1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 3(20)

УДК 513.88

ПРОСТРАНСТВА БАНАХА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВЫПУКЛЫМИ ИНТЕГРАНТАМИ

А.Д. Иоффе

Введение

В работе изучается класс B -пространств, представляющих собой прямое обобщение пространств Орлича (см.[7]) и обладающих многими присущими последним свойствами. Непосредственным стимулом для настоящего исследования было желание построить удовлетворительную теорию двойственности для выпуклых многомерных вариационных задач, подобную той, что была построена в [4],[9] для одномерных. Оказывается, что такие задачи удобно рассматривать именно в пространствах описываемого ниже типа (см. [5]).

Вместе с тем, мне кажется, что последующее изложение представляет известный методический интерес даже для классической теории пространств Орлича, которая очень естественно трактуется на языке теории сопряженных выпуклых функций.

В основе приводимых здесь доказательств лежат результаты о выпуклости и измеримости, полученные в последнее время.

Приведем необходимые сведения. Пусть $f(x)$-выпуклая функция, заданная на локально выпуклом пространстве X и принимающая значения из $R \cup \{+\infty\}$ (из действительной прямой с присоединенной точкой $+\infty$). Множество

$$dom\ f = \{x \in X : f(x) < \infty\}$$

называется эффективным множеством функции f .

Функция f называется замкнутой, если она $\sigma(X, X^*)$ - полунепрерывна снизу на X (X^*- пространство, сопряженное с X, $\sigma(X, X^*)$ - топология простой сходимости на элементах X^*).

Пусть $\langle x, x^* \rangle$ - каноническая билинейная форма на $X \times X^*$. Функция

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in X\}$$

называется сопряженной к f. Сопряженная функция всегда выпукла и $\sigma(X^*, X)$-замкнута на X^*. Если f замкнута, то

$$f(x) = (f^*)^* x = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) : x^* \in X^*\}.$$

Подробней с теорией сопряженных выпуклых функций можно ознакомиться по монографии Рокафеллера [10] или на русском языке по обзорной статье [3].

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с конечной положительной мерой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f: T \times R^n \to R \cup \{+\infty\}$ называется нормальным выпуклым интегрантом, если 1) почти при каждом $t \in T$ $f_t(\cdot) = f(t, \cdot)$ выпукла и замкнута; 2) f измерима относительно σ-алгебры $\Sigma \oplus \mathfrak{A}$, порожденной произведениями $E \times A$, где $E \in \Sigma$, а A - элемент σ-алгебры $\mathfrak{A}$ борелевских подмножеств R^n.

Эквивалентное условие (эквивалентность доказана в [3] в случае, когда T - пространство Лебега в смысле Рохлина, и в [11]-в общем случае):

2') существует счетное семейство измеримых отображений $x_m(\cdot): T \to R^n$ ($m = 1, 2, \ldots$) таких, что $x_i(t) \in \operatorname{dom} f_t$ и множества $\{x \in R^n : x = x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots\}$ плотны в $\operatorname{dom} f_t$ почти при всех t.

Отметим некоторые свойства нормальных выпуклых интегрантов (см. [11]):

1) $f(t, x(t))$ измерима для всякой измеримой $x(t)$;

2) $f^*(t, y) = f_t^*(y)$ - нормальный выпуклый интегрант;

3) если а) $f(t, x)$ удовлетворяет условию 1 определения 1, б) $\operatorname{int} \operatorname{dom} f_t \neq \emptyset$ почти при всех t (int - внутренность), в) $f(t, x)$ измерима для всякого $x \in R^n$, то f - нормальный выпуклый интегрант.

Пусть f - нормальный выпуклый интегрант. Для всякой измеримой $x(t)$ положим

$$I_f(x(\cdot)) = \begin{cases} \int f(t, x(t))\,d\mu, & f^+(t, x(t)) \in L_1 \\ \infty, & f^+(t, x(t)) \bar{\in} L_1, \end{cases}$$

$$(f^+ = \max(f, 0)).$$

Пусть L – некоторое пространство измеримых отображений $T \to R^n$. Скажем, что функция I_f невырождена на L, если $|I_f(x(\cdot))| < \infty$ хотя бы для одной $x(\cdot) \in L$. Пространство L называется разложимым, если оно вместе с каждой функцией $x(t)$ содержит все функции вида $\chi_E(t)x(t)$, где χ_E – характеристическая функция множества $E \in \Sigma$. Справедлива

ТЕОРЕМА. (Рокафеллер [12]). Пусть f – нормальный выпуклый интегрант, а L и M – линейные пространства измеримых отображений $T \to R^n$, двойственные относительно билинейной формы

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int (x(t), y(t))\,d\mu,$$

(здесь $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в R^n).

Если а) I_f невырождена на L, I_{f^*} невырождена на M; б) L и M содержат все ограниченные измеримые функции, то I_f и I_{f^*} суть взаимно сопряженные выпуклые функции на L и M соответственно, т.е.

$$I_{f^*}(y(\cdot)) = \sup\{\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in L\};$$

$$I_f(x(\cdot)) = \sup\{\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle - I_{f^*}(y(\cdot)) : y(\cdot) \in M.$$

В настоящей работе рассматриваются, главным образом, симметричные нормальные выпуклые интегранты, т.е. удовлетворяющие дополнительным условиям: $f(t, x) = f(t, -x)$, $f(t, 0) = 0$. (Очевидно, свойство симметричности инвариантно относительно преобразования сопряжения, и каждый симметричный нормальный выпуклый интегрант неотрицателен). С каждой такой функцией связано некоторое B-пространство L_f измеримых отображений $T \to R^n$. Простейшими примерами таких пространств служат пространства Орлича, а также пространства L_∞ и L_1. Пространства L_f вводятся в § I, там же изучаются их простейшие свойства.

§§ 2 - 4 связаны, главным образом, с изучением пространств L^*_f, сопряженных с L_f. Линейные функционалы на L_f разлагаются в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной составляющих. Сингулярные функционалы на L_f изучаются в § 2. В § 3 рассматривается подпространство E_f, образованное ограниченными функциями, и строится его сопряженное. Наконец, в § 4 рассматривается специальный класс сингулярных функционалов - так называемые "вполне сингулярные функционалы", исчезающие на ограниченных функциях, и исследуется структура пространств L^*_f.

В § 5 изучаются функции вида $I_\varphi(x(\cdot))$ (где φ - нормальный выпуклый интегрант).

§ I. Пространства L_f

Итак, пусть $f: T \times R^n \to R \cup \{+\infty\}$ - симметричный нормальный выпуклый интегрант.

Положим

$$\mathcal{D}_f = dom\ I_f = \{x(t) : x(t) \text{ измерима}, I_f(x(\cdot)) < \infty\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. $L_f = L_f(T, \Sigma, \mu) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} m\mathcal{D}_f$.

