Выпуск 30(47) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.

Численные методы

УДК 512.25/26

О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Л.П.Черканова

Рассмотрим вычислительный процесс отыскания оптимального решения задачи выпуклого программирования [I] с помощью одной из модификаций метода возможных направлений [2] такой, что исходная задача

$$\begin{cases} \varphi_i(X) \le 0, \quad i=1,\dots,m, \quad X\in R^n, \\ F(X) \to \min \end{cases} \tag{1}$$

аппроксимируется задачей, в которой допустимая область $\bar{\Omega}_1$ имеет гладкую границу

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m} e^{\bar{A}_0 \varphi_i(\bar{X})} \le 1, \\ X^{n+1} \to \min . \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\bar{X}=(X, X^{n+1})$, $\varphi_0(\bar{X}) = F(X) - X^{n+1}$, $\varphi_i(\bar{X}) = \varphi_i(X)$, $i=1,\dots,m$, $\bar{A}_0 > 0$ – некоторое большое число.

Предположим, что последовательность точек

$$\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_1', \bar{X}_2, \bar{X}_2', \dots, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}', \bar{X}_k, \bar{X}_k'$$

уже получена; точки $\bar{X}_r \in \partial\bar{\Omega}, 0 \le r \le k$, $\bar{\Omega} = \{\bar{X} / \varphi_i(\bar{X}) \le 0, \ i=\overline{0,m}\}$, а $\bar{X}_r' \in \partial\bar{\Omega}_2^{r+1}$, $1 \le r \le k$ (описание областей $\bar{\Omega}_2^{r+1}$ дано ниже). Перед нами встает задача получения точек

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k' + \lambda_{k+1} s_{k+1}$$

и

$$\bar{X}_{k+1}' = \bar{X}_k' + \mu \lambda_{k+1} s_{k+1}, \quad 0<\mu<1,$$

т.е. задача определения направления движения s_{k+1} и величины λ_{k+1}.

Напомним, что для нахождения s_{k+1}, $k \geq 1$ [2], нужно по точке $\bar{X}_k$, вернее, по значениям функций $\varphi_i(X)$ в этой точке, построить область

$$\bar{\Omega}_2^{k+1} = \{\bar{X} / \sum_{i=0}^{m} e^{\bar{c}_i^{k+1}\varphi_i(\bar{X})} \leq 1\}, \quad \bar{\Omega}_2^{k+1} \subset \bar{\Omega}, \tag{3}$$

где коэффициенты $\bar{c}_i^{k+1}$ подбирались из следующих соображений. Если $|\varphi_i(\bar{X}_k')| \geq \varepsilon$ (ε - параметр метода возможных напралений), то $\bar{c}_i^{k+1}$ находились из условия

$$e^{\bar{c}_i^{k+1}\varphi_i(\bar{X}_k')} \leq \varepsilon_0 \tag{4}$$

(ε_0 - предел точности вычислений), т.е. $\bar{c}_i^{k+1} \geq \dfrac{\ln \varepsilon_0}{\varphi_i(\bar{X}_k')}$.
Если ограничения $\varphi_i(\bar{X}) \leq 0$ являлись существенными в точке $\bar{X}_k'$, то коэффициенты $\bar{c}_i^{k+1}$ находились из предположения об одинаковой роли существенных ограничений на границе области $\bar{\Omega}_2^{k+1}$:

$$\sum_{i=1}^{z_k} e^{\bar{c}_i^{k+1}\varphi_i(\bar{X}_k')} = 1, \quad z_k > 1, \tag{5}$$
$$e^{\bar{c}_i^{k+1}\varphi_i(\bar{X}_k')} = 1-\varepsilon, \quad i = i_{z_k}, \quad z_k = 1,$$

z_k - число ограничений, для которых $0 \leq |\varphi_i(\bar{X}_k')| < \varepsilon$.

Заметим, что по сравнению с [2] произошло выделение случая $z_k = 1$, соответственно уточнилась область

$$\bar{\Omega}_2^{k+1} = \{\bar{X} / \sum_{i=0}^{m} e^{\bar{c}_i^{k+1}\varphi_i(\bar{X})} \leq 1-\varepsilon\}, \quad z_k = 1. \tag{3'}$$

Формулы для нахождения вектора движения s_{k+1}, $k \geq 1$, остались прежними, т.е. опущен масштабный множитель $\bar{c}_i^{k+1}$ в случае $z_k = 1$:

$$s_{k+1}^j = \begin{cases} -\dfrac{1}{z_k}\sum_{i=1}^{z_k} \nabla\varphi_i^j(\bar{X}_k')\bar{c}_i^{k+1}, & z_k > 1, \\ -\nabla\varphi_{i_{z_k}}^j(\bar{X}_k'), & z_k = 1, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{6}$$

