Выпуск 31(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 519.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭКЛАНДА ДЛЯ ВЫВОДА НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.В.Финкельштейн

§1.Введение

Одним из важных результатов, появившихся в последнее десятилетие в теории экстремальных задач, является теорема Экланда [1].

ТЕОРЕМА. Пусть X – банахово пространство, f – функционал в X, $f: X \to R \cup \{+\infty\}$, $\mu = \inf_{x \in X} f(x)$, f – полунепрерывный снизу функционал, $f(x) \not\equiv +\infty$, $\mu > -\infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через x_ε такую точку X, что $\mu \leq f(x_\varepsilon) \leq \mu + \varepsilon$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует такая точка $z_\varepsilon \in X$, что $f(z_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon)$, $\|z_\varepsilon - x_\varepsilon\| \leq \delta$ $\forall x \neq z_\varepsilon$, $f(z_\varepsilon) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} \|x - z_\varepsilon\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее неравенство показывает, что

$$f(z_\varepsilon) = \min_{x \in X} [f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} \|x - z_\varepsilon\|].$$

Работы, в которых используется эта теорема, в настоящее время уже достаточно многочисленны. Отметим здесь лишь некоторые из них [2-5]. Одним из достоинств теоремы Экланда является то, что эта теорема позволяет весьма просто выводить необходимые условия (НУ) для минимизирующих последовательностей в экстремальных задачах без дополнительных ограничений, в которых отсутствует классическое решение. Этот вывод осуществляется путём перехода к последовательности задач, в каждой из которых соответствующий член исходной минимизирующей последовательности является классическим решением, и использованием НУ классического экстремума.

Хорошо известно, что доказывать необходимые условия в задачах без ограничений существенно легче, чем в задачах с ограничениями. Поэтому естественным является подход, при котором НУ устанавливаются для вспомогательных задач, а затем полученные условия используются для вывода НУ в исходной задаче.

Метод штрафных функций для доказательства НУ таким образом использовался в работах [6-8]. В [9] приведен вариант общей схемы получения НУ по методу штрафных функций. В [5] для снятия ограничений и доказательства НУ классического минимума в задаче математического программирования использована конструкция аналогичная методу центров Хьюарда [10]. В настоящей работе для снятия ограничений применяется метод штрафных функций. Приводится общая схема, с помощью которой можно НУ, установленные в задаче без ограничений, использовать для получения НУ в исходной задаче. В этой схеме важную роль также играет теорема Экланда.

В данной работе в качестве решения задачи отыскания минимума рассматривается последовательность - обобщенное решение задачи. Необходимые условия, которым удовлетворяют обобщенные решения, будем в дальнейшем называть обобщенными НУ. Обобщенная постановка экстремальной задачи наиболее полно рассмотрена в [11]. В этой же работе сформулированы обобщенные НУ для экстремальных задач, обладающих определенными свойствами выпуклости. В задаче без дополнительных ограничений условия, при которых данная последовательность является минимизирующей, получены в [12]. В [13] методы получения условий высших порядков классического минимума применены для построения абстрактной теории минимума на множестве последовательностей. Для задач оптимального управления с дифференциальными и функциональными уравнениями минимизирующие последовательности управлений использованы в [14] в качестве приближений обобщенных в смысле Варги решений. В [6,7] рассмотрены обобщенные НУ в задачах оптимального управления с обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными. Для задач математического программирования с дифференцируемыми по Гато функционалами обобщенные НУ установлены в [1,8]. В [15] с использованием метода штрафных функций получены критерии оптимальности для задач векторной оптимизации. В [16] доказан критерий оптимальности последовательности в терминах модифицированной функции Лагранжа.

В настоящей работе содержательные НУ устанавливаются для экстремальных задач, функционалы в которых являются регулярно локально-выпуклыми (р.л.в.) [17]. Класс р.л.в. функционалов включает, в частности, непрерывные выпуклые функционалы и функционалы, дифференцируемые по Фреше.

Приведем определение р.л.в. функционала.