Поскольку $\mathcal{D}_f$ — выпуклое центрально симметричное множество, L_f состоит из всех функций, пропорциональных элементам $\mathcal{D}_f$ [*]. Легко видеть, что L_f - линейное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Скажем, что f удовлетворяет

а) условию (А), если для некоторого $\varepsilon > 0$ и всякого $x \in R^n$ $|x| < \varepsilon$ ($|\cdot|$ - евклидова норма) $f(t,x)$ суммируема на T;

б) условию (В), если $f(t,x)$ суммируема для любого (т.е. $\mathcal{D}_f$ содержит все постоянные).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. *Если f удовлетворяет условию (А), то для некоторого*

---

[*] Мы отождествляем функции, отличающиеся на множествах нулевой меры.

$\delta > 0$ всякая измеримая функция $x(\cdot)$: $T \to R^n$, принимающая значения из шара радиуса δ, принадлежит множеству

$$B_f = \{x(\cdot) \in \mathcal{D}_f : I_f(x(\cdot)) \leq 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ – набор точек в R^n, удовлетворяющих следующим двум условиям:

а) $x_i(t) \equiv x_i \in \mathcal{D}_f$; $i = 1, \dots, n+1$;

б) выпуклая оболочка точек $x_1, \dots, x_{n+1}$ содержит некоторый шар с центром в нуле. Пусть $r > 0$ – радиус этого шара. Положим

$$\varphi_\alpha(t) = \max\{f(t, \alpha x_i) : i = 1, \dots, n+1\}.$$

Очевидно, $\varphi_\alpha(t) \downarrow 0$ при $\alpha \to 0$. Поэтому для некоторого $\alpha_0 > 0$, $\int \varphi_{\alpha_0}(t)\, d\mu \leq 1$. Полагая $\delta = \alpha_0 r$, получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное рассуждение доказывает, что при выполнении условия (В) $\mathcal{D}_f$ содержит все ограниченные измеримые функции.

ЛЕММА I.I. Если f и f^* удовлетворяют условию (А), то L_f и L_{f^*} находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(\cdot) \in L_f$, $y(\cdot) \in L_{f^*}$. Тогда $\pm \alpha x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$, $\pm \beta y(\cdot) \in \mathcal{D}_{f^*}$ для некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Согласно неравенству Юнга-Фенхеля и из-за симметрии $\mathcal{D}_f$,

$$(\pm \alpha x(t), \beta y(t)) \leq f(t, \alpha x(t)) + f^*(t, \beta y(t)),$$

т.е.

$$|\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle| \leq \frac{I_f(\alpha x(\cdot)) + I_{f^*}(\beta y(\cdot))}{\alpha \beta}.$$

Наконец, если $x_1(t) - x_2(t) \neq 0$ на множестве T' положительной меры $(x_i(\cdot) \in L_f)$, то для некоторого $\delta > 0$ функция

$$y(t) = \begin{cases} \delta \dfrac{x_1(t) - x_2(t)}{(x_1(t) - x_2(t))}, & t \in T', \\ 0, & t \bar{\in} T', \end{cases}$$

содержится в $\mathcal{D}_{f^*}$ и $< x_1(\cdot) - x_2(\cdot), y(\cdot) > \; > 0$. Лемма доказана.

Таким образом, (L_f, I_f) и (L_{f^*}, I_{f^*}) удовлетворяют условиям теоремы Рокафеллера, и, следовательно, I_f и I_{f^*} суть взаимно сопряженные выпуклые функции на L_f и L_{f^*} соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3. A -функцией мы будем называть симметричный нормальный выпуклый интегрант f, удовлетворяющий условию (А) вместе с f^*.

В дальнейшем, если нет специальных оговорок, мы предполагаем, что f - A -функция.

Положим

$$S_f = B^\circ_{f^*} = \{x(t) : x(t) \text{ измерима}, |< x(\cdot), y(\cdot) >| \leq 1 \; \forall y(\cdot) \in B_{f^*}\}.$$

ЛЕММА I.2. Множества B_f и S_f, поглощающие в L_f, замкнутые и ограниченные в топологии $\sigma(L_f, L_{f^*})$. При этом

$$S_f \subset B_f \subset 2 S_f. \tag{I.I}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Это включение есть частный случай доказанного Моро [8] соотношения

$$\{x : f(x) \leq \alpha\}^\circ \subset \alpha^{-1}\{y : f^*(y) \leq \alpha\} \subset 2\{x : f(x) \leq \alpha\}^\circ.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. B_f - поглощающее по определению. То же самое относится к B_{f^*}, поэтому его поляра S_f ограничена. Далее, B_f замкнуто в силу теоремы Рокафеллера, а S_f - как поляра.

Остальные утверждения следуют из (I.I).

Приведем доказательство этого соотношения. Правое включение в (I.I) тривиально: если $x(\cdot) \in B_f$, то

$$|< x(\cdot), y(\cdot) >| \leq I_f(x(\cdot)) + I_{f^*}(y(\cdot)) \leq 2$$

для всех $y(\cdot) \in B_{f^*}$.

Докажем левое включение. Пусть $x(\cdot)\in S_f$. Тогда

$$I_f(x(\cdot))=\max(\sup\{<x(\cdot),y(\cdot)>-I_{f^*}(y(\cdot)):y(\cdot)\in B_{f^*}\},$$

$$\sup\{<x(\cdot),y(\cdot)>-I_{f^*}(y(\cdot)):y(\cdot)\bar{\in} B_{f^*}\}).$$

Так как $I_{f^*}\geqslant 0$, $x(\cdot)\in S_f$, то

$$\sup\{<x(\cdot),y(\cdot)>-I_{f^*}(y(\cdot)):y(\cdot)\in B_{f^*}\}\leq 1.$$

С другой стороны, второй $\sup$ неположителен. В самом деле, пусть $<x(\cdot),y(\cdot)>-I_{f^*}(y(\cdot))>0$ для некоторого $y(\cdot)\bar{\in} B_{f^*}$ (т.е. $1<I_{f^*}(y(\cdot))<\infty$). Положим $\varphi(\alpha)=$ $=<x(\cdot),\alpha y(\cdot)>-I_{f^*}(\alpha y(\cdot))$. Эта функция вогнута по α, причем $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)>0$, т.е. $\varphi(\alpha)>0$ при всех $0<\alpha\leqslant 1$. С другой стороны, при некотором $\alpha_0\leqslant 1$, $I_{f^*}(\alpha_0 y(\cdot))=1$, т.е. $\alpha_0 y(\cdot)\in B_{f^*}$. Поэтому $\alpha_0|<x(\cdot),y(\cdot)>|\leqslant 1$, и, следовательно, $\varphi(\alpha)\leqslant 0$. Мы пришли к противоречию.

