Выпуск 31(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 514.172

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ В АФФИННЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.Ш.Рубинштейн

Статья посвящена элементарному введению в теорию выпуклых множеств в аффинных и проективных пространствах. Громоздкая геометрическая аксиоматика указанных пространств в статье не используется. Вместе с тем, изложение рассчитано на читателей, имеющих достаточно высокую общую математическую культуру. Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную признательность своим немецким коллегам профессору К.-Х.Эльстеру и доценту Р.Незе (Высшая техническая школа Ильменау, ГДР) за полезные обсуждения используемого в статье подхода к изложению основ геометрической теории выпуклых множеств.

I. Аффинные пространства

§1. Вещественные аффинные структуры

Множество всех вещественных чисел обозначается через R, а его подмножества $[0,+\infty)$, $(-\infty,0]$, $(0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$ обозначаются соответственно через R_+, R_-, $\overset{\circ}{R}_+$ и $\overset{\circ}{R}_-$. Далее, если для некоторого множества X заданы отображения $(+): X\times X \to X$ и $(\cdot): R\times X \to X$, удовлетворяющие известным аксиомам, то говорят, что на X определена вещественная линейная структура $\lambda = (+,\cdot)$ (короче, ВЛС λ) и $\mathsf{X} = (X,\lambda)$ называют вещественным линейным пространством (короче, ВЛП X). При этом отвечающие $x,y \in X$ и $t \in R$ элементы $(+)(x,y)$ и $(\cdot)(t,x)$ обозначают соответственно через $x+y$ и $t\cdot x$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Заданные на одном и том же множестве X ВЛС $\lambda=(+,\cdot)$ и $\lambda'=(\oplus,\odot)$ называют аффинно-эквивалентными, если выполнено одно из следующих равносильных условий:

(i) Для любых $x,y\in X$ и $t\in R$ имеют место равенства

$$x\oplus y=(-1)\cdot\theta'+x+y,\quad t\odot x=(1-t)\cdot\theta'+t\cdot x,$$

где θ' - нулевой элемент в ВЛП $X'=(X,\lambda')$;

(ii) Для любых $x,y\in X$ и $t\in R$ имеют место равенства

$$(1-t)\cdot x+t\cdot y=(1-t)\odot x\oplus t\odot y;$$

(iii) Для любых $\{x_i\}_{i=1}^{m}\subset X$ и $\{t_i\}_{i=1}^{m}\subset R$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{m}t_i=1$, имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{m}{}^{+}t_i\cdot x_i=\sum_{i=1}^{m}{}^{\oplus}t_i\odot x_i .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Каково бы ни было абстрактное множество X , отображение $\alpha: X\times X\times R\to X$ назовем вещественной аффинной структурой (короче, ВАС α), если при нéкоторой ВЛС $\lambda=(+,\cdot)$ на X для любых $x,y\in X$ и $t\in R$ имеют место равенства

$$\alpha(x,y,t)=(1-t)\cdot x+t\cdot y.$$

При этом $X=(X,\alpha)$ будем называть аффинным пространством (короче, АП X).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Множество всех ВАС α на X получается путем факторизации множества всех ВЛС λ на X по введенному выше отношению аффинной эквивалентности (см. I.I).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В АП $X=(X,\alpha)$ можно рассматривать линейные комбинации с суммой коэффициентов, равной единице, так как они, учитывая (iii) из I.I, не зависят от выбора ВЛС $\lambda=(+,\cdot)$ в соответствующем классе аффинно-эквивалентных вещественных линейных структур на X . Указанные комбинации называют аффинными и обозначают обычными символами

$$\sum_{i=1}^{m}t_i x_i=t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_m x_m .$$

Это не может привести к недоразумению, так как при

$x_i=\sum_{j=1}^{n_i} s_{ij}y_j$, где $\sum_{j=1}^{n_i} s_{ij}=1$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(t_i s_{ij})y_{ij},$$

где $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(t_i s_{ij})=\sum_{i=1}^{m} t_i\sum_{j=1}^{n_i} s_{ij}=\sum_{i=1}^{m} t_i=1.$
Далее, если $\sum_{i=1}^{m} t_i=1$, то при любых непустых $M_i\subset X$, $i=1,\dots,m$, под $\sum_{i=1}^{m} t_i M_i$ понимается множество

$$M=\{x=\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \mid x_i\in M_i,\ i=1,\dots,m\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В АП $X=(X,\alpha)$ можно рассматривать так называемые аффинные функционалы $f: X\longrightarrow R$, которые характеризуются тем, что $f(\alpha(x,y,t))=(1-t)f(x)+t f(y)$ и, следовательно,

$$f(\sum_{i=1}^{m} t_i x_i)=\sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i)$$

для любых $\{x_i\}_{i=1}^{m}\subset X$ и $\{t_i\}_{i=1}^{m}\subset R$ таких, что $\sum_{i=1}^{m} t_i=1$. При этом нас будут интересовать, в основном, только нетривиальные аффинные функционалы, которые отображают X на все R.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любого семейства аффинных пространств естественным образом определяется прямое произведение. В частности, отображение $\alpha: X\times X\times R\to X$, задающее ВАС на X, при любом натуральном z индуцирует отображение

$$\tilde{\alpha}(\{x_s\}_{s=1}^{z},\{y_s\}_{s=1}^{z},t)=\{\alpha(x_s,y_s,t)\}_{s=1}^{z},$$

задающее ВАС на $\tilde{X}=X^z$. При этом каждое семейство $\{f_s\}_{s=1}^{z}$ аффинных функционалов в АП $X=(X,\alpha)$ порождает аффинный функционал

$$\tilde{f}(\{x_s\}_{s=1}^{z})=\sum_{s=1}^{z} f_s(x_s)$$

в АП $\tilde{X}=(\tilde{X},\tilde{\alpha})$. В свою очередь, каждый аффинный функционал в АП $\tilde{X}$ представим в указанном виде, причем соответствующие функционалы f_s в АП X определяются с точностью до постоянных слагаемых, сумма которых равна нулю. Это означает, в частности, что аффинный функционал $\tilde{f}$ в том и только в том случае обращается в нуль на диагональном множестве

$$\mathcal{D} = \{\tilde{x} = (x, x, \ldots, x)\}_{x \in X},$$

если сумма отвечающих ему функционалов f_s является нулевым функционалом в АП X.

§2. Основные геометрические объекты

В аффинной геометрии элементы рассматриваемого АП $X = (X, \alpha)$ называют точками и простейшими геометрическими объектами являются образы множеств

$$T \in \{R, [0,1], (0,1), R_+, R_-, R_+^\circ, R_-^\circ\}$$

при инъективных отображениях $t \in T \longmapsto \alpha(x,y,t)$, порождаемых несовпадающими точками x и y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Каковы бы ни были точки $x \neq y$ в АП $X = (X, \alpha)$, множество $\alpha(x, y, T) = \{\alpha(x,y,t)\}_{t \in T}$ при $T = R$ называют прямой, при $T = [0,1]$ - отрезком или сегментом с концами в x и y, при $T = (0,1)$ - интервалом с теми же концами, а при $T \in \{R_+, R_-, R_+^\circ, R_-^\circ\}$ - лучами с вершиной в точке x или, короче, x-лучами.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если прямые $\alpha(x, y, R)$ и $\alpha(z, u, R)$ имеют две общие точки, то они совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множества $\alpha(x, y, T)$ при $x = y$ и непустом $T \subset R$ являются одноточечными. Поэтому каждое одноточечное множество можно считать вырожденной прямой, вырожденным сегментом, вырожденным интервалом и вырожденным лучем с вершиной в соответствующей точке.