Только в целях единообразия вычислительного процесса полагаем всегда

$$s_{k+1}^{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} (s_{k+1}^j)^2 / 2. \tag{7}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Чтобы лучше понять идею предлагаемого метода, нужно рассмотреть его в пространстве той же размерности, что и в исходной задаче (I):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} e^{A_0 \varphi_i(X)} \leq 1, \quad X \in R^n, \ A_0 > 0. \\ F(X) \to min. \end{cases} \tag{8}$$

Соответственно областям $\bar{\Omega}, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2^{k+1}$ пространства R^{n+1} рассматриваются области $\Omega, \Omega_1, \Omega_2^{k+1}$, где Ω – допустимая область в задаче (I), Ω_1 – в задаче (8), а Ω_2^{k+1} строится аналогично $\bar{\Omega}_2^{k+1}$ по точке $X_k'(\bar{X}_k, \bar{X}_k' \to X_k, X_k')$:

$$\Omega_2^{k+1} = \left\{ X / \sum_{i=1}^{m} e^{c_i^{k+1} \varphi_i(X)} \leq 1 \right\}, \ \Omega_2^{k+1} \subset \Omega_{A^*} \subset \Omega, \ \Omega_{A^*} \supset \Omega_1, \ k \geq 0.$$

Подобно областям $\Omega_1, \Omega_2^{k+1}, k \geq 0$, область Ω_{A^*} имеет гладкую границу, следовательно, при движении в ней не нужно применять приемы для предотвращения зигзагообразного движения.

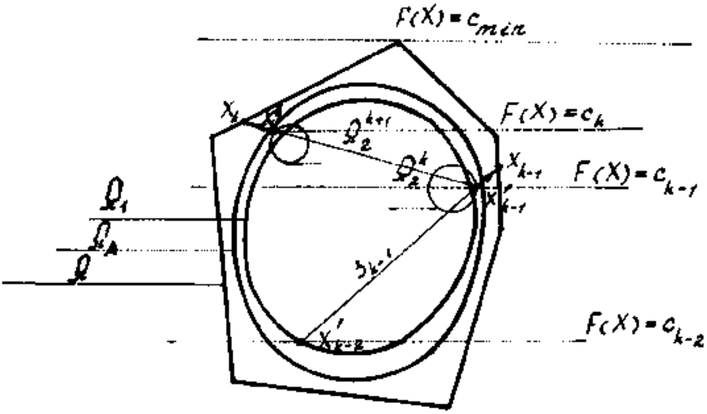

Рис. I. Иллюстрация характера движения

Как видно из рис. I, геометрия метода [2] довольно проста в пространстве R^n, но зато приходится на каждом шаге вычислять градиент целевой функции $F(X)$, так как усложняются формулы для нахождения $З_{k+1}$; это и послужило причиной перехода от пространства R^n к пространству R^{n+1}.

Необходимо подчеркнуть, что стандартный способ разделения ограничений на существенные и несущественные с помощью параметра ε вследствие свойства однородности $c \cdot \varphi_i(X) \leq 0$,

$c > 0$, не является достаточно обоснованным: может наблюдаться как отбрасывание существенных ограничений, так и включение несущественных в группу действительно существенных ограничений.

Ниже предлагается другой способ выделения существенных ограничений в точке $\bar{X}_k$, основанный на анализе вычислений предыдущего k-шага (по этой причине он не подходит для определения типа ограничений в начальной точке $\bar{X}_0$) и анализе кратчайших расстояний R_k^i по направлению z_k^i, $(z_k^i, s_k) \geq 0$, $\| s_k \| = 1$, от точки $\bar{X}_k$ до гиперповерхностей $G_i(\bar{X}) = \{\bar{X} / \varphi_i(\bar{X}) = 0\}$, $i = \overline{0, m}$. При этом сравнивается шаг λ_k и величины λ_k^i, которые находятся из уравнений

$$\varphi_i(\bar{X}_{k-1}' + \lambda_k^i s_k) = 0, \quad i = 0, \ldots, m, \quad \lambda_k = \min_{i : \lambda_k^i > 0} \lambda_k^i .$$

Если величины λ_k^i и λ_k "близки с точностью δ", $0 \leq \delta < 1$, т.е.

$$\lambda_k / \lambda_k^i \geq \delta, \quad \lambda_k^i > 0, \tag{9}$$

то ограничение $\varphi_i(\bar{X}) \leq 0$ считается существенным в точке $\bar{X}_k$, следовательно, и в точке $\bar{X}_k'$ [*].

Поскольку и при невыполнении этого условия ограничение может быть существенным (см. рис.2), то нужно также проанализировать отношение

$$\frac{R_k^i}{\bar{\lambda}_k^i}, \qquad \bar{\lambda}_k^i \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } \lambda_k^i > 0, \\ \lambda_k, & \text{если } \lambda_k^i \leq 0, \end{cases}$$

$$(z_k^i, s_k) \geq 0;$$

если

$$R_k^i / \bar{\lambda}_k^i \leq 1 - \delta, \tag{9'}$$

то ограничение $\varphi_i(\bar{X}) \leq 0$ нужно причислить к существенным, как, например, $\varphi_2(\bar{X}) \leq 0$ и $\varphi_6(\bar{X}) \leq 0$ в точке $\bar{X}_k$.