Итак, $I_f(x(\cdot))\leqslant 1$, т.е. $x(\cdot)\in B_f$. Лемма доказана.

Таким образом, B_f и S_f суть ограниченные бочки. Поэтому они порождают нормы в L_f, обозначаемые в дальнейшем $\|\cdot\|_{B_f}$ и $\|\cdot\|_{S_f}$ соответственно.

В силу (I.I) обе нормы эквивалентны, т.е. порождают одну и ту же топологию. В большинстве случаев в дальнейшем мы будем пользоваться первой нормой и писать вместо $\|\cdot\|_{B_f}$ просто $\|\cdot\|$.

Обозначим через L_1^n (соответственно L_∞^n) пространство суммируемых (соответственно измеримых ограниченных) функций $T\to R^n$ с обычной нормой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. а) $L_f\subset L_1^n$ и нормированная топология L_f сильнее топологии L_1^n; б) $L_\infty^n\subset L_f$ и нормированная топология L_f слабее топологии L_∞^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\delta>0$ таково, что $G=\{y(\cdot)\in L_\infty^n: |y(t)|\leqslant\delta$ почти везде$\}\subset B_{f^*}$ (предложение I.I). Тогда

$$\|x(\cdot)\|_{S_f}=\sup\{<x(\cdot),y(\cdot)>:y(\cdot)\in B_{f^*}\}\geqslant\sup\{<x(\cdot),y(\cdot)>:y(\cdot)\in G\}=\|x(\cdot)\|_{L_1^n}$$

б) есть просто переформулировка предложения I.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Позже (следствие 2 к теореме 5.I) будет показано, что для любой пары A-функций f_1 и f_2 выполняется $L_{f_1} \subset L_{f_2}$ тогда и только тогда, когда топология L_{f_1} сильнее топологии L_{f_2}.

ТЕОРЕМА I.I. Пространство L_f полно в нормированной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [7]). Пусть $\{x_m(\cdot)\}$ – последовательность Коши в L_f. Тогда $\{x_m(\cdot)\}$ – последовательность Коши в L_1^n, т.е. $x_m(\cdot) \to x(\cdot)$ в L_1^n. Можно считать, выбирая, если нужно, подходящую подпоследовательность, что $x_m(t) \to x(t)$ почти всюду.

Пусть $\varepsilon > 0$ и m_ε таковы, что $\|x_m(\cdot) - x_{m+p}(\cdot)\|_{B_f} < \varepsilon$ при $m \geq m_\varepsilon$, $p > 0$; тогда $I_f(\frac{1}{\varepsilon}(x_m(\cdot) - x_{m+p}(\cdot))) \leq 1$. Так как $f \geq 0$ и $\underline{\lim}\, f(t, x_m(t)) \geq f(t, x(t))$ почти везде, то по лемме Фату

$$I_f\left(\frac{x_m(\cdot) - x(\cdot)}{\varepsilon}\right) \leq \underline{\lim}_{p\to\infty} I_f\left(\frac{x_m(\cdot) - x_{m+p}(\cdot)}{\varepsilon}\right) \leq 1.$$

Отсюда следует, во-первых, что $x_m(\cdot) - x(\cdot) \in L_f$, т.е. $x(\cdot) \in L_f$, а, во-вторых, что при $\|x_m(\cdot) - x(\cdot)\| < \varepsilon$ при $m \geq m_\varepsilon$, т.е. $x_m(\cdot)$ сходятся к $x(\cdot)$. Теорема доказана.

ПРИМЕРЫ.

I. Пусть $n = 1$,

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \leq 1, \\ \infty, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Множество B_f образовано всеми измеримыми функциями, не превосходящими по модулю единицы почти при всех t. Поэтому L_f содержит все существенно ограниченные функции и только их. Если $x(\cdot) \in L_f$, то

$$\|x(\cdot)\|_{B_f} = \inf\{\alpha \in R : \frac{x(\cdot)}{\alpha} \in B_f\} = \operatorname{vrai} \sup\{|x(t)| : t \in T\},$$

т.е. $L_f = L_\infty$.

Далее, $f^*(t,x) = |x|$, $I_{f^*}(y(\cdot)) = \int |y(t)|\, d\mu$, т.е. $L_{f^*} = L_1$.

Наконец,

$$S_f = \{x(\cdot) \in L_\infty : \langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle \le 1 \ \forall y(\cdot) \in B_{f^*}\} = B_f .$$

2. Пусть $n = 1$ и $f(t, x)$ $|x|$ - N -функция, т.е.

$$f(t, x) = \int_0^{|x|} p(s)\, ds ,$$

где $p(s)$ - монотонная функция, стремящаяся к нулю при $s \to 0$ и к ∞ при $s \to \infty$. Тогда L_f есть пространство Орлича, а $\|\cdot\|_{B_f}$ и $\|\cdot\|_{S_f}$ суть нормы Люксембурга и Орлича соответственно.

§ 2. Сингулярные функционалы

Пусть M разложимое замкнутое подпространство L_f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Линейный непрерывный функционал λ , заданный на M , называется сингулярным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $G_\varepsilon(\lambda) \in \Sigma$ с мерой, не большей ε , такое, что $\langle x(\cdot), \lambda \rangle = 0$ для всякой $x(\cdot) \in M$, равной нулю на $G_\varepsilon(\lambda)$.

Семейство множеств $\{G_\varepsilon(\lambda)\}$ мы будем называть определяющим для функционала λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В этом определении можно считать, что $G_{\varepsilon_2}(\lambda) \subset G_{\varepsilon_1}(\lambda)$, если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Для всякого линейного непрерывного функционала на M положим

$$I_{f^*}^M(\lambda) = \sup\{\langle x(\cdot), \lambda\rangle - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in M\};$$

$$\|\lambda\|^M = \|\lambda\|_{S_{f^*}}^M = \sup\{\langle x(\cdot), \lambda\rangle : x(\cdot) \in M \cap B_f\};$$

$$\|\lambda\|_{B_{f^*}}^M = \sup\{\langle x(\cdot), \lambda\rangle : x(\cdot) \in M \cap S_f\}.$$

Если $M = L_f$, то индекс M вверху будет опускаться.