Каковы бы ни были множества M и N в АП $X = (X, \alpha)$ и $T \subset R$, через $\alpha(M, N, T)$ будем обозначать множество точек $\alpha(x, y, t)$, отвечающих всем $(x, y, t) \in M \times N \times T$. Из замечания к 2.I вытекает, что при непустом $T \subset R$ для любого $M \subset X$ имеем $M \subset \alpha(M, M, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Множество M в АП $X = (X, \alpha)$ называют аффинным, если $\alpha(M, M, R) \subset M$, и выпуклым, если $\alpha(M, M, (0,1)) \subset M$. Далее, выпуклое множество $K \subset X$ называют конусом с вершиной в точке $x_0 \in X$ (короче, x_0-конусом), если $\alpha(x_0, K, R_+^\circ) \subset K$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Каково бы ни было аффинное множество X' в АП $X = (X, \alpha)$, сужение отображения $\alpha : X \times X \times R \to X$ на

$X' \times X' \times R$ определяет ВАС α' на X'. Полученное в результате АП $X' = (X', \alpha')$ естественно считать подпространством исходного АП $X = (X, \alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каков бы ни был x_0-конус $K \subset X$, множество $K^- = \alpha(x_0, K, \overset{\circ}{R}_-)$ также является x_0-конусом. Его называют симметричным к x_0-конусу K. Далее, множество $V(K)$ вершин каждого конуса K совпадает с $V(K^-)$ и является аффинным множеством, которое либо совпадает с $K \cap K^-$, либо же не имеет общих точек ни с одним из этих конусов. В последнем случае множества $\widetilde{K} = K \cup V(K)$ и $\widetilde{K}^- = K^- \cup V(K^-)$ также являются симметричными конусами, причем $V(\widetilde{K}) = V(\widetilde{K}^-) = V(K) = V(K^-)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выделенные классы множеств в АП $X = (X, \alpha)$, очевидно, содержат X и замкнуты относительно теоретико-множественных пересечений. Поэтому для любого $A \subset X$ в каждом из рассмотренных классов имеется наименьшее множество, содержащее A. Эти наименьшие множества называют соответственно аффинной, выпуклой и x_0-конической оболочкой соответствующего множества A и обозначают через $\mathrm{aff}\, A$, $\mathrm{conv}\, A$ и x_0-$\mathrm{cone}\, A$. Полезно отметить, что если M - выпуклое множество, то $\mathrm{aff}\, M = \alpha(M, M, R)$, $x_0\text{-}\mathrm{cone}\, M = \alpha(x_0, M, \overset{\circ}{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Множество A в АП $X = (X, \alpha)$ называют независимым, если оно не содержит таких собственных подмножеств A', что $\mathrm{aff}\, A' = \mathrm{aff}\, A$. Далее, независимое множество B называют аффинной базой аффинного множества $L \subset X$, если $\mathrm{aff}\, B = L$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Каждое независимое подмножество A аффинного множества $L \subset X$ можно дополнить до некоторой его аффинной базы B, причем все такие дополнения имеют одинаковые мощности.

СЛЕДСТВИЕ. У каждого аффинного множества $L \subset X$ имеются аффинные базы B, причем все они имеют одну и ту же мощность. Одинаковые мощности имеют также их дополнения до аффинных баз B' всего АП X.

ЗАМЕЧАНИЕ. Было бы естественным в качестве размерности и дефектной размерности каждого аффинного множества L в АП X принять следующие кардинальные числа:

$$\dim L = \mathrm{card}\, B, \quad \mathrm{codim}\, L = \mathrm{card}\,(B' \setminus B),$$

которые не зависят от выбора аффинной базы B аффинного множества L и аффинной базы $B' \supset B$ всего X. Однако при этом одноточечные множества имели бы единичную размерность, а размерность прямых была бы равна двум, что на единицу превышает привычную размерность этих объектов в ВЛП X. Поэтому в качестве размерности непустого аффинного множества L в АП X обычно принимают не мощность аффинной базы B, а $card\, B - 1$. Что касается дефектной размерности, то она определяется как указано выше. Далее, для каждого непустого $M \subset X$ принимают $dim\ M = dim\ (aff\ M)$.

Важную роль в аффинной геометрии играет выделяемый ниже класс аффинных множеств, а также связанные с ним классы симметричных конусов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Аффинное множество в АП X называют гиперплоскостью, если $codim\ H = 1$, т.е. $H \neq X$, но $aff(H \cup \{x\}) = X$ при любом $x \in X \setminus H$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Какова бы ни была гиперплоскость H в АП X, множество $X \setminus H$ однозначно представимо в виде объединения двух выпуклых множеств G_H и G'_H, которые не имеют общих точек и являются симметричными конусами с множеством вершин $V(G_H) = V(G'_H) = H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Отвечающие каждой гиперплоскости H симметричные конусы G_H и G'_H, не имеющие общих точек, называют открытыми полупространствами, а порождаемые ими симметричные конусы

$$F_H = G_H \cup H = X \setminus G'_H, \quad F'_H = G'_H \cup H = X \setminus G_H$$

с тем же множеством вершин H (см. замечание 2 к 2.2) называют замкнутыми полупространствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Каков бы ни был нетривиальный аффинный функционал f в АП X (см. замечание 3 к I.2), множество

$$H = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

является гиперплоскостью. При этом соответствующие полупространства G_H, G'_H, F_H и F'_H задаются неравенствами

$$f(x) > 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant 0.$$

Наоборот, каждая гиперплоскость $H \subset X$ представима в указанном виде, причем соответствующий нетривиальный аффинный функционал определяется с точностью до ненулевого множителя.

§3. Простейшие топологии

Классическая топология множества R индуцирует естественную топологию на каждой прямой в АП X. Открытыми в этой топологии являются подмножества прямой, представимые в виде объединений невырожденных интервалов (объединение пустого множества интервалов, как обычно, принимается равным пустому множеству). Указанная топология, очевидно, является связкой (открыто-замкнутыми являются только пустое множество и вся прямая).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. В каждом АП X через τ^* обозначим сильнейшую топологию, согласованную с естественной топологией аффинных прямых. Открытые и замкнутые множества в этой топологии характеризуются тем, что таковыми являются их пересечения с любой аффинной прямой в ее естественной топологии. Далее, τ^*-замыкание каждого $M \subset X$ будем обозначать через $\tau^*\text{-}cl\, M$ и под открытым и относительно открытым ядром множества M понимать следующие его подмножества:

$$int\, M = X \setminus \tau^*\text{-}cl\,(X \setminus M),$$

$$r.int\, M = aff\, M \setminus \tau^*\text{-}cl\,(aff\, M \setminus M).$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Введенная топология, очевидно, является связкой. Примерами τ^*-замкнутых множеств в АП X могут служить сегменты, все аффинные множества, а также порождаемые гиперплоскостями замкнутые пространства (см. 2.7). В то же время открытые полупространства являются τ^*-открытыми множествами и совпадают с открытыми ядрами соответствующих замкнутых полупростанств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $aff\, M = X$, то относительно открытое ядро $r.\,int\, M$, очевидно, совпадает с открытым ядром $int\, M$. В противном случае рассматриваемое множество имеет пустое открытое ядро, но его относительно открытое ядро может оказаться непустым.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Каково бы ни было выпуклое множество $M \subset X$, его τ^*-замыкание и относительно открытое ядро (а тогда и открытое ядро) являются выпуклыми. При этом точки $x \in r.\,int\, M$ характеризуются тем, что отвечающие им симметричные конусы

$$K_x(M) = x - cone\, M = \alpha(x, M, R_+^0),\ K_x^-(M) = \alpha(x, M, R_-^0)$$

совпадают с $aff\, M$. В то же время для точек $x \notin r.\,int\, M$ имеем:

$$K_x(M) \cap r.\,int\, K_x^-(M) = K_x^-(M) \cap r\cdot int\, K_x(M) = \emptyset.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Выпуклое множество $M \subset X$ называют телесным, если $int\, M \neq \emptyset$, и относительно телесным, если $r.\,int\, M \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В конечномерных АП X все выпуклые множества, как будет показано ниже, являются относительно телесными. Однако в каждом бесконечномерном АП X имеются выпуклые множества M, для которых $r.\,int\, M = \emptyset$. При этом τ^*-замыкание каждого относительно телесного выпуклого $M \subset X$ получается однократным применением операции

$$\xi(M) = \{y \in X \mid \alpha(x, y, (0,1)) \subset M \text{ при некотором } x \in M\}.$$

Более того, в этой операции можно ограничиться интервалами с фиксированным $x \in r.\,int\, M$. Однако в общем случае для получения τ^*-замыкания выпуклого $M \subset X$ необходимо рассмотреть трансфинитную последовательность результатов применения указанной операции. С помощью этой конструкции доказывается выпуклость τ^*-замыкания произвольного выпуклого $M \subset X$.