Пусть X - банахово пространство, функционал $f: X \to R \cup \{+\infty\}$, $f'(x,h)$ - производная функционала в точке x по направлению h. Функционал f называется локально-выпуклым в точке x, если его производная по направлениям в этой точке существует и выпукла. Будем говорить, что функционал f равномерно дифференцируем по направлению h в точке x, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $\left| \frac{f(x+\lambda z)-f(x)}{\lambda} - f'(x,h) \right| < \varepsilon$, как только $|z-h| < \delta$, $0 < \lambda < \lambda_0$.

Функционал $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ называется регулярно локально-выпуклым (р.л.в.) в точке x, если он локально-выпуклый и равномерно дифференцируемый по всем направлениям в этой точке. Функционал, р.л.в. в каждой точке пространства X, будем называть р.л.в. функционалом в пространстве X.

Пусть X - банахово пространство, f - р.л.в. функционал в X, X^* - сопряженное пространство.

Субдифференциалом функционала f в точке x называется множество

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f'(x,h) \geq \langle x^*, h \rangle \ \forall h \in X\},$$

элементы множества $\partial f(x)$ называются субградиентами функционала f в точке x. Если $\partial f(x) \neq \emptyset$, то говорят, что f субдифференцируем в точке x; ε-субдифференциалом функционала f в точке x будем называть множество

$$\partial_\varepsilon f(x) = \bigcup_{|\xi - x| < \varepsilon} \partial f(\xi),$$

элементы множества $\partial_\varepsilon f(x)$ назовем ε-субградиентами функционала f в точке x.

Приведем еще одно определение, нужное для дальнейшего.

Пусть X, Y - банаховы пространства, g - отображение из X в Y. Говорят, что g удовлетворяет условию Липшица на X, если существует число C такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \le C \|x_1 - x_2\|.$$

§2. Необходимые условия для последовательностей в экстремальной задаче без ограничений

Пусть X – банахово пространство, функционал $f: X \to R \cup \{+\infty\}$, $\mu = \inf_{x \in X} f(x)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \to \mu, \quad x \in X. \qquad \text{(I)}$$

Обобщенным решением задачи (I) будем называть минимизирующую последовательность $\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если x_0 – точка минимума функционала f, субдифференцируемого в этой точке, то $0 \in \partial f(x_0)$.

Обозначим через $\rho(x, M)$ расстояние от точки x до множества M, $\rho(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|$.

ТЕОРЕМА I. Пусть f – р.л.в. функционал в банаховом пространстве X. Пусть $\mu > -\infty$ и $\{x_n\}$ – обобщенное решение задачи (I). Тогда существует обобщенное решение задачи (I) $\{\bar{x}_n\}$ такое, что при $n \to \infty$ имеют место $\|\bar{x}_n - x_n\| \to 0$, $\rho(0, \partial f(\bar{x}_n)) \to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mu$, то $f(x_n) = \mu + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

По теореме Экланда при каждом n найдется $\bar{x}_n$ так, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ является обобщенным решением задачи (I) и имеют место соотношения:

$$\|\bar{x}_n - x_n\| \le \sqrt{\varepsilon_n}, \qquad (2)$$

$$f(\bar{x}_n) = \min_{x \in X} [f(x) + \sqrt{\varepsilon_n} \|x - \bar{x}_n\|]. \qquad (3)$$

Применяя необходимое условие того, что точка $\bar{x}_n$ удовлетворяет (3), и используя свойства субдифференциала, получим

$$0 \in \partial[f(x) + \sqrt{\varepsilon_n} \|x - \bar{x}_n\|]\Big|_{x = \bar{x}_n} = \partial f(\bar{x}_n) + \sqrt{\varepsilon_n}\, B^*,$$

где $B^*=\{x^*\in X^*: \|x^*\|\leq 1\}$. Следовательно, существуют $x_n^*, b_n^*, x_n^*\in\partial f(x_n)$, $\|b_n^*\|\leq 1$, такие, что $0=x_n^*+\sqrt{\varepsilon_n}\, b_n^*$, а значит,

$$x_n^* = -\sqrt{\varepsilon_n}\; b_n^*. \qquad (4)$$

Из (4) имеем

$$\rho(0,\partial f(x_n)) = \inf\{\|x_n^*\|: x_n^*\in\partial f(x_n)\}\leq\sqrt{\varepsilon_n}. \qquad (5)$$

Из неравенств (2) и (5) следует утверждение теоремы I.

