar{p}=(1/2;1/2)$, является состоянием конкурентного равновесия, что легко проверяется непосредственно. Если $\eta>0$, то не существует вектора $p\in P$ такого, что $\langle p, x^i(\eta)-a^i\rangle=0$ для каждого $i\in N$, следовательно, $x(\eta)\notin W(\mathcal{E})$. Остается убедиться, что при любом $z=\overline{1,\infty}$ найдется η такое, что $x(\eta)\in D(\mathcal{E}^z)$. Для этого достаточно проверить выполнение условий леммы 6 при произвольном z. Через l_i, $i=\overline{1,4}$, обозначим число торговцев вида (ν,i) в некоторой произвольной коалиции S и положим

$$q(s)=\sum_{i=1}^{4}(z-l_i)(x^i-a^i);\quad \bar{q}(s)=\sum_{i=1}^{4}(z-l_i)(\bar{x}^i-a^i).$$

Тогда состоянию $x(\eta)$ соответствует вектор

$$q^\eta(s)=\sum_{i=1}^{4}(z-l_i)(x^i(\eta)-a^i)=\eta q(s)+(1+\eta)\bar{q}(s).$$

Подставляя в эту формулу значения x^i-a^i и $\bar{x}^i-a^i$, получим

$$q^\eta(s)=\frac{l_2-l_1}{2}(1;-1)+\frac{l_4-l_3}{2}(\lambda+\varepsilon+\varepsilon\eta;-\lambda-\varepsilon+\varepsilon\eta).$$

Если $q^\eta(s)\in int\,K^+$, то для всех $p\in P\cap K$ должно выполняться неравенство $\langle q^\eta(s),p\rangle>0$, в частности для $p=(1/2;1/2)$:

$$\langle q^\eta(s),p\rangle=\frac{l_4-l_3}{2}\eta\varepsilon>0,$$

откуда следует, что $l_4-l_3>0$. Аналогично, для $p=(1/3;2/3)$

$$\langle q^\eta(s),p\rangle=\frac{l_1-l_2}{6}+\frac{l_3-l_4}{6}(\lambda+\varepsilon-3\eta\varepsilon)>0$$

и для $p=(2/3;1/3)$

$$\langle q^\eta(s),p\rangle=\frac{l_2-l_1}{6}+\frac{l_4-l_3}{6}(\lambda+\varepsilon+3\eta\varepsilon)>0.$$

Объединяя эти неравенства, получим оценку

$$\frac{l_4-l_3}{2}\eta\varepsilon>\frac{l_2-l_1}{6}+\frac{l_4-l_3}{6}(\lambda+\varepsilon)>-\frac{l_4-l_3}{2}\eta\varepsilon,$$

которую с учетом неравенства $l_4-l_3>0$ можно записать в виде

$$\eta\varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{3(l_1 - l_3)} + \frac{\lambda + \varepsilon}{3} > -\eta\varepsilon .$$

Если $\lambda + \varepsilon$ – иррациональное число, то в силу целочисленности коэффициентов $l_i,\ i = \overline{1,4}$, найдется η, при котором эта оценка не выполняется. Следовательно, при любом $\gamma = \overline{1,\infty}$ найдется $\eta > 0$ такое, что состояние $x(\eta)$ удовлетворяет условию леммы 6. Последнее означает несовпадение множеств $D(\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$, поскольку $x(\eta) \in D(\varepsilon)$ и $x(\eta) \notin W(\varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, 1974.
2. КОЗЫРЕВ А.Н. Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена. – Оптимизация, 1982, вып.29(46), с.66–78.
3. КОЗЫРЕВ А.Н. Договорные и вполне договорные состояния в абстрактной экономике. – Новосибирск, 1982. – 44 с. (Препринт/ИМ СО АН СССР:7).
4. ДУБОВИЦКИЙ А.Я., МИЛЮТИН А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. – Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1965, т.5, №3, с.395–453.
5. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н.Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969.
6. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
7. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., Васильев Л.В.Недифференцируемая оптимизация.– М.: Наука, 1981.
8. МАКАРОВ В.Л. О понятии договора в абстрактной экономике. – Оптимизация, 1980, вып.24(41), с.5–17.

Поступила в ред. изд. отдел
06.06.1982 г.