Нетрудно показать, что второе условие является следствием первого ($R_k^i \leq \lambda_k^i - \lambda_k$) для $\lambda_k^i > 0$.

Известно, что только в исключительных случаях (например, для линейных ограничений и n-мерной сферы) расстояние R_k^i ищется по градиенту $\nabla \varphi_i(\bar{X}_k)$, т.е. не требует особых затрат времени, поэтому рекомендуется при хорошем ходе вычисли-

---

[*] Параметр μ подбирается таким образом, чтобы сохранить тип ограничений (т.е. является ли данное ограничение существенным или нет) в точке $\bar{X}_k$ и для точки $\bar{X}_k'$.

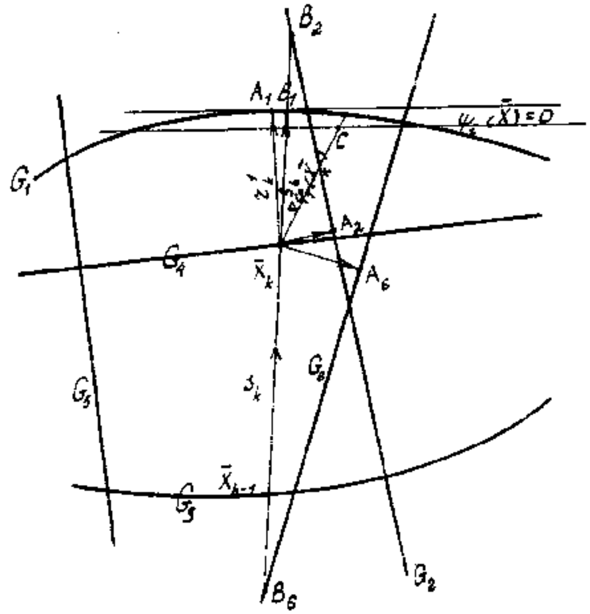

Рис.2. Выбор существенных ограничений по критерию (9)-(9')

тельного процесса (достаточном улучшении целевой функции (2)- $- X_k^{n+1} / X_{k-1}^{n+1} < 0,8$) проверять условие (9) .

Отметим, что, несмотря на изменение способа выделения существенных ограничений, формулы для вычисления коэффициентов $\bar{c}_i^{k+1}$ остаются прежними: (4), (5).

Проследим подробно процесс вычислений метода [2] с измененным критерием выбора существенных ограничений на конкретном примере.

ПРИМЕР I.

$$\varphi_1(X) = X_1^2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 - 2X_1 - X_2 - X_3 - 2 \leq 0,$$
$$\varphi_2(X) = X_1^2 + X_2^2 - X_1 + X_2 - X_3 - 3 \leq 0,$$
$$\varphi_3(X) = \tfrac{2}{3}(X_1^2 + X_1 - 4X_2 - X_3 + 3) \leq 0,$$
$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3,$$
$$F(X) = X_3^2 \to min.$$

С помощью метода штрафов [3] была получена точка, которая являлась внутренней:

$$X_o=(0{,}530;\ 0{,}832;\ 1{,}152);\quad \varphi_1(X_o)=-2{,}498,$$

$$\varphi_2(X_o)=-2{,}878,\quad \varphi_3(X_o)=-0{,}668.$$

Перейдем к записи задачи в виде (2):

$$\sum_{i=0}^{6} e^{\varphi_i(\bar X)\bar A_o}\le 1,\quad \bar X\in R^4,\quad \varphi_o(\bar X)=(X^3)^2-X^4\le 0,$$

$$\varphi_1(\bar X)=(X^1)^2+2X^1X^2+2(X^2)^2-2X^1-X^2-X^3-2\le 0,$$

$$\varphi_2(\bar X)=(X^1)^2+(X^2)^2-X^1+X^2-X^3-3\le 0,$$

$$\varphi_3(\bar X)=\frac{2}{3}((X^1)^2+X^1-4X^2-X^3+3)\le 0,$$

$$\varphi_4(\bar X)=-X^1\le 0,$$

$$\varphi_5(\bar X)=-X^2\le 0,$$

$$\varphi_6(\bar X)=-X^3\le 0,$$

$$X^4\to min.$$

Заметим, что нам не понадобится для вычислений конкретное значение $\bar A_o$, так как для алгоритма метода [2] важен лишь сам факт существования $\bar A_o>0$ такого, что область $\Omega_{\bar A_o}$ достаточно точно аппроксимирует область Ω.