Важным результатом классической теории выпуклых множеств в аффинных пространствах является следующая теорема Минковского - Асколи - Мазура (её называют также теоремой Банаха в геометрической форме).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Если непустое аффинное множество $L \subset X$ не имеет общих точек с открытым ядром $int\, M$ телесного выпуклого множества $M \subset X$, то найдется такая гиперплоскость, которая содержит L и не имеет общих точек с $int\, M$.

СЛЕДСТВИЕ (теорема Эйдельгайта). Если открытое ядро $int\, M$ телесного выпуклого множества $M \subset X$ не имеет общих точек с непустым выпуклым множеством $N \subset X$, то найдется такое замкнутое полупространство, которое содержит

N и не имеет общих точек с $\operatorname{int} M$.

Наряду с рассмотренной $\mathcal{T}^*$-топологией, которая в более чем одномерных АП X не является локально-выпуклой, важную роль играет сильнейшая локально-выпуклая топология, обозначаемая через $\mathcal{T}_0$. Открытые множества в этой топологии характеризуются тем, что они представимы в виде объединений $\mathcal{T}^*$-открытых выпуклых множеств. Указанная топология в более чем одномерных АП X слабее предыдущей, т.е. семейства $\mathcal{T}_0$-открытых и $\mathcal{T}_0$-замкнутых множеств являются собственными подсемействами соответствующих семейств в топологии $\mathcal{T}^*$. Вместе с тем, классы открытых выпуклых множеств в этих топологиях, очевидно, совпадают. Это означает, в частности, что все открытые полупространства не только $\mathcal{T}^*$-открытые, но и $\mathcal{T}_0$-открытые. Но тогда замкнутые полупространства (см. 2.7), а также пересечения любых семейств замкнутых полупространств являются $\mathcal{T}_0$-замкнутыми. Это означает, в частности, $\mathcal{T}_0$-замкнутость всех аффинных множеств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Каждое $\mathcal{T}^*$-замкнутое относительно телесное выпуклое множество M в АП X является $\mathcal{T}_0$-замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в АП $X' = \operatorname{aff} M$ каждая точка $z \in X' \setminus M$ содержится в некотором $\mathcal{T}^*$-открытом выпуклом множестве K, которое не имеет общих точек с M. Нетрудно проверить, что при любых $x \in r.\operatorname{int} M$ и $y \in \alpha(x, z, (0,1)) \cap (X' \setminus M)$ требуемым условиям удовлетворяет конус $K = \alpha(y, r.\operatorname{int} M, R^\circ_-)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как уже отмечалось, ниже будет показано, что в конечномерных АП X все выпуклые множества являются относительно телесными. Поэтому в этом случае все $\mathcal{T}^*$-замкнутые выпуклые множества являются $\mathcal{T}_0$-замкнутыми. В то же время в бесконечномерных АП X далеко не все $\mathcal{T}^*$-замкнутые выпуклые множества являются $\mathcal{T}_0$-замкнутыми. На основании теоремы Эйдельгайта (см. следствие из 3.4) можно утверждать лишь, что для $\mathcal{T}_0$-замкнутости выпуклого множества необходимо и достаточно, чтобы оно являлось пересечением некоторого семейства замкнутых полупространств. Более эффективные достаточные признаки $\mathcal{T}_0$-замкнутости нетелесных выпуклых множеств устанавливаются с помощью различных обобщений приведенных классических теорем отделимости (см. 3.4 и следствие из 3.4). Указанные обобщения основаны на конструкциях, рассматриваемых в следующем параграфе.

§4. Грани и граневые строения выпуклых множеств

В этом параграфе будут существенно дополнены приведенные выше сведения о выпуклых множествах в аффинных пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Каждой точке X непустого выпуклого множества M в АП $X = (X, \alpha)$ сопоставим симметричные конусы

$$\Lambda_x(M) = x\text{-}cone\, M = \alpha(x, M, R^{\circ}_{+}), \quad K^{-}_{x}(M) = \alpha(x, M, R^{\circ}_{-}),$$

аффинное множество вершин этих конусов

$$L_x(M) = K_x(M) \cap K^{-}_{x}(M),$$

а также относительно телесное выпуклое множество

$$F_x(M) = M \cap L_x(M) = M \cap K^{-}_{x}(M)$$

и его относительно открытое ядро $G_x(M) = r.int\, F_x(M)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Следующие утверждения относительно точек x и y непустого выпуклого множества $M \subset X$ равносильны:

$$y \in F_x(M), \; F_y(M) \subset F_x(M), \; L_y(M) \subset L_x(M), \; K_y(M) \subset K_x(M).$$

При этом для точек $y \in G_x(M)$ в приведенных теоретико-множественных включениях достигаются равенства, а для точек $y \in F_x(M) \setminus G_x(M)$ все эти включения являются строгими.

СЛЕДСТВИЕ. Отвечающие каждому непустому выпуклому множеству $M \subset X$ классы множеств

$$\mathcal{F}(M) = \{F_x(M)\}_{x \in M}, \quad \mathcal{L}(M) = \{L_x(M)\}_{x \in M}, \quad K_x(M) = \{K_x(M)\}_{x \in M}$$

упорядоченные по теоретико-множественному включению, являются изоморфными. Далее, минимальные множества в указанных классах характеризуются тем, что для соответствующих точек $x \in M$ множества $F_x(M)$ совпадают с $G_x(M)$, т.е. являются относительно открытыми. Наконец, если рассматриваемое выпуклое множество $M \subset X$ τ^*-замкнуто, то при всех $x \in M$ таковыми же являются множества $F_x(M)$. Следовательно, минимальные из этих множеств, будучи одновременно относительно открытыми и τ^*-замкнутыми, являются аффинными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Каково бы ни было непустое выпуклое множество $M \subset X$, отвечающие ему относительно телесные выпуклые множества $F_x(M)$ будем называть гранями и под граневым строением M понимать множество $\mathcal{F}(M)$ всех его граней, упорядоченное по теоретико-множественному включению. При этом $A \subset M$ назовем порождающим подмножеством, если $\bigcup_{x \in A} F_x(M) = M$, и минимальную мощность таких подмножеств обозначим через $\rho(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждое порождающее подмножество A выпуклого множества M является таковым же для $\bar{M} = \tau^*\text{-}cl M$, т.е. $\rho(\bar{M}) \leq \rho(M)$. При этом относительно телесные выпуклые множества характеризуются тем, что они имеют одноточечные порождающие подмножества.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. Каково бы ни было непустое выпуклое множество M, его граневое строение $\mathcal{F}(M)$, а также изоморфные ему упорядоченные множества $\mathcal{L}(M)$ и $K(M)$ являются верхними полурешетками.