ЛЕММА 2.I. *Пусть M - замкнутое разложимое подпространство L_f и λ*

с и н г у л я р н ы й   ф у н к ц и о н а л   н а M.
Т о г д а

$$I^{M}_{f^*}(\lambda)=\|\lambda\|^{M}=\|\lambda\|^{M}_{B_{f^*}}=\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a(\lambda)=\sup\{<x(\cdot),\lambda>-I_f(x(\cdot)): x(\cdot)\in M\cap B_f\}.$$

Поскольку $I_f\geqslant 0$, то

$$\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}\geqslant \frac{I^{M}_{f}(\lambda)}{\|\lambda\|^{M}}\geqslant a(\lambda).$$

Докажем, что на самом деле в последнем соотношении имеет место точное равенство. Пусть $x_0(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f$ такова, что

$$<x_0(\cdot),\lambda>\geqslant\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}-\epsilon.$$

Поскольку $f(t,x_0(t))$ суммируема, то мы можем указать такое $\delta>0$, что для всякого $E\in\Sigma$, $\mu E<\delta$

$$\int_E f(t,x_0(t)\,d\mu=I_f(\chi_E\, x_0(\cdot))\leq\epsilon.$$

Поэтому если $x_1(t)=\chi_{G_\delta(\lambda)}(t)\,x_0(t)$, то $I_f(x_1(\cdot))\leq\epsilon$, и так как M разложимо, т. $x_1(\cdot)\in M\cap B_f$. Следовательно,

$$a(\lambda)\geqslant <x_1(\cdot),\lambda>-I_f(x_1(\cdot))\geqslant <x_1(\cdot),\lambda>-\epsilon=$$

$$=<x_0(\cdot),\lambda>-\epsilon\geq\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}-2\epsilon$$

и, значит. из-за произвольности

$$a(\lambda)=\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}.$$

Из доказанного следует, в частности, что для любого $\epsilon>0$

$$a(\lambda)=\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M, I_f(x(\cdot))\leq\epsilon\},$$

или, так как $\{x(\cdot)\in L_f: I_f(x(\cdot))\leq\epsilon\}\subset(1+\epsilon)S_f$,

$$a(\lambda)=\sup\{<x(\cdot),\lambda>: x(\cdot)\in M\cap B_f\cap(1+\epsilon)S_f\}.$$

откуда, из-за непрерывности λ и леммы I.2, вытекает

$$a(\lambda) = \sup \{ < x(\cdot), \lambda > : x(\cdot) \in M \cap B_f \cap S_f \} =$$

$$= \sup \{ < x(\cdot), \lambda > : x(\cdot) \in M \cap S_f \}.$$

Лемма доказана.

Пусть $G \in \Sigma$ и $\lambda \in M^*$. Ограничением λ на G мы будем называть линейный функционал λ_G на M, действующий по формуле

$$< x(\cdot), \lambda_G > = < \chi_G x(\cdot), \lambda >.$$

Очевидно, λ_G непрерывен и $\| \lambda_G \|^M \leqslant \| \lambda \|^M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть λ – сингулярный функционал на M. Скажем, что линейный функционал из M^* взаимно сингулярен с λ, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < x(\cdot), \nu_{G_\varepsilon(\lambda)} > = 0 \quad \forall x(\cdot) \in M.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть λ – сингулярный функционал на M. Если ν взаимно сингулярен с λ, то

$$I^M_{f^*}(\lambda + \nu) = I^M_{f^*}(\lambda) + I^M_{f^*}(\nu) \tag{2.1}$$

и

$$\| \lambda + \nu \|^M = \| \lambda \|^M + \| \nu \|^M. \tag{2.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1

$$I^M_{f^*}(\lambda + \nu) = \sup \{ < x(\cdot), \lambda + \nu > - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f \} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \{ < x(\cdot), \nu > - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f \} +$$

$$+ \sup \{ < x(\cdot), \lambda > - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f \} = I^M_f(\nu) + I^M_{f^*}(\lambda).$$

С другой стороны,

$$I^M_{f^*}(\lambda + \nu) \geqslant \sup \{ < x(\cdot), \nu > - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f \} +$$

$$+ \inf \{ < x(\cdot), \lambda > : x(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f \} = I^M_{f^*}(\nu) - I^M_{f^*}(\lambda).$$

Поэтому если $I_{f^*}(\nu)=\infty$ ($|I_{f^*}(\lambda)|<\infty$ в силу леммы I.2), то (2.I) верно.

Пусть $I_{f^*}(\nu)<\infty$. Тогда для любого $G\in T$, $I_{f^*}(\nu_G)\leq \leq I_{f^*}(\nu)<\infty$. Действительно,

$$I_{f^*}(\nu_G)=\sup\{<x(\cdot),\nu_G>-I_f(x(\cdot)):x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}\leq$$

$$\leq\sup\{<x(\cdot),\nu_G>-I_f(\chi_G\, x(\cdot)):x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}=$$

$$=\sup\{<x(\cdot),\nu>-I_f(x(\cdot)):x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f;x(t)=0,\ t\in G\}\leq$$

$$\leq\sup\{<x(\cdot),\nu>-I_f(x(\cdot)):x(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f\}=I_{f^*}(\nu).$$

Пусть $\delta>0$ произвольно. Выберем функцию $x_1(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f$ таким образом, чтобы

$$I^M_{f^*}(\nu)\leq\ <x_1(\cdot),\nu)-I_f(x_1(\cdot))+\delta. \tag{2.3}$$

Пусть, далее, $x_2(\cdot)\in M\cap\mathcal{D}_f$ такова, что

$$I_f(x_2(\cdot))\leq\delta;$$
$$<x_2(\cdot),\lambda>\ \geq\|\lambda\|^M-\delta=I^M_{f^*}(\lambda)-\delta. \tag{2.4}$$

Тогда, для всякого $G_\varepsilon(\lambda)$

$$<\chi_{G_\varepsilon(\lambda)}x_2(\cdot),\lambda>\ =\ <x_2(\cdot),\lambda>\ \geq I^M_{f^*}(\lambda)-\delta. \tag{2.5}$$

Выберем теперь $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$|<\chi_{G_\varepsilon(\lambda)}x_i(\cdot),\nu>|=|<x_i(\cdot),\nu_{G_\varepsilon(\lambda)}>|\leq\delta\quad(i=1,2) \tag{2.6}$$

(это возможно из-за слабой взаимной сингулярности ν и λ), и положим

$$x(t)=\chi_{T\setminus G_\varepsilon(\lambda)}(t)\,x_1(t)+\chi_{G_\varepsilon(\lambda)}(t)\,x_2(t).$$

Тогда, используя (2.3) - (2.6), получаем

$$I^M_{f^*}(\lambda+\nu)\geq\ <x(\cdot),\lambda+\nu>-I_f(x(\cdot))=$$

$$=<x_1(\cdot),\nu_{T\setminus G_\varepsilon}>+<x_2(\cdot),\nu_{G_\varepsilon}>+<x_2(\cdot),\lambda>-I_f(\chi_{T-G_\varepsilon}\,x_1(\cdot))-$$

$$-I_f(\chi_{G_\varepsilon}\,x_2(\cdot))\geq\ <x_1(\cdot),\nu>-I_f(x_1(\cdot))+<x_2(\cdot)-x_1(\cdot),\nu_{T-G_\varepsilon}>+$$

$$+ < x_2(\cdot), \lambda > - I_f(\chi_{G_\varepsilon} x_2(\cdot)) \geqslant$$

$$\geqslant I^M_{f^*}(\nu) + I^M_{f^*}(\lambda) - 5\delta,$$

откуда и следует (2.I).