Определим четвертую компоненту вектора $\bar X_o$ из уравнения $\varphi_o(\bar X)=(X_o^3)^2-X_o^4=0$. Итак, начальная точка

$$\bar X_o=(0{,}530;\ 0{,}832;\ 1{,}152;\ 1{,}326)$$

удовлетворяет предъявленным к ней требованиям (принадлежит только одному ограничению), и, следовательно, можно начать 1-й шаг.

ШАГ $k=1$. Из формулы (6),(7) для $\tau_k=1$, $\bar X_o'=\bar X_o$ имеем

$$s_1=(0;\ 0;\ -2{,}303;\ -2{,}653).$$

Так как $\lambda_1=\lambda_1^3=0{,}2898$, то $\bar X_1=(0{,}523;\ 0{,}832;\ 0{,}484;\ 0{,}558)$, $F(\bar X_1)=0{,}234$, $\varphi_1(\bar X_1)=-1{,}831$, $\varphi_2(\bar X_1)=-1{,}474$, $\varphi_3(\bar X_1)=0$, $\varphi_o(\bar X_1)=-0{,}323$.

ШАГ $k=2$. $\varphi_3(\bar X_1)=0$, значит, $\tau_2=1$. В данном случае такой же вывод следует и из предлагаемого критерия выбора существенных ограничений:

$$\max_{i \neq 3} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^i} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^6} = \frac{0,2898}{0,5} < \delta_1, \quad \delta_1 = 0,9,$$

а

$$X_1^4 / X_0^4 = 0,558/1,326 < 0,5.$$

В программе использовалось значение $\mu = 0,95$, которое обеспечивает выполнение условия $\bar{X}_k' \in \bar{\Omega}_1 (\bar{\Omega}_{\bar{A}_0})$, $k > 1$; при этом

$$\bar{X}_1' = (0,523;\ 0,832;\ 0,518;\ 0,596),$$

$$s_2 = s_2(\bar{X}_1') = (-1,373;\ 2,667;\ 0,667;\ -4,720).$$

Находим шаг вдоль направления s_2 ($\lambda_2 = \lambda_2^0 = 0,0599$) и значения ограничений: $\varphi_1(\bar{X}_2) = -1,358$, $\varphi_2(\bar{X}_2) = -1,198$, $\varphi_3(\bar{X}_2) = -0,561$, $\varphi_0(\bar{X}_2) = 0$, $F(\bar{X}_2) = 0,2747$.

ШАГ $k = 3$, $z_3 = 1$, так как $\varphi_0(\bar{X}_2) = 0$, $\delta_2 = 0,9$,

$\max\limits_{i \neq 0} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^1} = \frac{0,0599}{0,3858} < \delta_2$, а $X_2^4 / X_1^4 = 0,2747/0,558 < 0,5$.

По точке $\bar{X}_2$ было определено $s_3 = (0;\ 0;\ -1,048;\ -0,549)$, $\lambda_3 = \lambda_3^0 = 0,5$. В результате вычисления точки $\bar{X}_3 = (0,4474;\ 0,9913;\ 0;\ 0)$ обнаружилось, что значение целевой функции исходной задачи $F(X_3) = 0$, следовательно, оптимальное решение найдено:

$$X^* = (0,4474;\ 0,9913;\ 0),\quad \varphi_1(X^*) = -0,8334,$$

$$\varphi_2(X^*) = -0,8488,\quad \varphi_3(X^*) = 0,3178,\quad F(X^*) = 0.$$

Описанный алгоритм был опробован на задачах следующей размерности $n \times m$: линейное программирование – 15x5, 7x5, 30x9, 7x25, 64x17, 65x31, 7x10, квадратичное – 10x1, 11x7, 4x5. Из-за замедления сходимости через 14, 38, 57, 192, 10, 84, 7, 8, 5 шагов соответственно было осуществлено переключение на метод штрафов[ж)], кроме примера 4x5, где оптимальное решение было найдено сразу ($k = 1$). Начальная точка $\bar{X}_0$ для метода возможных направлений отыскивалась с помощью экспоненциальной функции штрафа [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если исходная точка $\bar{X}_0$ принадлежит двум ограничениям, то можно и в этом случае определить направление движения:

ж) Использовалась функция штрафа $\Phi_k(X) = \sum\limits_i A_k^i \left(\varphi_i(X) + \sqrt{\varphi_i^2(X) + A_k^{-\theta-2}}\right)$, $\theta > 0$.

$$s_1^j = -\frac{\nabla\varphi_{i1}^j(\bar X_0)}{\|\nabla\varphi_{i1}(\bar X_0)\|} - \frac{\nabla\varphi_{i2}^j(\bar X_0)}{\|\nabla\varphi_{i2}(\bar X_0)\|}, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$s_1^{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} (s_1^j)^2/2 .$$

Рассмотрим подробнее случай, когда расстояние R_k^i ищется по направлению z_k^i, не совпадающему с направлением градиента $\nabla\varphi_i(\bar X_k)$. Сравним минимальное расстояние R_k^i по направлению z_k^i, $(z_k^i, s_k) \geq 0$, с расстоянием ρ_k^i по градиенту $\nabla\varphi_i(\bar X_k)$ от точки $\bar X_k$ до гиперповерхности $G_i(\bar X)$; очевидно, что

$$R_k^i = \rho_k^i \cdot \beta_k^i, \quad 0 \leq \beta_k^i \leq 1, \quad \beta_k^i \longrightarrow 1 \qquad \text{при } k \to \infty$$

для существенных ограничений в точке $\bar X_k$.