Из теоремы I вытекает ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть выполнены предположения теоремы I. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$ имеет место $\rho(0,\partial_\varepsilon f(x_n))\to 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть f -дифференцируемый по Фреше функционал в банаховом пространстве X , $f'(x)$ - производная Фреше функционала f в точке x , $\mu>-\infty$, $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (I). Тогда существует $\{\bar{x}_n\}$ -обобщенное решение задачи (I) такое, что при $n\to\infty$ имеют место $\|\bar{x}_n-x_n\|\to 0$, $\|f'(\bar{x}_n)\|\to 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены предположения следствия 2, $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (I) и производная Фреше $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица на X .

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|f'(x_n)\|=0.$$

§3. Общая схема вывода и необходимые условия в экстремальной задаче с операторным ограничением

Пусть X , Y - банаховы пространства, K - замкнутое множество в Y , f - функционал в X , $f: X\to R\cup\{+\infty\}$, g - оператор из X в Y . Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \to \inf, \tag{6}$$

$$g(x) \in K. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{M} = \{\{x_n\} : x_n \in X,\ \rho(g(x_n), K) \to 0,\ n \to \infty\},$$

$$f(\{x_n\}) = \underline{\lim}_{n \to \infty} f(x_n),\quad \bar{f} = \inf_{\{x_n\} \in \mathfrak{M}} f(\{x_n\}).$$

Обобщенным решением задачи (6),(7) будем называть последовательность $\{x_n\} \in \mathfrak{M}$ такую, что $\underline{\lim}_{n \to \infty} f(x_n) = \bar{f}$; $\bar{f}$ назовем обобщенной нижней гранью задачи (6), (7).

Предположим, что $\mathfrak{M} \neq 0$. Тогда, как нетрудно показать, обобщенное решение задачи (6),(7) существует. Допустим далее, что $-\infty < \bar{f} < \infty$.

Пусть φ - функционал в Y , удовлетворяющий условиям:

I) $\varphi(y) = 0,\ y \in K$;

2) $\varphi(y) > 0,\ y \notin K$;

3) $\varphi(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho(y_n, K) \to 0$.

Будем говорить, что для экстремальной задачи (6),(7) выполняется условие φ -роста, если существует функционал φ , удовлетворяющий условиям I)-3), и константа $A > 0$ такие, что

$$\inf_{x \in X} [f(x) + A\varphi(g(x))] > -\infty .$$

При каждом $\alpha \geq 0$ введем в рассмотрение функционал

$$F(x, \alpha) = f(x) + \alpha\varphi(g(x)),\quad \alpha \geq 0 .$$

Существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\alpha \to \infty} \inf_{x \in X} F(x, \alpha) = \tilde{f} .$$

ТЕОРЕМА 2. Если для экстремальной задачи (6),(7) выполняется условие φ-роста, то $\tilde{f} = \bar{f}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы I в работе [6].

ЛЕММА I. Пусть $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (6),(7), для которой выполняется условие φ-рота. Тогда существует последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} [F(x_n, \alpha_n) - \inf_{x\in X} F(x, \alpha_n)] = 0. \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\gamma_n = \varphi(g(x_n))$. Положим

$$\alpha_n = \begin{cases} \gamma_n^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } \gamma_n > 0, \\ n, & \text{если } \gamma_n = 0. \end{cases}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \bar{f}$ и по теореме 2 $\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X} F(x,\alpha_n) = \bar{f}$, то

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n) - \inf F(x, \alpha_n)] = 0. \tag{9}$$