Для доказательства (2.2) рассмотрим функцию $\tilde{x}_1(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f$ такую, что $\|\tilde{x}_1(\cdot)\| \leqslant 1$, $< \tilde{x}_1(\cdot), \nu > \geqslant \|\nu\|^M - \delta$. Пусть, далее, $0 < \alpha < 1$ таково, что

$$\alpha < \tilde{x}_1(\cdot), \nu > \geqslant \|\nu\|^M - 2\delta. \tag{2.7}$$

Тогда,

$$1 - I_f(\alpha \tilde{x}_1(\cdot)) = \sigma > 0.$$

Выберем, далее, $\tilde{x}_2(\cdot) \in M \cap \mathcal{D}_f$, удовлетворяющую неравенствам

$$< \tilde{x}_2(\cdot), \lambda > \geqslant \|\lambda\|^M - \sigma, \ I_f(\tilde{x}_2(\cdot)) \leqslant \sigma,$$

и число $\varepsilon > 0$ столь малое, что

$$\|\nu_{G_\varepsilon}\| < \delta. \tag{2.8}$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \alpha\, \chi_{T-G_\varepsilon}(t)\, \tilde{x}_1(t) + \chi_{G_\varepsilon}(t) x_2(t).$$

Тогда, $I_f(\tilde{x}(\cdot)) \leqslant 1$, т.е. $\|\tilde{x}(\cdot)\| \leqslant 1$ и, в силу (2.7) - (2.8),

$$\|\lambda + \nu\|^M \geqslant < \tilde{x}(\cdot), \lambda + \nu > = \alpha < \tilde{x}_1, \nu_{T-G_\varepsilon} > + < \tilde{x}_2(\cdot), \nu_{G_\varepsilon} > +$$

$$+ < \tilde{x}_2(\cdot), \lambda > = \alpha < \tilde{x}_1(\cdot), \nu > + < \tilde{x}_2(\cdot) - \alpha \quad (\cdot), \nu_{G_\varepsilon} > +$$

$$+ < \tilde{x}_2(\cdot), \lambda > \geqslant \|\nu\|^M + \|\lambda\|^M - 4\delta,$$

т.е., в силу произвольности δ , $\|\lambda + \nu\|^M \geqslant \|\lambda\|^M + \|\nu\|^M$. Обратное неравенство очевидно. Теорема доказана.

§ 3. Пространства E_f и E_f^*

Пусть X есть B -пространство, а X_1 и X_2 - его подпространства. Мы пишем $X = X_1 \oplus X_2$, если X_1 и X_2 замкнуты и каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_i \in X_i$.

Обозначим через E_f замыкание в L_f множества ограниченных функций, а через Λ совокупность сингулярных функционалов на E_f.

ТЕОРЕМА 3.1. $E_f^* = L_{f^*} \oplus \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – вложение L^n_∞ в E_f. Согласно предложению 1.2, I – непрерывное отображение, если L^n_∞ и E_f рассматриваются в нормированных топологиях.

Пусть $\lambda \in E_f^*$. Положим $\nu = \lambda \circ I$. Тогда ν – непрерывный линейный функционал на L^n_∞. По теореме Дубовицкого и Милютина [2] существуют однозначно определенные $y(\cdot) \in L^n_1$ и сингулярный функционал ν_1 на L^n_∞ такие, что $\langle x(\cdot), \nu \rangle = \langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle + \langle x(\cdot), \nu_1 \rangle$ для всякой $x(\cdot) \in L^n_\infty$.*)

Покажем, что $y(\cdot) \in L^*_\infty$. Поскольку $f \geq 0$, то для любой функции $x(\cdot) \in L_f$ выполняется $\|x(\cdot)\| = \|x(\cdot)\|_{B_f} \geq \|\chi_G x(\cdot)\|$ каково бы ни было $G \in \Sigma$. Пусть $G_\varepsilon(\nu_1)$ – определяющая система множеств для ν_1. Для $x(\cdot) \in E_f$ положим $x_\varepsilon(t) = \chi_{T \setminus G_\varepsilon}(t) x(t)$. Тогда для любой ограниченной $x(t)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\|\lambda\| \|x(\cdot)\| \geq \|\lambda\| \|x_\varepsilon(\cdot)\| \geq |\langle x_\varepsilon(\cdot), \lambda \rangle| =$$

$$= |\langle x_\varepsilon(\cdot), \nu \rangle| = \left| \int\limits_{T \setminus G_\varepsilon(\nu)} (x(t), y(t))\, d\mu \right|,$$

откуда следует, что

$$\left| \int\limits_T (x(t), y(t))\, d\mu \right| = |\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle| \leq \|\lambda\| \|x(\cdot)\|.$$

В силу теоремы Рокафеллера для любого $a > 0$

$$I_{f^*}(a y(\cdot)) = \sup\{\langle x(\cdot), a y(\cdot) \rangle - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in L^n_\infty\}.$$

Пусть $a \leq \|\lambda\|^{-1}$. Тогда.

---

*) В [2] этот результат доказан для $n = 1$, однако он очевидным образом (поскольку $L^n_\infty = R^n \otimes L_\infty$) переносится на случай произвольного n.

$$I_{f^*}(ay(\cdot)) \leq \sup\{\|x(\cdot)\| - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in L_\infty^n\} =$$

$$= \sup\{\|x(\cdot)\| - I_f(x(\cdot)) : x(\cdot) \in L_\infty^n \cap B_f\} \leq 1,$$

поскольку $I_f(x(\cdot)) \geq \|x(\cdot)\|$ при $\|x(\cdot)\| \geq 1$ (см. доказательство леммы I.2), что и требовалось.

Определим, наконец, функционал λ_1 формулой

$$< x(\cdot), \lambda_1 > = < x(\cdot), \lambda > - < x(\cdot), y(\cdot) >$$

и покажем, что он сингулярен. В самом деле, пусть $x(\cdot) \in L_\infty^n$ и $x(t) = 0$ на некотором $G_\varepsilon(\nu_1)$. Тогда $<x(\cdot),\lambda_1> = <x(\cdot), \nu_1> = 0$, т.е. λ_1 исчезает на всех ограниченных измеримых функциях, равных нулю на некотором $G_\varepsilon(\nu_1)$. Если теперь $x(t) \in E_f$ – произвольная функция, равная нулю на G_ε, и $\{x_m(t)\}$ – последовательность ограниченных функций, сильно сходящаяся к $x(t)$ в E_f, то $\chi_{G_\varepsilon(\nu_1)} x_m(t)$ сходятся сильно к $x(t)$ и, значит,

$$<x(\cdot), \lambda_1> = \lim_{m\to\infty} < \chi_{G_\varepsilon(\nu_1)} x_m(\cdot), \lambda_1 > = 0.$$

Для завершения доказательства нам осталось проверить, что L_{f^*} и Λ замкнуты в топологиях, индуцируемых в них сильной топологией E_f^*.