В связи с тем, что задача определения величины β_k^i является сложной для нелинейных ограничений[ж)], попытаемся получить хотя бы грубые двухсторонние оценки. С этой целью условие существенности ($9'$) перепишем таким образом, чтобы оно явно включало и условие (9):

$$\frac{R_k^i}{\lambda_k^i} = \frac{(\lambda_k^i - \lambda_k)\gamma_k^i}{\lambda_k^i} = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_k^i}\right)\gamma_k^i \leq 1 - \delta, \quad \gamma_k^i = \frac{\rho_k^i \cdot \beta_k^i}{\lambda_k^i - \lambda_k}, \quad \lambda_k^i > 0.$$

Так как $\gamma_k^i \leq 1$, то верхняя граница величины β_k^i уточняется:

$$\beta_k^i \leq \min\left(1, \frac{\lambda_k^i - \lambda_k}{\rho_k^i}\right).$$

В то же время для несущественных ограничений справедливо следующее соотношение:

$$\frac{R_k^i}{\lambda_k^i} = \frac{\rho_k^i \cdot \beta_k^i}{\lambda_k^i} > 1 - \delta,$$

т.е. задача определения границ величины β_k^i в случае несущественных ограничений решена:

$$\frac{(1-\delta)\lambda_k^i}{\rho_k^i} < \beta_k^i \leq \min\left(1, \frac{\lambda_k^i - \lambda_k}{\rho_k^i}\right).$$

ж) Для линейных ограничений и n-мерной сферы $\beta_k^i = 1$ [9], а так как $\lambda_k^i < 0$ только для линейных ограничений, то при оценке величины β_k^i учитываются лишь $\lambda_k^i > 0$.

Из последнего соотношения можно сделать такие выводы:

I) если расстояние по направлению s_k меньше ρ_k^i, т.е. $\frac{(1-\delta)\lambda_k^i}{\rho_k^i} < \frac{\lambda_k^i - \lambda_k}{\rho_k^i}$, и если $\frac{\lambda_k}{\lambda_k^i} < \delta$, то ограничение $\varphi_i(\bar{X}) \le 0$ в точке $\bar{X}_k$ считается несущественным;

2) если $(\lambda_k^i - \lambda_k)$ меньше расстояния ρ_k^i по градиенту $\nabla\varphi_i(\bar{X}_k)$, т.е. $\frac{(1-\delta)\lambda_k^i}{\rho_k^i} < 1$, и если $\rho_k^i/\lambda_k^i > 1-\delta$, то ограничение $\varphi_i(\bar{X}) \le 0$ можно причислить к несущественным.

Следовательно, предлагаемый критерий существенности (9)-(9′) можно сформулировать иначе:

если

$$\lambda_k^i > 0 \tag{10}$$

и

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k^i} \ge \delta \quad \text{или} \quad \frac{\rho_k^i}{\lambda_k^i} \le 1-\delta \quad (\text{при } \lambda_k^i - \lambda_k \ge \rho_k^i),$$

то ограничение $\varphi_i(\bar{X}) \le 0$ считается существенным в точке $\bar{X}_k$.

К сожалению, для существенных ограничений удалось уточнить только верхнюю оценку β_k^i (из условия (9′)):

$$0 \le \beta_k^i \le \min\left(1, \frac{\lambda_k^i - \lambda_k}{\rho_k^i}, \frac{(1-\delta)\lambda_k^i}{\rho_k^i}\right) = \frac{(1-\delta)\lambda_k^i}{\rho_k^i}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вернемся к методу возможных направлений [I, 4–8] и с помощью нового способа определения существенных ограничений построим еще один прием устранения зигзагообразного движения.