Подставляя $f(x_n) = F(x_n, \alpha_n) - \alpha_n\gamma_n$ в выражение (9) и учитывая, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\gamma_n = 0$, получим соотношение (8), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (6),(7), для которой выполняется условие φ-роста. Пусть функционал $F(x,\alpha)$ полунепрерывен снизу по x при каждом $\alpha > 0$. Тогда существуют последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{z_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\alpha_n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, $z_n \in X$, такие, что

$$\|z_n - x_n\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}, \tag{10}$$

$$\Phi_n(z_n) = \min_{x\in X} \Phi_n(x), \tag{11}$$

$$\Phi_n(x) = F(x, \alpha_n) + \sqrt{\varepsilon_n}\, \|x - z_n\|. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $\{\alpha_n\}$ в соответствии с леммой I и обозначим $\varepsilon_n' = F(x_n, \alpha_n) - \inf_{x\in X} F(x,\alpha)$. Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}$ так, что $\varepsilon_n > \varepsilon_n' \geqslant 0$ и $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Имеем

$$\inf_{x\in X} F(x,\alpha_n) \leqslant F(x_n, \alpha_n) \leqslant \inf_{x\in X} F(x, \alpha_n) + \varepsilon_n.$$

Применяя теорему Экланда, при каждом n найдем $z_n \in X$ так, что $\|z_n - x_n\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}$, $F(z_n, \alpha_n) = \min_{x\in X} [F(x,\alpha_n) + \sqrt{\varepsilon_n}\, \|x - z_n\|]$.

С учетом обозначения (I2) получим (II), и лемма 2 доказана.

Вывод НУ в задаче без дополнительных ограничений (I) можно формализовать следующим образом.

Пусть X, W – банаховы пространства, f – вещественный функционал в X, Ω – множество подмножеств пространства W, P_f – многозначное отображение, $P_f : X \to \Omega$.

Будем называть P_f отображением, определяющим необходимые условия в задаче (I), если из того, что x_0 – точка минимума в задаче (I), следует, что $P_f(x_0) \ni 0$.

Вид нетривиального многозначного отображения P_f в конкретных задачах определяется свойствами функционала f. Например, если f – субдифференциальный функционал, то $W = X^*$, $P_f(x) = \partial f(x)$.

Из леммы 2 немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть выполнены условия леммы 2, $\{x_n\}$ – обобщенное решение задачи (6), (7). Тогда существует последовательность $\{\bar{x}_n\}$, $\bar{x}_n \in X$, такая, что при $n \to \infty$ имеет место $\|\bar{x}_n - x_n\| \to 0$ и $P_n(\bar{x}_n) \ni 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где P_n является отображением, определяющим необходимые условия в задаче (II), (I2).

Теорема 2, леммы I,2 и предложение I являются основой общей схемы применения метода штрафных функций для получения обобщенных необходимых условий в экстремальных задачах с ограничениями.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{x_n\}$ – обобщенное решение задачи (6), (7), для которой выполняется условие φ-роста, функционал f и φ – р.л.в. функционалы в банаховых пространствах X и Y, $f : X \to R$, $\varphi : Y \to R$, X^*, Y^* – пространства, сопряженные пространствам X и Y. Пусть оператор g из X в Y дифференцируем по Фреше, $g'(x)$ – производная Фреше оператора g в точке x, $g'^*(x)$ – оператор, сопряженный оператору $g'(x)$

Тогда существуют последовательности $\{z_n\}, \{z_n^*\}, \{y_n^*\}, \{\lambda_n\}$, $z_n \in X$, $z_n^* \in \partial f(z_n)$, $y_n^* \in Y^*$, $\|y_n^*\| \leq 1$, $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что при $n \to \infty$ имеют место

$$\left. \begin{array}{l} \|z_n - x_n\| \to 0, \ \|\lambda_n z_n^* + g'^*(z_n) y_n^*\| \to 0, \\ \lambda_n^2 + \|y_n^*\|^2 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots \end{array} \right\} \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2, получим последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in X$, такую, что при каждом n точка z_n является точкой минимума р.л.в. функционала $\Phi_n(x)$ и удовлетворяет соотношению (10). С учетом (12) запишем необходимое условие минимума в задаче (11). Используя правила вычисления субдифференциала [17], получим $0 \in \partial f(z_n) + \alpha_n g'^*(z_n) \partial\varphi(g(z_n)) + \sqrt{\varepsilon_n}\, B^*$, где оператор

$$g'^*(x): Y^* \to X, \quad B^* = \{x^* \in X, \ \|x^*\| \leq 1\}.$$

Следовательно, при каждом n существуют $z_n^* \in \partial f(z_n)$, $v_n^* \in \partial\varphi(g(z_n))$, $b_n^* \in B$ такие, что

$$z_n^* + \alpha_n g'^*(z_n) v_n^* + \sqrt{\varepsilon_n}\, b_n^* = 0. \tag{14}$$