Пусть λ_m – последовательность сингулярных функционалов, сильно сходящаяся к некоторому $\lambda \in E_f^*$. Положим

$$G_\varepsilon(\lambda) = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{\frac{\varepsilon}{2^m}}(\lambda_m).$$

Тогда, очевидно, $\mu G_\varepsilon(\lambda) \leq \varepsilon$, и

$$< x(\cdot), \lambda > = \lim_{m\to\infty} < x(\cdot), \lambda_m > = 0$$

для всякой $x(\cdot) \in E_f$, равной нулю на $G_\varepsilon(\lambda)$, т.е. $\lambda \in \Lambda$.

Соответствующий результат для L_{f^*} вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I (ср. [7], стр. I04). П у с т ь $y(\cdot) \in L_{f^*}$. Т о г д а

$$\sup\{< x(\cdot), y(\cdot) > : x(\cdot) \in E_f \cap B_f\} = \sup\{< x(\cdot), y(\cdot) > : x(\cdot) \in B_f\}$$

(т. е. топология, индуцируемая в L_{f^*} сильной топологией E_f^*, совпадает с нормированной топологией L_{f^*}).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{x}(\cdot) \in B_f$ такова, что

$$<\bar{x}(\cdot), y(\cdot)> \geqslant \sup\{<x(\cdot), y(\cdot)> : x(\cdot) \in B_f\} - \varepsilon,$$

то для достаточно большого $N > 0$

$$<x_N(\cdot), y(\cdot)> \geqslant <x(\cdot), y(\cdot)> - \varepsilon,$$

где $x_N(t) = \chi_{G_N}(t)\, x(t)$, $G_N = \{t : |x(t)| \leqslant N\}$. Но $x_N(t) \in E_f$ и $x_N(t) \in B_f$. Доказательство закончено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если f удовлетворяет условию (B), то $E_f \subset \mathcal{D}_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство формулы 10.1 в [7], стр. 98.

ТЕОРЕМА 3.2. $E_f^* = L_{f^*}$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию (B).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f удовлетворяет условию (B). Для доказательства равенства $E_f^* = L_{f^*}$ нам достаточно проверить, что на E_f не существует ненулевых сингулярных функционалов.

Допустим противное. Тогда существуют сингулярный функционал λ и функция $x(\cdot) \in E_f$ такие, что

$$<x(\cdot), \lambda> \; > 0.$$

В силу предложения 3.2 $\alpha x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$ для всякого $\alpha > 0$. Но в этом случае (лемма 2.1)

$$\|\lambda\| > \sup\{<\alpha x(\cdot), \lambda> : \alpha > 0\} = \infty,$$

т.е. $\lambda \bar{\in} E_f^*$.

Обратно, предположим, что $E_f^* = L_{f^*}$, т.е. на E_f не существует ненулевых сингулярных функционалов. Допустим, что f не удовлетворяет условию (B). Тогда $f(t,x)$ не суммируема для некоторого $x \in R^n$. Это значит, что существует убывающая последовательность G_m измеримых подмножеств T, мера которых стремится к нулю при $m \to \infty$, такая что

$$\int_{G_m} f(t, x(t))\, d\mu = I_f(\chi_{G_m} x(\cdot)) = \infty .$$

Далее, поскольку f удовлетворяет условию (A), то существует такое число $\alpha > 0$, что $I_f(\alpha \bar{x}(\cdot)) \le 1 (\bar{x}(t) \equiv x)$

Тогда $I_f(\alpha \chi_{G_m} x(\cdot)) \le 1$ для всех m . Отсюда следует, что $\| \chi_{G_m} x(\cdot) \| \le \frac{1}{\alpha}$. С другой стороны, ясно, что $\| \chi_{G_m} x(\cdot) \| \ge 1$. Для каждого номера m пусть λ_m – непрерывный линейный функционал на E_f , удовлетворяющий следующим условиям:

а) $\| \lambda_m \| = 1$,

б) $\langle \chi_{G_m} x(\cdot), \lambda_m \rangle = \| \chi_{G_m} x(\cdot) \|$,

в) $\langle x(\cdot), \lambda_m \rangle = 0$ для всякой функции $x(t)$, равной нулю на G_m .

Последовательность $\{\lambda_m\}$ ограничена в E_f^* и, следовательно, обладает слабо предельной точкой λ . Имеем $\langle x(\cdot), \lambda \rangle = 0$ для всякой $x(\cdot) \in E_f$, исчезающей на некотором G_m .

С другой стороны,

$$\langle \bar{x}(\cdot), \lambda \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle \chi_{G_m} x(\cdot), \lambda \rangle .$$

(Этот предел существует, так как $\| \chi_{G_{m+1}} x(\cdot) \| \le \| \chi_{G_m} x(\cdot) \|$, по определению). Поэтому $1 \le \langle \bar{x}(\cdot), \lambda \rangle \le \frac{1}{\alpha}$, т.е. λ - ненулевой функционал.

Таким образом, мы построили ненулевой сингулярный функционал на E_f в противоречие с предположением. Теорема доказана.

§ 4. Вполне сингулярные функционалы. Пространство L_f^*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Линейный непрерывный функционал λ на L_f мы называем вполне сингулярным, если $\langle x(\cdot), \lambda \rangle = 0$ для всех $x(\cdot) \in E_f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Вполне сингулярный функционал сингулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ - вполне сингулярный функционал. Выберем для всякого целого m функцию $x_m(\cdot) \in B_f$ таким образом, что $\langle x_m(\cdot), \lambda \rangle \ge \| \lambda \| - \frac{\varepsilon}{2^m}$.

Выберем далее число $N(m)$ таким образом, чтобы мера множества

$$G_{m\varepsilon} = \{t : |x_m(t)| \geq N(m)\}$$

была не более $\frac{\varepsilon}{2^m}$ и $I_f(\chi_{G_{m\varepsilon}} x_m(\cdot)) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$. Положим $G_\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{m\varepsilon}$. Тогда $\mu G_\varepsilon \leq \varepsilon$.