Определим для $0 \le \delta < 1$ и $X_k \in \Omega$, $k \ge 1$,

$$I(X,\delta) = \{i / R_k^i / \bar{\lambda}_k^i \le 1-\delta,\ \bar{\lambda}_k^i > 0,\ (z_k^i, s_k) \ge 0\},$$

$$S'(X,\delta) = \{(s,\sigma) / \nabla\varphi_i(X)^T s + \theta_i \sigma \le 0,\ i \in I_2(X,\delta);\ a_i^T s \le 0,\ i \in I_1(X,\delta)\},$$

где

$$I_1(X,\delta) = \{i \in I(X,\delta) / \varphi_i(X) = a_i^T X + b_i\},$$

$$I_2(X,\delta) = \{i \in I(X,\delta) / \varphi_i(X) \quad \text{– нелинейная функция}\},$$

а параметр δ, как будет видно из дальнейшего, меняется следующим образом:

$$\delta_{k+1} \ge \delta_k, \quad 0 < \delta_{k+1} \le 1, \quad \delta_{k+1} \to 1.$$

Заменим конус возможных направлений $S'(X)$ в условии задачи выбора направления [I, с.100] на конус $S'(X,\delta)$. Если при этом

$\sigma_k = 0$, а $S'(X,\delta) = S'(X)$, то X_k – оптимальное решение; в противном случае значение δ_k увеличивается и повторно решается задача на $\max \sigma_k$. Здесь нужно выделить особо случай, когда s_k параллельно какой-либо гиперплоскости $\varphi_{i_0}(X) = 0$ и ограничение $\varphi_{i_0}(X) \leq 0$ считается существенным в точке X_k при любом значении δ_k. Необходимо выяснить, не является ли данное линейное ограничение причиной того, что $\sigma_k = 0$; для этого можно повторить задачу выбора направления s_{k+1} при том же δ_k, но уже без учета $\varphi_{i_0}(X) \leq 0$. Если и в этом случае $\sigma_k = 0$, то, значит, причина в других ограничениях и придется увеличивать δ_k.

Если $\sigma_k \neq 0$, то различаются 2 случая:

а) если $\sigma_k \geq 1-\delta_k$, то переходим к $(k+1)$-шагу, положив $\delta_{k+1} = \delta_k$;

б) если $\sigma_k < 1-\delta_k$, то δ_k увеличивается и заново решается задача выбора направления s_{k+1}.

Для метода возможных направлений [I, с.95] справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если в методе возможных направлений для устранения зигзагообразного движения применить прием (I0), то метод сходится к оптимальной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оговорим сразу, что параметр δ меняется по следующей формуле:

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{1-\delta_1}{2^k}, \quad \text{если } \sigma_k < 1-\delta_k \text{ или } \sigma_k = 0,$$
$$S'(X) \neq S'(X,\delta), \quad \text{а } \|s_k\| = 1, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, в этом случае $\varepsilon_k = 1-\delta_k = \varepsilon_1 \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i}\right]$. Что касается начального значения δ_1, ε_1, то можно положить

$$\delta_1 = \min_{\lambda^i_1 > 0} \lambda_1 / \lambda^i_1, \quad \varepsilon_1 = 1 - \delta_1.$$

Чтобы доказать наше утверждение, нужно показать, во-первых, что $\delta_k \to 1$ при $k \to \infty$ или, что то же самое, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Предположим противное: начиная с некоторого K_0, имеем $\varepsilon_k = \varepsilon > 0$, $k \geq K_0$. Это в свою очередь означает, что при $k \geq K_0$

$$\nabla F(X_k)^T s_k \leq -\varepsilon,$$

$$\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k \leq -\varepsilon,\ s_k \in S'(X,\delta),\ i \in I(X,\delta).$$

Учитывая равномерную непрерывность $\nabla F(X_k)^T s_k$, $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k$, $i=1,\dots,m$, на множестве $\Omega_{S_1} \times S_1$, $S_1=\{s/\|s\|=1\}$, $\Omega_{S_1}=\{z+u : z\in\Omega, u\in S_1\}$, можно указать такое $\bar\lambda>0$, что при $k \geq K_0$

$$\nabla F(X_k+\bar\lambda s_k)^T s_k \leq -\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\nabla\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k)^T s_k \leq 0,\quad i\in I(X,\delta),$$

$$|(\nabla\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k), \bar\lambda s_k)| \leq \varepsilon\cdot\alpha,\ i\bar\in I(X,\delta),\ \alpha>0$$

оценено ниже.

Покажем, что точка $X_k+\bar\lambda s_k$ при $k \geq K_0$ является допустимой для ограничений $\varphi_i(X)\leq 0$, $i=1,\dots,m$. Рассмотрим вначале доказательство для $i\in I(X,\delta)$. Из условия выпуклости $\varphi_i(X)$ имеем

$$\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k) \leq \varphi_i(X_k) + (\nabla\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k), \bar\lambda s_k) \leq 0,\ i\in I(X,\delta).$$

Для случая $i\bar\in I(X,\delta)$ схема доказательства усложняется. Выделим 2 ситуации:

1) $|\varphi_i(X_k)| \geq \varepsilon\cdot\alpha$;

2) $|\varphi_i(X_k)| < \varepsilon\cdot\alpha$.