Действительно, при любых $x \in M$ и $y \in M$ грань $F_{\mathcal{L}(x,y,t)}(M)$ не зависит от выбора $t \in (0,1)$ и является в $\mathcal{F}(M)$ супремумом граней $F_x(M)$ и $F_y(M)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если непустое выпуклое множество M имеет конечные порождающие подмножества, то оно имеет также одноточечные порождающие подмножества, т.е. M – относительно телесное выпуклое множество. В противном случае каждая грань $F_x(M)$ является собственным подмножеством некоторой грани $F_y(M)$. При этом аффинное множество $\mathrm{aff}\, M$ содержит бесконечную строго возрастающую последовательность аффинных подмножеств и, следовательно, является бесконечномерным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное следствие означает, в частности, что в конечномерных аффинных пространствах все непустые выпуклые множества являются относительно телесными. В то же время в любом бесконечномерном аффинном пространстве имеются выпуклые множества, для которых $\rho(M) \geq \aleph_0$. При этом наряду с относительно телесными выпуклыми множествами важную роль играют выпуклые множества M, для которых $\rho(M) = \aleph_0$. Отвечающие им множества граней $\mathcal{F}(M)$, очевидно, содержат такие строго возрастающие последовательности $\{F_i(M)\}_{i=1}^{\infty}$, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(M) = M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Непустые выпуклые множества M, для которых $\rho(M) \leq \aleph_0$ (т.е. $\rho(M) = 1$ или $\rho(M) = \aleph_0$), судем называть квазителесными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для иллюстрации полезности выделения указанного класса выпуклых множеств заметим, что каждое $\mathcal{T}^*$-замкнутое квазителесное выпуклое множество является $\mathcal{T}^*_0$-замкнутым.

В заключение остановимся коротко на характеристике важного подкласса относительно телесных выпуклых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Непустое множество M в АП X назовем выпуклым многогранником (короче, многогранником), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) M является $\mathcal{T}^*$-замкнутым, выпуклым и имеет конечное число граней;

(ii) M представимо в виде пересечения некоторого аффинного множества с пересечением конечного числа замкнутых полупространств;

(iii) M представимо в виде следующей аффинной комбинации (см. замечание 2 к I.2):

$$M = \operatorname{conv} A + x_0 - \operatorname{cone} B + L - 2x_0,$$

где A и B - некоторые конечные множества, содержащие точку x_0 , а L - содержащее эту же точку аффинное множество.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. Каковы бы ни были два многогранника, выпуклая оболочка их объединения является многогранником. Если же эти многогранники имеют общие точки, то и их пересечение также является многогранником. Далее, каждое непустое выпуклое подмножество Q многогранника M содержит такую точку x_0 , что отвечающая ей грань $F_{x_0}(M)$ совпадает с $F_Q(M) = \bigcup_{x \in Q} F_x(M)$.

II. Проективные пространства

§5. Основные определения

Используемое определение проективных пространств базируется на возможности реализации каждого из них в некотором ВЛП $X = (X, +, \cdot)$. При этом для каждого $w \subset X$ через $\langle w \rangle$ обозначается множество всех одномерных подпространств $\langle x \rangle = \operatorname{lin} x$, отвечающих ненулевым $x \in w$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.I. Если задано биективное отображение β множества $\langle X \rangle$ всех одномерных подпространств некоторого более чем одномерного ВЛП X на абстрактное множество Y , то говорят, что на Y определена проективная структура. При этом $Y=\beta\langle X\rangle$ называют проективным пространством (короче, ПП Y), а его элементы - точками. Далее, под проективными прямыми, сегментами (замкнутыми полупрямыми) и интервалами (открытыми полупрямыми) в ПП $Y=\beta\langle X\rangle$ понимают множества $g_{x,y}=\beta\langle lin\{x,y\}\rangle, hg_{x,y}=\beta\langle conv\{x,y\}\rangle$ и $h\overset{\circ}{g}_{x,y}=\beta\langle conv\{x,y\}\setminus\{x,y\}\rangle$, отвечающие любым линейно-независимым x и y из X. Про соответствующие точки $p=\beta\langle x\rangle$ и $q=\beta\langle y\rangle$ говорят, что они лежат на проективной прямой $g_{x,y}$ и являются концами проективного сегмента $hg_{x,y}$ и проективного интервала $h\overset{\circ}{g}_{x,y}$ (ограничивают указанные проективные полупрямые).

ЗАМЕЧАНИЕ. Каковы бы ни были две различные точки $p=\beta\langle x\rangle$ и $q=\beta\langle y\rangle$, они лежат на единственной проективной прямой $g(p,q)=g_{x,y}=g_{x,-y}$. В то же время эти точки являются концами двух проективных сегментов

$$hg[p,q]=hg_{x,y},\quad hg'[p,q]=hg_{x,-y}$$

и двух проективных интервалов

$$hg(p,q)=h\overset{\circ}{g}_{x,y},\quad hg'(p,q)=h\overset{\circ}{g}_{x,-y},$$

причем

$$hg[p,q]\cap hg'(p,q)=hg(p,q)\cap hg'[p,q]=\varnothing,$$

$$hg[p,q]\cup hg'(p,q)=hg(p,q)\cup hg'[p,q]=g(p,q),$$

что оправдывает второе наименование проективных сегментов и проективных интервалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Множество P в ПП Y называют проективным, если оно вместе с каждыми двумя своими точками $p\neq q$ содержит проективную прямую $g(p,q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как семейство проективных множеств в ПП Y содержит Y и замкнуто относительно теоретико-множественных пересечений, то для каждого $A\subset Y$ среди содержащих его проективных множеств имеется наименьшее. Его называют проективной оболочкой A и обозначают через $pr\,A$. Далее, так как указанное семейство содержит все одноточечные множества и замкнуто относительно теоретико-множественных объединений возрастающих подсемейств, то каждое множество $M \subset Y$ совпадает с объединением своих максимальных проективных подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Множество $A \subset Y$ называют независимым, если для всех его собственных подмножеств A' имеют место неравенства $pr\, A' \neq pr\, A$. Далее, независимое подмножество B проективного множества $P \subset Y$ называют проективной базой, если $pr\, B = P$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. Каждое независимое подмножество проективного множества можно дополнить до его проективной базы. Далее, каковы бы ни были проективные базы B и B' проективного множества $P \subset Y$ и проективные базы $B_1 \supset B$ и $B_1' \supset B'$ проективного множества Y, имеют место равенства

$$card\, B = card\, B', \quad card(B_1 \setminus B) = card(B_1' \setminus B').$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. В качестве размерности и дефектной размерности каждого непустого проективного множества P в ПП Y принимают следующие кардинальные числа:

$$\dim P = card\, B - 1, \quad \operatorname{codim} P = card(B_1 \setminus B),$$

которые в силу 5.4 не зависят от выбора проективной базы B множества P и проективной базы $B_1 \supset B$ множества Y. Для произвольного непустого $A \subset Y$ принимают $\dim A = \dim(pr A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем важную роль для рассматриваемых множеств M в ПП $Y = \beta < X >$ играют отвечающие им максимальные подмножества $X(M) \subset X$, удовлетворяющие условию $M = \beta < X(M) >$. Для непустых $M \subset Y$ они, очевидно, совпадают с объединениями всех одномерных подпространств $\beta^{-1}(p)$, отвечающих точкам $p \in M$. Для $M = \emptyset$ таковым является нульмерное подпространство $\{0\} \subset M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.6. Проективные множества P в ПП $Y = \beta < X >$ характеризуются тем, что им отвечают линейные множества $X(P)$, причем

$$\dim P = \dim X(P) - 1, \quad \operatorname{codim} P = \operatorname{codim} X(P).$$

Далее, для каждого $A = \beta < w >$ имеем $X(pr\, A) = lin\, w$ и, следовательно, $pr\, A = \beta < lin\, w >$.