Умножим соотношения (14) на λ_n

$$\lambda_n = \{1 + \alpha_n^2 \|v_n^*\|^2\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < \lambda_n \leq 1, \tag{15}$$

и обозначим

$$y_n^* = \alpha_n \lambda_n v_n^*. \tag{16}$$

Имеем $\lambda_n z_n^* + g'^*(z_n) y_n^* = -\lambda_n \sqrt{\varepsilon_n}\, b_n^*$. Следовательно,

$$\|\lambda_n z_n^* + g'^*(z_n) y_n^*\| \leq \sqrt{\varepsilon_n}. \tag{17}$$

Из (15) и (16) получим при каждом $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_n^2 + \|y_n^*\| = 1, \quad \|y_n^*\| \leq 1. \tag{18}$$

При $n \to \infty$ из (10),(17),(18) получим соотношения (13). Теорема доказана.

Сформулируем следствия из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены предположения теоремы 3, функционал f дифференцируем по Фреше, $f'(x)$ - производная Фреше функционала f в точке x, $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (6),(7). Тогда существуют последовательности $\{z_n\}, \{y_n^*\}, \{\lambda_n\}$, $z_n \in X$, $y_n^* \in Y^*$, $\|y_n^*\| \leq 1$, $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что при $n \to \infty$ имеют место $\|z_n - x_n\| \to 0$, $\|\lambda_n f'(z_n) + g'^*(z_n) y_n^*\| \to 0$, $\lambda_n^2 + \|y_n^*\|^2 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\{x_n\}$ - обобщенное решение задачи (6),(7), для которой выполняется условие φ-роста с р.л.в. функционалом $\varphi : Y \to R$. Пусть функционал f и оператор g дифференцируемы по Фреше и их производные удовлетворяют условию Липшица на X. Тогда существуют последовательности $\{\lambda_n\}$, $\{y_n^*\}$ такие, что $\lambda_n > 0$, $y_n^* \in Y^*$, $\lambda_n^2 + \|y_n^*\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda_n f'(x_n) + g'^*(x_n) y_n^*\| = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то из нее можно выбрать сходящуюся к числу λ_0 подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$. В силу (I5) $0 \leq \lambda_0 \leq 1$. Переходя в формулировках теоремы 3 и следствий 4,5 к подпоследовательностям $\{x_{n_k}\}, \{z_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, можно получать соотношения, аналогичные (I3),(I9),(20), в которые будет входить не последовательность $\{\lambda_n\}$, а число λ_0.

Введем обозначения:

$$G = \{x \in X : g(x) \in K\}, \quad f^* = \inf_{x \in G} f(x).$$

Экстремальная задача называется устойчивой по функционалу, если $f^* = \bar{f}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть x_0 - точка минимума в устойчивой по функционалу задаче (6),(7), для которой выполняется условие φ-роста с р.л.в. функционалом $\varphi : Y \to R$. Пусть функционал f и оператор g дифференцируемы по Фреше и их производные удовлетворяют условию липшица на X. Тогда существуют число $\lambda \geq 0$ и последовательность $\{y_i^*\}$, $y_n^* \in Y^*$, такие, что

$$\lambda^2 + \|y_n^*\|^2 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda f'(x_0) + g'^*(x_0) y_n^*\| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве обобщенного решения стационарную последовательность $\{x_0\}$. Применяя следствие 5 с учетом замечания 3, получим утверждение теоремы.

Теорема 4 показывает, что и в том случае, когда существует классическое решение задачи (6),(7), необходимые условия, вообще говоря, имеют асимптотическую форму и выполняются на последовательности сопряженных переменных [7]. Подобная форма необходимых условий является характерной для экстремальных задач в бесконечномерных пространствах с операторными ограничениями [18,19].

§4. О достаточных условия оптимальности последовательностей

Эффективность теоремы Экланда при доказательстве НУ заставляет искать варианты этой теоремы, пригодные для построения достаточных условий. Наиболее естественным путем при этом является использование обращения теоремы Экланда. Приведем соответствующие утверждения.