Пусть теперь $x(\cdot) \in L_f$ и $x(t) = 0$ на G_ε. Докажем, что в этом случае $< x(\cdot), \lambda > = 0$. Допустим, наоборот, что

$$< x(\cdot), \lambda > = a > 0.$$

Можно считать, что $\|x(\cdot)\| < 1$, т.е. $I_f(x(\cdot)) = b < 1$. Пусть m таково, что $\frac{\varepsilon}{2^m} < \min(a, 1-b)$. Положим

$$\bar{x}(t) = x(t) + \chi_{G_{m\varepsilon}}(t) x(t).$$

Тогда,

$$I_f(\bar{x}(\cdot)) = I_f(x(\cdot)) + I_f(\chi_{G_{m\varepsilon}} x_m(\cdot)) \leq b + \frac{\varepsilon}{2^m} \leq 1,$$

т.е. $\|\bar{x}(\cdot)\| \leq 1$ и

$$< \bar{x}(\cdot), \lambda > = < x(\cdot), \lambda > + < \chi_{G_{m\varepsilon}} x_m(\cdot), \lambda >.$$

Но $\chi_{G_{m\varepsilon}}(t) x_m(t) = x_m(t) - (1 - \chi_{G_{m\varepsilon}}(t)) x_m(t)$ и вне $G_{m\varepsilon}$ $|x_m(t)| \leq N(m)$. Поэтому так как λ вполне сингулярен, то

$$< \chi_{G_{m\varepsilon}} x_m(\cdot), \lambda > = < x_m(\cdot), \lambda >$$

и, следовательно,

$$< \bar{x}(\cdot), \lambda > = < x(\cdot), \lambda > + < x_m(\cdot), \lambda > \geq a + \|\lambda\| - \frac{\varepsilon}{2^m} > \|\lambda\|,$$

что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть λ - линейный непрерывный функционал на L_f, имеющий сингулярное ограничение на E_f. Тогда λ сингулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что

$$\|\lambda\| = \sup\{< x(\cdot), \lambda > : x(\cdot) \in E_f \cap B_f\}, \qquad (4.1)$$

т.е. норма λ равна норме его ограничения на E_f.

Пусть функция $x(\cdot) \in E_f$ такова, что

$$\|x(\cdot)\| \leq 1, \; \langle x(\cdot), \lambda \rangle \geq \|\lambda\| - \delta, \; \delta > 0.$$

Предположим далее, что существует функция $x_1(\cdot) \in B_f$, равная нулю на некотором $G_\varepsilon(\lambda)$ и такая, что $\langle x_1(\cdot), \lambda \rangle = a > 0$ (где $G_\varepsilon(\lambda)$ – некоторое определяющее семейство множеств для ограничения λ на E_f).

Мы можем выбрать $x(\cdot)$ таким образом, что $\delta < a$. Выберем $0 < \alpha < 1$ так, что все еще $\delta < \alpha a$. Положим

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \alpha x_1(t), & t \bar{\in} G_\varepsilon(\lambda) \\ x(t), & t \in G_\varepsilon(\lambda). \end{cases}$$

Тогда при достаточно малых ε

$$I_f(x_\varepsilon(\cdot)) \leq I_f(\alpha x_1(\cdot)) + I_f(\chi_{G_\varepsilon} x(\cdot)) \leq 1,$$

т.е. $\|x_\varepsilon(\cdot)\| \leq 1$, если ε достаточно мало.

С другой стороны,

$$\langle x_\varepsilon(\cdot), \lambda \rangle = \langle \alpha x_1(\cdot), \lambda \rangle + \langle \chi_{G_\varepsilon} x(\cdot), \lambda \rangle =$$

$$= \langle \alpha x_1(\cdot), \lambda \rangle + \langle x(\cdot), \lambda \rangle \geq \alpha a + \|\lambda\| - \delta > \|\lambda\|.$$

Мы пришли к противоречию. Таким образом, при выполнении (4.I), λ сингулярен.

В общем случае пусть $\tilde{\lambda}_1$ - ограничение λ на E_f и λ_1 - продолжение $\tilde{\lambda}_1$ на L_f, имеющее ту же норму, что и $\tilde{\lambda}_1$. Тогда $\lambda = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)$. λ_1 сингулярен по доказанному, а $\lambda - \lambda_1$ - вполне сингулярный функционал. Поэтому λ сингулярен. Предложение доказано.

Обозначим через $\widetilde{\Lambda}$ множество вполне сингулярных функционалов на L_f, а через $\overline{\Lambda}$ множество тех сингулярных функционалов на L_f, нормы которых равны нормам их ограничений на E_f.

ТЕОРЕМА 4.I. $L_f^* = L_{f^*} \oplus (\widetilde{\Lambda} + \overline{\Lambda})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\lambda} \in L_f^*$. Обозначим через λ ограничение $\bar{\lambda}$ на E_f. Тогда по теореме 3.I $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, где

$$\langle x(\cdot), \lambda_1 \rangle = \langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle, \; y(\cdot) \in L_{f^*}, \; \forall x(\cdot) \in E_f,$$

а λ_2 — сингулярный функционал на E_f. Пусть $\bar{\lambda}_2$ — продолжение λ_2 на L_f такое, что $\|\bar{\lambda}_2\| = \|\lambda_2\|$, а $\bar{\lambda}_1$—функционал на L_f, действующий по формуле

$$<x(\cdot), \bar{\lambda}_1> = <x(\cdot), y(\cdot)>.$$

Поскольку $y(\cdot) \in L_{f^*}$, т.е. для некоторого $a > 0$ $I_{f^*}(ay(\cdot)) < \infty$, то неравенство

$$<x(\cdot), y(\cdot)> \leq \frac{1}{a}(I_f(x(\cdot)) + I_{f^*}(ay(\cdot)))$$

показывает, что $\bar{\lambda}_1$ непрерывен на L_f.

Положим $\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2$. Тогда $<x(\cdot), \lambda_3> = 0$ для всех $x(\cdot) \in E_f$ и, значит, $\lambda_3 \in \widetilde{\Lambda}$.

Ясно, что множество $\widetilde{\Lambda} + \bar{\Lambda}$ сингулярных функционалов на L_f замкнуто в сильной топологии L_f^* (см. теорему 3.I). Наконец, поскольку λ_1 определяется однозначно по λ, то и $\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_1$ не зависит от выбора $\bar{\lambda}_2$. Теорема доказана.

Доказанная теорема не совсем удобна именно потому, что она не дает однозначного разложения сингулярных функционалов на L_f. Не ясно, существует ли всегда такое разложение, однако в некоторых случаях, которые рассматриваются ниже, оно оказывается возможным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Скажем, что пространство L_f обладает H -свойством, если существует линейное отображение $H: \Lambda \to L_f^*$, удовлетворяющее следующим условиям:

I) H изометрично (т.е. $\|\lambda\| = \|H\lambda\|$) и взаимно однозначно;

2) H непрерывно в сильных топологиях E_f^* и L_f^*;

3) $H\lambda|_{E_f} = \lambda$.