I) Если $|\varphi_i(X_k)| \geq \varepsilon\cdot\alpha$, то сразу из условия выпуклости $\varphi_i(X)$ получаем

$$\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k) \leq \varphi_i(X_k) + (\nabla\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k), \bar\lambda s_k) \leq \varphi_i(X_k) +$$
$$+ |(\nabla\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k), \bar\lambda s_k)| < -\varepsilon\cdot\alpha + \varepsilon\cdot\alpha = 0,\ i\bar\in I(X,\delta).$$

2) Если $|\varphi_i(X_k)| < \varepsilon\cdot\alpha$, то приходится разбирать 3 случая.

2.I) $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k > 0$.

Покажем, что такого случая, когда $|\varphi_i(X_k)| < \varepsilon\cdot\alpha$, а $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k > 0$, быть не может. Для этого рассмотрим отношение $R_k^i/\bar\lambda_k^i$, которое при $i\bar\in I(X,\delta)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{R_k^i}{\bar\lambda_k^i} > 1-\delta = \varepsilon,\quad \bar\lambda_k^i > 0. \tag{II}$$

Ввиду того, что R_k^i есть расстояние от точки X_k до гиперплоскости

$$\psi_i(X) = \varphi_i(X_k) + (\nabla\varphi_i(X_k), X-X_k) = 0,\quad \psi_i(C) = 0 \tag{I2}$$

(см. рис. 2), при $X = C$

$$\|C - X_k\| = R_k^i = \frac{|\psi_i(X_k)|}{\|\nabla\varphi_i(X_k)\|}$$

($\|\cdot\|$ – знак евклидовой нормы).

Подставим в (II) найденное выражение для R_k^i :

$$\frac{R_k^i}{\bar\lambda_k^i} = \frac{|\psi_i(X_k)|}{\|\nabla\varphi_i(X_k)\|\,\bar\lambda_k^i} > \varepsilon,$$

следовательно,

$$|\psi_i(X_k)| > \varepsilon \cdot \|\nabla\varphi_i(X_k)\| \cdot \lambda_k^i > \varepsilon \cdot \varepsilon_1 \cdot \bar\lambda = \varepsilon\alpha,$$

$$\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_1 = \min_i \varepsilon_i = \min_i \|\nabla\varphi_i(X_k)\|,\ \alpha = \varepsilon_1 \cdot \bar\lambda .$$

Докажем теперь, что $|\varphi_i(X_k)| > |\psi_i(X_k)|$. Запишем очевидное соотношение для выпуклых функций

$$\varphi_i(X) \geq \varphi_i(\tilde X) + \nabla\varphi_i(\tilde X)^T(X - \tilde X), \tag{I3}$$

из которого для $\tilde X = X_k$ имеем

$$\varphi_i(X_k) \leq \varphi_i(X) - \nabla\varphi_i(X_k)^T(X - X_k).$$

Соответственно из (I2)

$$\psi_i(X_k) = \psi_i(X) - (\nabla\varphi_i(X_k), (X - X_k)) = \psi_i(C) -$$
$$- (\nabla\varphi_i(X_k),\ C - X_k) = -(\nabla\varphi_i(X_k),\ C - X_k).$$

В точке C

$$\varphi_i(X_k) \leq \varphi_i(C) - (\nabla\varphi_i(X_k),\ C - X_k),$$

поэтому $\varphi_i(X_k) \leq \varphi_i(C) + \psi_i(X_k)$, а ввиду отрицательности всех трех величин

$$|\varphi_i(X_k)| > |\psi_i(X_k)| > \varepsilon\cdot\alpha.$$

2.2) $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k < 0$. Это неравенство при $|\varphi_i(X_k)| < \varepsilon\cdot\alpha$ возможно только тогда, когда $\lambda_k^i < 0$, т.е. для линейных функций $\varphi_i(X)$. Следовательно, при любом $\bar\lambda$, $0 < \bar\lambda < +\infty$,

$$\varphi_i(X_k + \bar\lambda s_k) = \varphi_i(X_k) + (\nabla\varphi_i(X_k + \bar\lambda s_k), \bar\lambda s_k) \leq \varphi_i(X_k) \leq 0,\ i \notin I(X,\delta).$$

В случае $\lambda_k^i > 0$ аналогично п.2.I доказывается, что при $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k < 0$ выполняется неравенство $|\varphi_i(X_k)| > \varepsilon\cdot\alpha$, причем $\varphi_i(X)$ может быть только нелинейной функцией.

2.3) $(\nabla\varphi_i(X_k), s_k) = 0$. В силу критерия (I0) такое равенство при $i \notin I(X,\delta)$ возможно лишь тогда, когда $\varphi_i(X)$ –

нелинейная функция. Так же, как и в п.2.I, доказывается, что $|\varphi_i(X_k)|>\varepsilon\cdot\alpha$, если $\nabla\varphi_i(X_k)^T s_k=0$.