Пусть далее X - банахово пространство, непустое множество $Q \subseteq X$, функционал $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ и $\inf_{x \in Q} f(x) = \mu(Q)$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и точку $x_n \in Q$. Для каждых $z > 0$, $\delta > 0$ введем в рассмотрение: $B(n, z) = \{x \in X : \|x - x_n\| \leq z\}$, $\sigma(n, z, \varepsilon, \delta) = \inf_{x \in B(n,z)} [f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_n\|]$. Очевидно, $\sigma(n, z, \varepsilon, \delta) \leq f(x_n)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varepsilon > 0$. Для того чтобы точка $x_\varepsilon \in Q$ удовлетворяла неравенствам

$$\mu \leq f(x_\varepsilon) \leq \mu(Q) + \varepsilon,$$

достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$ нашлась точка $\tilde{x}_\varepsilon \in Q$ такая, что

$$f(\tilde{x}_\varepsilon) < \mu(Q) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\tilde{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\| \le \delta,$$

$$f(x_\varepsilon) = \min_{x \in Q} [f(x) + \frac{\varepsilon}{2\delta} |x - x_\varepsilon|].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть точка $x_n \in Q$, положительные числа ε, δ, r таковы, что $r \le \delta$, $\mathfrak{S}(n, r, \varepsilon, \delta) = f(x_n)$.

$$\exists \tilde{x}_n \in B(n, r), \; f(\tilde{x}_n) \le \mu(Q) + \varepsilon.$$

Тогда $f(x_n) \le \mu(Q) + 2\varepsilon$.

Доказательства теоремы 5 и предложения 2 очевидны.

Теорема 5 и предложение 2 могут служить схемой для отыскания достаточных условий того, что последовательность $\{x_n\}$ является минимизирующей. Действительно, пусть последовательности $\{x_n\}, \{\alpha_n\}$ таковы, что

$$f(x_n) = \min_{x \in Q} [f(x) + \alpha_n |x - x_n|].$$

Допустим, что существует последовательность $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n \in Q$, такая, что

1°) $f(\tilde{x}_n) \le \mu(Q) + \varepsilon_n$;

2°) $\alpha_n \le \varepsilon_n / r_n$, $\quad r_n = \|\tilde{x}_n - x_n\|$.

Тогда $f(x_n) \le \mu(Q) + 2\varepsilon_n$.

Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА*). Пусть Q – замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства X, f – выпуклый дифференцируемый по Фреше функционал на множестве Q, $f'(x)$ – производная по Фреше функционала $f(x)$, $\inf_{x \in Q} f(x) > -\infty$. Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in Q$, такова, что $\|f'(x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Можно ли утверждать, что последовательность является минимизирующей, т.е. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{x \in Q} f(x)$?

Если множество Q ограничено, то легко доказать, что можно. Оказывается, в общем случае – нельзя.

ПРИМЕР. $f(x_1, x_2) = x_2^2/(x_1+1)$, $Q = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$

Выпуклость $f(x)$ на множестве Q следует из того, что гессиан этой функции неотрицательно определен для всех $x \in Q$; $\inf_{x \in Q} f(x) = 0$. Пусть $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \sqrt{x_1^{(n)}})$, $x_1^{(n)} > 0$, $x_1^{(n)} \to \infty$, $n \to \infty$. Легко проверить, что при $n \to \infty$ выполняется

*) Эта задача была предложена автору Е.С.Левитиным.

$grad\, f(x^{(n)}) \to 0$, однако $f(x^{(n)}) \to 1 > \inf_{x \in Q} f(x)$.

Из приведенной схемы ясно, какие условия надо наложить на выпуклый функционал и последовательность, чтобы эта последовательность была минимизирующей. А именно, должна существовать вспомогательная минимизирующая последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ такая, чтобы выполнялось условие $f'(x_n) = O(\frac{1}{r_n})$, $r_n = \rho(x_n, \tilde{x}_n)$.

В частности, если $r_n \leq R$ при $n > N$, то последовательность $\{x_n\}$ минимизирующая.