СЛЕДСТВИЕ. Каждое более чем одноточечное проективное множество P в ПП $Y = \beta < X >$ представимо в виде $P = \beta' < X' >$, где $X'=X(P)$ – более чем одномерное подпространство в ВЛП X, а β' – сужение на $<X'>$ исходного отображения β. Получаемые в результате ПП $Y'=\beta'<X'>$ естественно считать проективными подпространствами исходного ПП Y'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7. Проективное множество H в ПП $Y=\beta<X>$ называют проективной гиперплоскостью, если оно не совпадает с Y и не является собственным подмножеством никакого другого проективного множества $P\neq Y$. Другими словами,

$$codim\, H = codim\, X(H)=1$$

и, следовательно,

$$X(H)=\{x\in X\,/\,f(x)=0\},$$

где $f: X\to R$ – некоторый нетривиальный линейный функционал, который по гиперплоскости H определяется с точностью до ненулевого множителя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Исходное биективное отображение β множества $<X>$ на Y индуцирует биективное отображение β^* множества $<X^*>$ всех одномерных подпространств $<f>$ в ВЛП X^* линейных функционалов $f: X\to R$ на множество Y^* всех проективных гиперплоскостей $H\subset Y$. Таковым является отображение, сопоставляющее каждому одномерному подпространству $<f>\subset X^*$ проективную гиперплоскость

$$\beta^*<f> = \beta<\{x\in X\,/\,f(x)=0\}>.$$

Получаемое в результате ПП $Y^*=\beta^*<X^*>$ называют сопряженным к исходному ПП $Y=\beta<X>$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.8. Какова бы ни была проективная гиперплоскость H в ПП $Y=\beta<X>$, на множестве $Z_H = Y\setminus H$ можно определить (притом однозначно, если $dim\, Y = dim\, X-1\geq 2$) такую ВАС α, что при любых $p\neq q$ из Z_H аффинная прямая $\alpha(p,q,R)$ получается из соответствующей проективной прямой $g(p,q)$ путем исключения ее единственной общей точки с H, а аффинный интервал $\alpha(p,q,(0,1))$ совпадает с тем из двух проективных интервалов $hg(p,q)$ и $hg'(p,q)$, который не содержит указанной точки.

Для доказательства достаточно заметить, что при любом $x_0\in X\setminus X(H)$ отображение γ_{x_0}, сопоставляющее каждой точке $x\in x_0+X(H)$ точку $p=\beta<x>$, является биективным отображением аффинной гиперплоскости $x_0 + X(H)$ на интересующее нас множество $\mathcal{Z}_H = Y \setminus H$. При этом определяемая указанной биекцией ВАС α на $\mathcal{Z}_H$ не зависит от выбора точки $x_0 \in X \setminus X(H)$ и обладает требуемыми свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.9. Более чем одноточечное множество A в ПП Y назовем аффинным, если отвечающее ему множество $R(A) = \rho r\, A \setminus A$ является проективной гиперплоскостью в ПП $Y' = \rho r\, A$ (см. следствие из 5.6). При этом проективное множество $R(A)$ будем называть ребром аффинного множества A. Далее, аффинные множества, имеющие одноточечные ребра, назовем аффинными прямыми. Каждая из них представима в виде $\mathcal{Y}_p(q) = g(p,q) \setminus \{p\}$, где $p \neq q$.

СЛЕДСТВИЕ. Теоретико-множественные объединения возрастающих семейств и теоретико-множественные пересечения убывающих семейств аффинных множеств являются аффинными множествами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.10. Каковы бы ни были две проективные гиперплоскости $H \neq H'$ в ПП Y, их дополнение $\mathcal{Z}_{H,H'} = Y \setminus H \cup H'$ однозначно представимо в виде объединения двух множеств $G_{H,H'}$ и $G'_{H,H'}$, каждое из которых вместе с каждыми двумя своими точками $p \neq q$ содержит один и только один из порождаемых ими проективных сегментов. При этом

$$G_{H,H'} \cap G'_{H,H'} = \emptyset.$$

Для доказательства достаточно заметить, что аффинное множество $A' = H' \setminus H \cap H' = H' \cap (Y \setminus H)$ является гиперплоскостью в АП $\mathcal{Z}_H = Y \setminus H$ и интересующее нас множество $\mathcal{Z}_{H,H'} = \mathcal{Z}_H \setminus A'$ совпадает с объединением соответствующих открытых полупространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11. Фигурирующие в 5.10 множества $G = G_{H,H'}$ и $G' = G'_{H,H'}$ называют открытыми проективными полупространствами, ограниченными проективными гиперплоскостями $H \neq H'$, а их дополнения

$$F = F_{H,H'} = G \cup H \cup H' = Y \setminus G', \quad F' = F'_{H,H'} = G' \cup H \cup H' = Y \setminus G$$

– замкнутыми проективными полупространствами, ограниченными теми же проективными гиперплоскостями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каковы бы ни были проективные гиперплоскости $H \neq H'$ в ПП Y, ограниченные ими замкнутые проективные полупространства F и F' совпадают с объединениями проективных гиперплоскостей $H \subset Y$, образующих проективные сегменты $hg[H,H']$ и $hg'[H,H']$ в сопряженном ПП Y^* (см. замечание к 5.7).

§6. Проективные треугольники и проективно-выпуклые множества

Рассматриваемые здесь ПП $Y=\beta\langle X\rangle$ предполагаются более чем одномерными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.I. Под проективными треугольниками в ПП $Y=\beta\langle X\rangle$ будем понимать множества

$$\Delta_{x,y,z}=\beta\langle conv\{x,y,z\}\rangle,$$

порождаемые линейно-независимыми $x,y,z\in X$. При этом точки $p=\beta\langle x\rangle$, $q=\beta\langle y\rangle$ и $r=\beta\langle z\rangle$ будем называть вершинами, а проективные сегменты $hg[p,q]=hg_{x,y}$, $hg[q,r]=hg_{y,z}$ и $hg[p,r]=hg_{x,z}$ - сторонами проективного треугольника $\Delta_{x,y,z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каковы бы ни были три независимые точки $p=\beta\langle x\rangle$, $q=\beta\langle y\rangle$ и $r=\beta\langle z\rangle$, они являются вершинами четырех проективных треугольников $\Delta_{\pm x,\pm y,\pm z}$, $\Delta_{\pm x,\pm y,\mp z}$, $\Delta_{\pm x,\mp y,\pm z}$ и $\Delta_{\pm x,\mp y,\mp z}$. Каждые два из них имеют одну и только одну общую сторону, а объединение всех этих проективных треугольников совпадает с $P=pr\{p,q,r\}$. Далее, каковы бы ни были $s\in hg^{\circ}_{x,-y}$ и $t\in hg^{\circ}_{x,z}$ (см.5.I), проективная прямая $g(s,t)$ имеет общую точку (естественно, единственную) с проективным интервалом $hg_{y,z}$. Это означает, что проективные пространства удовлетворяют известной аксиоме Паша.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Множество M в ПП $Y=\beta\langle X\rangle$ назовем проективно-выпуклым, если оно вместе с каждыми двумя своими независимыми точками содержит хотя бы один из порождаемых ими проективных сегментов, а вместе с каждыми тремя своими независимыми точками содержит хотя бы один из порождаемых ими проективных треугольников.

СЛЕДСТВИЕ I. Теоретико-множественные объединения возрастающих семейств и теоретико-множественные пересечения убывающих семейств проективно-выпуклых множеств являются проективно-выпуклыми.