Итак, мы можем утверждать, что и для $i\bar{\in}I(X,\delta)$ выполняется $\varphi_i(X_k+\bar\lambda s_k)\le 0$, если $k\ge K_0$. Следовательно, точка $X_k+\bar\lambda s_k$ при $k>K_0$ является допустимой, а

$$F(X_k+\bar\lambda s_k)\le F(X_k)+(\nabla F(X_k+\bar\lambda s_k),\bar\lambda s_k)\le F(X_k)-\frac{\varepsilon\cdot\bar\lambda}{2},$$

т.е. получаем, что при $k\to\infty$ непрерывная на ограниченной области Ω функция $F(X)$ не ограничена снизу. Полученное противоречие означает, что $\varepsilon_k\to 0\,(\delta_k\to 1)$ при $k\to\infty$, т.е. процесс сходится. Остаётся лишь показать, что точка $\bar X$, к которой сходится последовательность $\{X_k\}$, является точкой минимума $F(X)$ на Ω. Предположим противное: предельная точка $\bar X$ не совпадает с точкой X^*, $F(X^*)=\min\limits_{X\in\Omega}F(X)$.

Тогда существует вектор $\bar s$ такой, что

$$(\nabla\varphi_i(\bar X),\bar s)<\bar\sigma,\quad i\in I(\bar X,0),\ \bar\sigma<0,$$
$$(\nabla F(\bar X),\bar s)<\bar\sigma.$$

Значит, при достаточно больших $\tilde k$ ($\tilde k$ - номер шага, на котором менялось значение параметра δ) вследствие непрерывности должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases}(\nabla\varphi_i(X_{\tilde k}),\bar s)<\bar\sigma/2, & i\in I(X_{\tilde k},\delta_{\tilde k}),\\ (\nabla F(X_{\tilde k}),\bar s)<\bar\sigma/2 & \text{, если } I(X_{\tilde k},\delta_{\tilde k})\subseteq I(\bar X,0).\end{cases}\tag{I4}$$

Докажем, что включение $I(X_{\tilde k},\delta_{\tilde k})\subseteq I(\bar X,0)$ верно. Предположим противное: при больших $\tilde k$ существует $i\in I(X_{\tilde k},\delta_{\tilde k})$, но $i\bar\in I(\bar X,0)$. Так как $i\bar\in I(\bar X,0)$, то $R^i_{k(\bar x)}/\lambda^i_{k(\bar x)}>0$ и при достаточно больших $\tilde k$ вследствие $\delta_k\to 1$ имеет место $R^i_{k(\bar x)}/\lambda^i_{k(\bar x)}>1-\delta_{\tilde k}$. В то же время из условия $X_k\to\bar X$ и непрерывности евклидова расстояния при больших k вытекает следующее:

$\frac{R^i_{\tilde k}}{\lambda^i_{\tilde k}}>1-\delta_{\tilde k}$, т.е. получили противоречие, которое доказывает справедливость включения $I(X_{\tilde k},\delta_{\tilde k})\subseteq I(X,0)$ при больших $\tilde k$.

Из (I4) следует, что $\sigma_{\tilde k}\le\frac{\bar\sigma}{2}<0$, что невозможно, ибо $\sigma_k\to 0$ вместе с $\varepsilon_k=1-\delta_k$ при $k\to\infty$.

Итак, теорема доказана, и новый прием (I0), проверяющий относительную близость точки X_k к границе Ω, можно использовать для предотвращения сходимости метода к локальному оптимуму.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Представляется целесообразным и в приемы Зойтендейка внести понятие относительной близости значения функции $\varphi_i(X)$ (в точке X_k) к нулю, что легко осуществимо в случае линейных ограничений: вместо проверки $|\varphi_i(X_k)| < \varepsilon_k$ делать проверку $\frac{|\varphi_i(X_k)|}{\|\nabla\varphi_i(X_k)\|} < \varepsilon_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. - М.:ИЛ, 1963.
2. ЧЕРКАНОВА Л.П. Метод штрафов и допустимое решение. - Оптимизация, 1977, вып. 19(36), с.74-80.
3. ЧЕРКАНОВА Л.П. Алгоритм решения экспоненциальной задачи. - Применение ЭВМ в оптимальном планировании и управлении, 1977, вып. 2, с.25-31.
4. ЗУХОВИЦКИЙ С.И., АВДЕЕВА Л.И. Линейное и выпуклое программирование. - М.: Наука, 1964.
5. КАПЛАН А.А. К вопросу о реализации метода возможных направлений. - Оптимизация, 1972, вып. 5(22), с. 99-105.
6. КАПЛАН А.А. Пример заедания в методе возможных направлений. - Оптимизация, 1974, вып. 14(31), с.66-70.
7. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. - М.: Наука, 1975.
8. ЧЕРКАНОВА Л.П. Конкретизация метода возможных направлений.- Применение ЭВМ в оптимальном планировании и управлении, 1977, вып. 2, с.16-24.
9. РАШЕВСКИЙ П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: Гостехиздат, 1956.

Поступила в ред.-изд. отдел
24.07.1981 г.