Сформулируем соответствующий результат в точной постановке.

Если f – выпуклый непрерывный функционал в банаховом пространстве X, то субдифференциал $\partial f(x)$ такого функционала не пуст в любой точке $x_0 \in X$:

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \quad \forall x \in X\} \neq \emptyset.$$

Обозначим $\beta_n = \sup \|x^*\|$, $x^* \in \partial f(x_n)$.

Будем говорить, что $\partial f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если $\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(x)$ – выпуклый непрерывный функционал в банаховом пространстве X, $\inf f(x) = \mu > -\infty$. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\partial f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и существует последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ такая, что $f(\tilde{x}_n) \leq \mu + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, $\alpha_n r_n \leq \varepsilon_n$, $r_n = \|\tilde{x}_n - x_n\|$.

Тогда $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \mu$.

Доказательство теоремы следует из определений выпуклости функционала и величины β_n.

В заключение автор выражает глубокую признательность Е.Г.Гольштейну, Е.С.Левитину, Б.Т.Поляку, Н.В.Третьякову за беседы, способствовавшие написанию этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. EKELAND I. On the variational principle. – J. Math. Analysis and Applic., 1974, v.47, p.324-353.

2. ЭКЛАНД И., ТЕМАМ Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979.

3. EKELAND I., LEBOURG G. Generic Frechet - differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces. - Trans. Amer. Math. Soc., 1976, v.224, N2, p.193-216.
4. AUBIN J.P., EKELAND I. Estimates of the duality. Gap in nonconvex optimization. - Math. Oper. Res., 1976, v.1, N3, p. 225-245.
5. CLARKE F.H. A new approach to Lagrange multipliers. - Math. Oper. Res., 1976, v.1, N2, p.165÷174.
6. ВОЛИН Ю.М., ОСТРОВСКИЙ Г.М., ФИНКЕЛЬШТЕЙН А.В. Метод штрафных функций и необходимые условия оптимальности для обобщенных решений задачи оптимального управления. - Дифференц. уравнения, 1973, т.9, №3, с. 423-429.
7. ВОЛИН Ю.М., ОСТРОВСКИЙ Г.М., ФИНКЕЛЬШТЕЙН А.В. Метод штрафных функций и условия оптимальности обобщенных решений для одной задачи оптимального управления с частными производными. - Дифференц. уравнения, 1977, т.13, №12, с.2246-2255.
8. ФИНКЕЛЬШТЕЙН А.В. Необходимые условия оптимальности обобщенных решений и метод штрафных функционалов. - Экономика и мат. методы, 1975, т.11, вып.4, с.748-753.
9. ВОЛИН Ю.М. О получении необходимых условий оптимальности по методу штрафных функций. - В кн.: Математические проблемы химии. Ч.2. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1973, с. 142-153.
10. HUARD P. Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of Centers. - In: Nonlinear programming. N.Y: John Wiley and Sons, 1967, p. 209-219.
11. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. - М.: Наука, 1971.
12. ЛЕВИТИН Е.С. О необходимых и достаточных условиях, при которых данная последовательность является минимизирующей. - Докл. АН СССР, 1968, т.183, №6, с.1250-1253.
13. ЛЕВИТИН Е.С., МИЛЮТИН А.А., ОСМОЛОВСКИЙ Н.П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями. - Успехи мат. наук, 1978, т.33, вып. 6, с.85-148.
14. ВАРГА Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. - М.: Наука, 1977.
15. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., ФЕЛЬДМАН М.М. Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации. - Докл. АН СССР, 1976, т.231, №1, с.28-31.
16. ФИНКЕЛЬШТЕЙН А.В. Условие роста в экстремальных задачах с ограничениями. - Экономика и мат. методы, 1980, т.16, вып. 6, с.1227-1231.

17. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.

18. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., НЕНАХОВ Э.И. Необходимые условия минимума в задачах с операторными ограничениями. - Кибернетика, 1971, №3, с. 35-46.

19. ЛЕВИН В.Л. Условия экстремума в бесконечномерных линейных задачах с операторными ограничениями. - В кн.: Исследования по математическому программированию. М.: Наука, 1968, с. 159-197.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.08.81 г.