СЛЕДСТВИЕ 2. Каковы бы ни были проективно-выпуклое $M\subset Y$

и проективное множество $P \subset Y$, их пересечение является проективно-выпуклым.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для проективной выпуклости множества $M \subset Y$ достаточно, чтобы проективно-выпуклыми были его пересечения со всеми двумерными проективными множествами $P \subset Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Проективно-выпуклые множества, которые не содержат проективных прямых и, следовательно, с каждыми двумя своими точками содержат один и только один из отвечающих им проективных сегментов, будем называть собственными, а остальные - несобственными. Далее, собственное проективно-выпуклое $M \subset Y$ назовем ограниченным, если оно не содержит аффинных прямых (см. 5.9), а в противном случае - неограниченным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Класс собственных проективно-выпуклых $M \subset Y$, не имеющих общих точек с фиксированной проективной гиперплоскостью $H \subset Y$, совпадает с классом выпуклых множеств в соответствующем АП $\mathcal{X}_H = Y \setminus H$ (см. 5.8). Это означает, в частности, что собственными проективно-выпуклыми являются все не более чем одноточечные множества, проективные интервалы, сегменты, треугольники, аффинные множества и открытые проективные полупространства (см. 5.II). В то же время все более чем одноточечные проективные множества и замкнутые проективные полупространства (в более чем одномерных ПП Y) являются несобственными проективно-выпуклыми множествами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. Собственные проективно-выпуклые множества M в ПП $Y = \beta\langle X \rangle$ характеризуются тем, что отвечающие им множества $X(M) \subset X$ (см. замечание к 5.5) не содержат двумерных подпространств и однозначно представимы в виде объединения симметричных конусов K_M и K'_M, не имеющих общих лучей.

СЛЕДСТВИЕ. Каково бы ни было неограниченное собственное проективно-выпуклое $M \subset Y$, справедливы следующие утверждения:

(i) Объединение всех одноточечных ребер содержащихся в M аффинных прямых (см. 5.9) совпадает с ребром $R(A)$ некоторого аффинного множества $A \subset M$ и, следовательно, является проективным множеством. Его называют ребром рассматриваемого неограниченного собственного проективно-выпуклого множества и обозначают через $R(M)$.

(ii) Порождаемые аффинными множествами

$$A_p = pr\,(R(M) \cup \{p\}) \setminus R(M), \quad p \in M,$$

множества

$$M_0 = \{p \in M \mid A_p \subset M\} \subset M \subset U_{p \in M} A_p = M_1$$

также являются неограниченными собственными проективно-выпуклыми, причем

$$R(M_0) = R(M) = R(M_1), \qquad M_0 = M \Leftrightarrow M = M_1$$

и при любых $p \in M_0$ и $q \in M_1 \setminus M_0$ проективная прямая $g(p,q)$ содержит не более двух точек множества $M_1 \setminus M_0$.

(iii) Множество $\tilde{M} = M \cup R(M)$ в том и только в том случае является проективно-выпуклым (естественно, несобственным), если $M_0 = M = M_1$. При выполнении этого условия M называют выпуклой аффинной связкой, а $\tilde{M}$ – выпуклой проективной связкой. Указанные связки называют невырожденными, если M не является аффинным множеством и, следовательно, $\tilde{M} \neq pr\,\tilde{M}$. В противном случае их называют вырожденными.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. Все несобственные проективно-выпуклые множества $M \subset Y$ являются выпуклыми проективными связками и, следовательно, представимы в виде $M = \check{M} \cup R(\check{M})$, где $\check{M}$ – некоторая выпуклая аффинная связка (собственное ядро соответствующего несобственного проективно-выпуклого M), а $R(\check{M})$ – ее ребро. При этом невырожденные выпуклые проективные связки однозначно представимы в указанном виде. В то же время каждое более чем одноточечное проективное множество $M \subset Y$ (т.е. каждую вырожденную выпуклую проективную связку) можно представить в указанном виде различными способами. В качестве $\check{M}$ в этом случае можно принять любое из аффинных множеств $A = M \setminus H'$, порождаемых проективными гиперплоскостями H' в Ш $Y' = M$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для единообразия удобно определить собственные ядра также для собственных проективно-выпуклых $M \subset Y$. В качестве таковых принимают множества $\check{M} = M$. Кроме того, в качестве ребер ограниченных собственных проективно-выпуклых $M \subset Y$ принимают множества $R(M) = \emptyset$, а в качестве ребер невырожденных выпуклых проективных связок $M \subset Y$ – множества $R(M) = R(\check{M})$. Далее, класс всех несобственных проективно-выпуклых $M \subset Y$, совпадающий с классом выпуклых проективных связок, обозначим через $CPF(Y)$. При этом подкласс вырожденных выпуклых проективных связок, совпадающий с множеством более чем одноточечных проективных множеств, будем обозначать через $CPF_0(Y)$, а подкласс невырожденных выпуклых проективных связок – через $CPF_1(Y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.6. Множества $M \in CPF_0(Y)$ в каждом ПП $Y = \beta\langle X\rangle$ характеризуются тем, что отвечающие им множества $X(M)$ в ВЛП X являются более чем одномерными подпространствами (см. 5.6). В свою очередь, множества $M \in CPF_1(Y)$ характеризуются тем, что отвечающие им множества $X(M) \neq$ $\neq lin\, X(M)$ однозначно представимы в виде объединений симметричных конусов K_M и K'_M, множества вершин которых $v(M) =$ $= K_M \cap K'_M$ являются более чем нульмерными подпространствами и совпадают с пересечениями всех максимальных подпространств $w \subset X(M)$. При этом ребро $R(M)$ каждого $M \in PCF_1(Y)$ совпадает с $\beta\langle v(M)\rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множества $X(M) \subset X$, отвечающие собственным проективно-выпуклым $M \subset Y$, в силу 6.3, однозначно представимы в виде объединений симметричных конусов K_M и K'_M, вершины которых образуют нульмерное подпространство $v(M) = K_M \cap K'_M$. При этом для ограниченных собственных проективно-выпуклых M (см. замечания к 6.5 и 5.5), как и в случае невырожденных выпуклых проективных связок, имеем: $X(R(M)) = X(\emptyset) = v(M)$.

Важную роль играют выделяемые ниже классы проективных гиперплоскостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Для каждого проективного множества P в ПП Y через $co\, P$ обозначим класс проективных гиперплоскостей $H \subset Y$, содержащих P.

ЗАМЕЧАНИЕ. Семейство выделенных классов совпадает с семейством проективных множеств в сопряженном ПП Y^* (см. замечание к 5.7). При этом для каждого непустого проективного множества $P \neq Y$ имеем:

$$\dim(co\, P) = \operatorname{codim} P - 1, \quad \operatorname{codim}(co\, P) = \dim P + 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Для каждого проективно-выпуклого $M \notin CPF_0(Y)$ определим два класса проективных гиперплоскостей:

(i) Класс $\mathcal{H}(M)$, состоящий из проективных гиперплоскостей $H \subset Y$, которым отвечают проективно-выпуклые множества $M' = M \cap (Y \setminus H) = M \setminus M \cap H$;

(ii) Класс $\mathcal{H}_0(M)$, состоящий из проективных гиперплоскостей $H \subset Y$, которые не пересекаются с собственным ядром $\check{M}$ рассматриваемого проективно-выпуклого $M \subset Y$ (см. 6.5 и замечание к 6.5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.9. Выделенные классы проективных гиперплоскостей в ПП $Y = \beta \langle X \rangle$ следующим образом связаны с гиперплоскостями $w \subset X$, которые разделяют отвечающие каждому проективно-выпуклому $M \notin CPF_0(Y)$ симметричные конусы K_M и K'_M (см. 6.5 и 6.6):

(i) Проективные гиперплоскости $H \in \mathcal{H}(M)$ характеризуются тем, что отвечающие им гиперплоскости $X(H)$ в ВЛП X разделяют соответствующие симметричные конусы K_M и K'_M.

(ii) Проективные гиперплоскости $H \in \mathcal{H}_0(M)$ характеризуются тем, что отвечающие им гиперплоскости $X(H)$ в ВЛП X строго разделяют множества $K_M \setminus v(M)$ и $K'_M \setminus v(M)$, где $v(M) = K_M \cap K'_M$ - линейное множество вершин соответствующих симметричных конусов K_M и K'_M.

СЛЕДСТВИЕ I. Выделенные классы проективных гиперплоскостей в ПП Y являются проективно-выпуклыми множествами в сопряженном ПП Y^*. При этом для каждого проективно-выпуклого $M \notin CPF_0(Y)$ имеем:

$$\mathcal{H}_0(M) = \mathcal{H}_0(\check{M}) \subset \mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(\check{M}) \subset co\, R(M) = co\, R(\check{M}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В конечномерных ПП Y всем проективно-выпуклым $M \notin CPF_0(Y)$ отвечают непустые классы $\mathcal{H}_0(M)$. В то же время в каждом бесконечномерном ПП Y имеются ограниченные собственные проективно-выпуклые M, для которых $\mathcal{H}(M) = \emptyset$. Это означает, в частности, что класс собственных проективно-выпуклых множеств в каждом бесконечномерном ПП Y не совпадает с объединением выпуклых множеств всех АП $\mathcal{X}_H = Y \setminus H$, порождаемых проективными гиперплоскостями $H \subset Y$ (см. замечание к 6.3).

§7. Используемые топологии

Интересующие нас топологии в проективных пространствах тесно связаны с топологиями τ^* и τ_o, описанными в §3 для случая аффинных пространств. Множество M в ПП $Y = \beta\langle X\rangle$ является τ^*-замкнутым (τ_o-замкнутым), если для любой проективной гиперплоскости $H \subset Y$ таковым является множество $M \cap (Y \setminus H)$ в АП $\mathcal{X}_H = Y \setminus H$, о котором говорилось в 5.8. Это означает, что множество $M \subset Y$ в том и только в том случае τ^*-замкнуто (τ_o-замкнуто), если таковым является отвечающее ему множество $X(M)$ в ВЛП X (см. 5.I). Вместе с тем нам представляется более естественным непосредственное определение и изучение указанных топологий в ПП Y. Это потребует повторить с небольшими модификациями содержание §3.

В качестве основной в ПП Y принимается сильнейшая топология, согласованная с естественной топологией проективных прямых. В этой топологии, обозначаемой через τ^*, открытые и замкнутые множества характеризуются тем, что таковыми является их пересечение с любой проективной прямой в ее естественной топологии. В частности, это означает τ^*-замкнутость всех проективных множеств, а также рассмотренных выше замкнутых проективных полупространств (см.5.II). В свою очередь, дополнения проективных гиперплоскостей, а также открытые проективные полупространства являются τ^*-открытыми. Далее, только пустое множество и все пространство Y являются одновременно τ^*-открытыми и τ^*-замкнутыми, т.е. τ^*-топология является связной. При этом множество $M \in CPF(Y)$ является τ^*-открытым лишь в том случае, если $M = Y$.

Наряду с τ^*-замыканием каждого множества $M \subset Y$, которое обозначается через $\tau^*\text{-}cl\, M$, нас будут интересовать также следующие множества M:

$$int\, M = Y \setminus \tau^*\text{-}cl(Y \setminus M),\quad r.int\, M = pr\, M \setminus \tau^*\text{-}cl(pr\, M \setminus M).$$

Первое из них будет называться открытым ядром, а второе - относительно открытым ядром соответствующего множества M (оно является τ^*-открытым в ПП $Y' = pr\, M$). Если $pr\, M = Y$, то указанные множества, очевидно, совпадают. В противном случае множество M имеет пустое открытое ядро, но его относительно открытое ядро может оказаться непустым. Множества $M \subset Y$, совпадающие со своими относительно открытыми ядрами, называют относительно открытыми.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Каково бы ни было проективно-выпуклое $M \subset Y$, его τ^*-замыкание и относительно открытое ядро (а тогда и открытое ядро) являются проективно-выпуклыми. При этом проективные множества характеризуются тем, что для них $r.\mathrm{int}\, M = M = \tau^*\text{-}cl\, M$, а для невырожденных выпуклых проективных связок $M \in CPF_1(Y)$ имеем:

$$r.\mathrm{int}\, M = r.\mathrm{int}\, \check{M}, \quad \tau^*\text{-}cl\, M = \tau^*\text{-}cl\, \check{M}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Проективно-выпуклое $M \subset Y$ назовем телесным, если $\mathrm{int}\, M \neq \emptyset$, и относительно телесным, если $r.\mathrm{int}\, M \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В следующем параграфе будет показано, что в конечномерных ПП Y все непустые проективно-выпуклые $M \subset Y$ являются относительно телесными. Однако в бесконечномерных ПП Y таковыми являются далеко не все проективно-выпуклые $M \subset Y$. Для получения τ^*-замыкания относительно телесного проективно-выпуклого $M \subset Y$ достаточно присоединить к нему концы всех содержащихся в нем проективных интервалов. Более того, в этой операции можно ограничиться интервалами с одним фиксированным концом из $r.\mathrm{int}\, M$. Если же $r.\mathrm{int}\, M = \emptyset$, то для получения $\tau^*\text{-}cl\, M$ приходится рассматривать трансфинитные последовательности результатов применения указанной операции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. Каково бы ни было τ^*-замкнутое относительно телесное проективно-выпуклое множество M в ПП Y, оно представимо в виде пересечения некоторого семейства замкнутых проективных полупространств.

Нетривиальным утверждение является лишь для проективно-выпуклых $M \neq pr\, M$. Однозначно определяемые ими симметричные конусы K_M и K'_M в ВЛП X являются, очевидно, τ^*-замкнутыми и относительно телесными. Поэтому (см. замечание к 3.5) каждый из них представим в виде пересечения некоторого семейства замкнутых полупространств в ВЛП X. Учитывая связь соответствующих гиперплоскостей в ВЛП X с проективными гиперплоскостями, рассмотренными в 6.8 (см. 6.9), нетрудно построить требуемое семейство замкнутых проективных полупространств.

Наряду с приведенной $\mathcal{T}^*$-топологией, которая в более чем одномерных ПП Y не является локально-выпуклой, нас будет интересовать также сильнейшая локально-выпуклая топология. В этой топологии, обозначаемой через $\mathcal{T}_0$, открытые множества характеризуются тем, что они представимы в виде объединений $\mathcal{T}^*$-открытых проективно-выпуклых множеств. Указанная топология в более чем одномерных ПП Y слабее предыдущей, т.е. семейства $\mathcal{T}_0$-открытых и $\mathcal{T}_0$-замкнутых множеств являются собственными подсемействами соответствующих семейств в топологии $\mathcal{T}^*$. Вместе с тем классы открытых проективно-выпуклых множеств в этих топологиях, очевидно, совпадают. Это означает, в частности, что $\mathcal{T}_0$-открытыми являютмя рассмотренные выше открытые полупространства. Но тогда их дополнения - замкнутые полупространства, а также проективные гиперплоскости и все проективные множества являются $\mathcal{T}_0$-замкнутыми. Далее, из 7.3 вытекает $\mathcal{T}_0$-замкнутость всех $\mathcal{T}^*$-замкнутых относительно телесных проективных множеств. В общем случае, как и для аффинных пространств, можно утверждать лишь, что проективно-выпуклое множество в том и только в том случае является $\mathcal{T}_0$-замкнутым, если оно представимо в виде пересечения некоторого семейства замкнутых проективных полупространств. Более эффективные признаки $\mathcal{T}_0$-замкнутости проективно-выпуклых множеств устанавливаются с помощью различных теорем отделимости для нетелесных проективно-выпуклых множеств. Формулировки и доказательства таких теорем используют конструкции, рассматриваемые в следующем параграфе.

§8. Грани и гранёвые строения проективно-выпуклых множеств

Определение граней и граневых строений для произвольных проективно-выпуклых множеств сводится к определению этих понятий для собственных проективно-выпуклых множеств, которые, как и выпуклые множества в аффинных пространствах, вместе с каждыми двумя своими точками содержат один и только один из ограниченных ими проективных интервалов. Вместе с тем, учитывая следствие 2 из 6.9, мы не можем опираться на аналогичные результаты из §4. Более того, используемые там конструкции приходится несколько модифицировать, так как в проективных пространствах нельзя естественным образом определить понятие конуса.

В приводимом ниже определении под обобщенным интервалом в ПП $Y=\beta\langle X\rangle$ понимается множество $\mathcal{U}\subset Y$, которое совпадает с некоторым проективным интервалом или же является одноточечным. При этом для каждого $M\subset Y$ через $U_p(M)$ обозначается множество всех обобщенных интервалов $\mathcal{U}\subset M$, содержащих фиксированную точку $p\in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Каждой точке p непустого проективно-выпуклого $M\notin CPF_1(Y)$ (см. замечание к 6.5) сопоставим объединение всех обобщенных интервалов $\mathcal{U}\in U_p(M)$, обозначаемое через $G_p(M)$, а также порождаемые им множества

$$L_p(M)=pz\,G_p(M),\quad F_p(M)=M\cap L_p(M).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. Отвечающие каждой точке $p\in M$ множества $G_p(M)$ и $F_p(M)$ являются проективно-выпуклыми и относительно телесными, причем $G_p(M)=z.\operatorname{int}F_p(M)$. Далее, следующие утверждения относительно точек p и q равносильны:

$$q\in F_p(M),\quad F_q(M)\subset F_p(M),\quad L_q(M)\subset L_p(M).$$

При этом для точек $q\in G_p(M)$ в приведенных включениях достигаются равенства, а для точек $q\in F_p(M)\setminus G_p(M)$ эти включения являются строгими. Следовательно, упорядоченные по теоретико-множественному включению семейства

$$\mathcal{F}(M)=\{F_p(M)\}_{p\in M},\quad \mathcal{L}(M)=\{L_p(M)\}_{p\in M}$$

являются изоморфными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Отвечающие каждому непустому проективно-выпуклому $M\notin CPF_1(Y)$ относительно телесные проективно-выпуклые множества $F_p(M)$ будем называть гранями и под граневым строением M понимать множество $\mathcal{F}(M)$ всех его граней, упорядоченное по теоретико-множественному включению.

ЗАМЕЧАНИЕ. Непустые относительно открытые проективно-выпуклые множества (и только они) имеют единственную грань.

Перейдем теперь к определению граней и граневых строений для невырожденных выпуклых проективных связок, образующих подкласс $CPF_1(Y)$. Напомним, что каждая из них однозначно представима в виде $M=\check{M}\cup R(M)$, где $\check{M}$ - некоторая невырожденная аффинная связка (собственное ядро), а $R(M)=R(\check{M})$ - ребро рассматриваемого $M\in CPF_1(Y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. Какова бы ни была невырожденная выпуклая проективная связка $M=\check{M}\cup R(M)$, точкам p ее собственного ядра $\check{M}$ (и только этим точкам) сопоставим выпуклые аффинные связки $G_p(M)=G_p(\check{M})$, их проективные оболочки $L_p(M)=L_p(\check{M})$ и порождаемые ими выпуклые проективные связки

$$F_p(M)=M\cap L_p(M)=F_p(\check{M})\cup R(M).$$

Последние назовем гранями и под граневым строением M будем понимать упорядоченное по теоретико-множественному включению множество $\mathcal{F}(M)=\{F_p(M)\}_{p\in\check{M}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.5. Каково бы ни было непустое проективно-выпуклое M, его граневое строение $\mathcal{F}(M)$ является верхней полурешеткой.

Действительно, при любых точках $p\neq q$ из $\check{M}$ (см. замечание к 6.5) супремумом граней $F_p(M)$ и $F_q(M)$ в $\mathcal{F}(M)$ является грань $F_z(M)$, которая не зависит от выбора точки z из содержащегося в $\check{M}$ проективного интервала, ограниченного точками p и q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6. Пусть M - произвольное непустое проективно-выпуклое множество. Тогда подмножество $A\subset\check{M}$ называют порождающим, если $\bigcup_{p\in A}F_p(M)=M$. При этом минимальную мощность порождающих подмножеств будем обозначать через $\rho(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из 8.5 вытекает, в частности, что если непустое проективно-выпуклое M имеет конечные порождающие подмножества, то оно имеет также одноточечные порождающие подмножества, т.е. M - относительно телесное проективно-выпуклое множество. В противном случае каждая грань $F_p(M)$ является собственным подмножеством некоторой грани $F_q(M)$. Но тогда проективное множество $\rho z\, M$ содержит бесконечную строго возрастающую последовательность проективных подмножеств и, следовательно, является бесконечномерным. Это с...

начает, в частности, что в конечномерных проективных пространствах все непустые проективно-выпуклые множества являются относительно телесными. В то же время в каждом бесконечномерном ПП Y имеются непустые проективно-выпуклые M, для которых $\tau.\,int\, M = \emptyset$. Из них наиболее простыми являются такие, для которых $\rho(M) = \aleph_0$. Эти множества характеризуются тем, что их граневые строения содержат счетные возрастающие последовательности граней $F\rho_i(M)$, объединение которых совпадает с M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7. Непустые проективно-выпуклые M, для которых $\rho(M) \leq \aleph_0$ (т.е. $\rho(M)=1$ или $\rho(M)=\aleph_0$), будем называть квазителесными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для иллюстрации полезности выделения указанного класса проективно-выпуклых множеств заметим, что для τ_0-замкнутости τ^*-замкнутого проективно-выпуклого множества достаточно, чтобы оно было квазителесным.

В заключение остановимся коротко на характеристике важного подкласса относительно телесных проективно-выпуклых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.8. Непустое проективно-выпуклое множество M назовем проективно-выпуклым многогранником, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) M является τ^*-замкнутым и имеет конечное число граней;

(ii) M представимо в виде пересечения некоторого проективного множества с пересечением конечного числа замкнутых проективных полупространств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.9. Если проективно-выпуклый многогранник $M \subset Y$ имеет k_0 минимальных граней, k_1 граней, непосредственно следующих за минимальными, k_2 граней, непосредственно следующих за предыдущими, и т.д., то указанные числа удовлетворяют известному тождеству Эйлера $\sum_s (-1)^s k_s = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.10. В каждом ПП Y класс непустых проективных множеств совпадает с классом проективно-выпуклых многогранников M, для которых $card\, \mathcal{F}(M)=1$, а класс замкнутых проективных полупространств совпадает с классом проективно-выпуклых многогранников M, для которых $pr\, M = Y$ и $card\, \mathcal{F}(M) = 3$. Проективно-выпуклых многогранников, имеющих две грани, не существует.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.II. Каково бы ни было непустое проективно-выпуклое подмножество Q собственного ядра $\check{M}$ проективно-выпуклого многогранника M, найдется такая точка $p_0 \in Q$, что отвечающая ей грань $F_{p_0}(M)$ совпадает с $\bigcup_{p \in Q} F_p(M)$.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.02.1983 г.