Пусть L_f обладает H -свойством. Положим $\Lambda_H = H\Lambda$, (где Λ - множество сингулярных функционалов на E_f). В силу предложения 4.2 каждый функционал из Λ_H сингулярен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Если L_f обладает H - свойством, то

$$L_f^* = L_{f^*} \oplus \Lambda_H \oplus \widetilde{\Lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что Λ_H и $\widetilde{\Lambda}$ замкнуты в сильной топологии L_f^*. Замкнутость $\widetilde{\Lambda}$ очевидна. Пусть теперь $\lambda_m \in \Lambda_H$ и сходятся сильно к некоторому

$\bar{\lambda} \in L_f^*$. Тогда $\bar{\lambda}$ сингулярен. Обозначим через λ ограничение $\bar{\lambda}$ на E_f и $\lambda_m = H^{-1}\bar{\lambda}_m$. В силу условия 3) определения 4.2

$$<x(\cdot), \bar{\lambda}_m> = <x(\cdot), \lambda_m> \text{ для всех } x(\cdot) \in E_f .$$

Поэтому для всякого m

$$\|\lambda_m - \lambda\| = \sup\{<x(\cdot), \lambda_m - \lambda>: x(\cdot) \in B_f \cap E_f\} =$$

$$= \sup\{<x(\cdot), \bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}>: x(\cdot) \in B_f \cap E_f\} =$$

$$= \sup\{<x(\cdot), \bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}>: x(\cdot) \in B_f\} = \|\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}\|,$$

т.е. λ_m сильно сходятся к λ в E_f^* . Из-за непрерывности H λ_m сходятся к $H\lambda$, и, следовательно, $\bar{\lambda} = H\lambda \in \Lambda_H$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть каждый сингулярный функционал на E_f может быть продолжен на L_f с сохранением нормы единственным образом. Тогда L_f обладает H -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H: \Lambda \to L_f^*$ сопоставляет каждому сингулярному функционалу на E_f его продолжение (сохраняющее норму) на L_f . Тогда условия I) и 3) определения 4.2, очевидно, выполнены. Осталось доказать, таким образом, только непрерывность H .

Пусть $\lambda_m \to \lambda \in \Lambda$ $(\lambda_m \in \Lambda, m = 1, 2, \ldots)$ и $H\lambda_m \to \bar{\lambda} \in L_f^*$ в сильных топологиях E_f^* и L_f^* соответственно. Тогда

$$\|\lambda\| = \lim \|\lambda_m\| = \lim \|H\lambda_m\| - \|\bar{\lambda}\|$$

и для любой $x(\cdot) \in E_f$

$$<x(\cdot), \lambda> = \lim <x(\cdot), \lambda_m> = \lim <x(\cdot), H\lambda_m> = <x(\cdot), \bar{\lambda}>.$$

Это значит, что $\bar{\lambda}$ есть продолжение λ с E_f на L_f, сохраняющее норму. Поэтому $\bar{\lambda} = H\lambda$. Таким образом, график H замкнут и, значит, H непрерывно.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $n = 1$. Тогда L_f обладает H -свойством.

Благодаря предложению 4.4, достаточно проверить, что для каждого сингулярного функционала λ на E_f существует ровно один линейный функционал $\bar{\lambda} \in L_f^*$ такой, что $\bar{\lambda}|_{E_f} = \lambda$ и

$\|\bar{\lambda}\| = \|\lambda\|$. Сначала одно вспомогательное предложение. (Мы пишем $x(\cdot) \geq 0$, если $x(t) \geq 0$ почти всюду. Линейный функционал λ называется положительным, если $\langle x(\cdot), \lambda \rangle \geq 0$ для всякой $x(\cdot) \geq 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5 ([2], стр. 731). Пусть $n = 1$ и λ - сингулярный функционал на разложимом подпространстве $M \subset L_f$. Существуют однозначно определенные положительные сингулярные функционалы λ^+ и λ^- такие, что

а) $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$;

б) $\|\lambda\|^M = \|\lambda^+\| + \|\lambda^-\|^M$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение доказано Дубовицким и Милютиным в [2] для функционалов на L_∞. В нашем случае доказательство практически то же, и мы не будем его приводить. Отметим лишь, что функционалы λ^+ и λ^- определяются формулами :

$$\langle x(\cdot), \lambda^+ \rangle = \sup\{\langle \xi(\cdot), \lambda \rangle : 0 \leq \xi(\cdot) \leq x(\cdot), \xi(\cdot) \in M\},$$

$$\langle x(\cdot), \lambda^- \rangle = -\inf\{\langle \xi(\cdot), \lambda \rangle : 0 \leq \xi(\cdot) \leq x(\cdot), \xi(\cdot) \in M\}$$

для $x(\cdot) \geq 0$ и

$$\langle x(\cdot), \lambda^+ \rangle = \langle x^+(\cdot), \lambda^+ \rangle - \langle x^-(\cdot), \lambda^+ \rangle ;$$

$$\langle x(\cdot), \lambda^- \rangle = \langle x^+(\cdot), \lambda^- \rangle - \langle x^-(\cdot), \lambda^- \rangle$$

(где $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$ для произвольного $x(\cdot)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4.2.

I. Пусть $\bar{\lambda}$ - произвольное сохраняющее норму продолжение λ с E_f^* на L_f^*. Для всякого $x(\cdot) \in E_f$, $x(\cdot) \geq 0$

$$\langle x(\cdot), \bar{\lambda}^+ \rangle = \sup\{\langle \xi(\cdot), \bar{\lambda} \rangle : 0 \leq \xi(\cdot) \leq x(\cdot)\} = \langle x(\cdot), \lambda^+ \rangle.$$

(Легко видеть, что из $0 \leq \xi(\cdot) \leq x(\cdot)$, $x(\cdot) \in E_f$ следует, что $\xi(\cdot) \in E_f$.) и, аналогично,

$$\langle x(\cdot), \bar{\lambda}^- \rangle = \langle x(\cdot), \lambda^- \rangle.$$

Таким образом, ограничения $\bar{\lambda}^+$ и $\bar{\lambda}^-$ на E_f суть λ^+ и λ^- соответственно. Поэтому $\|\bar{\lambda}^+\| \geq \|\lambda^+\|$, $\|\bar{\lambda}^-\| \geq \|\lambda^-\|$.

С другой стороны (предложение 10),

$$\|\bar\lambda^+\| + \|\bar\lambda^-\| = \|\bar\lambda\| = \|\lambda\| = \|\lambda^+\| + \|\lambda^-\|,$$

откуда следует, что

$$\|\bar\lambda^+\| = \|\lambda^+\|, \ \|\bar\lambda^-\| = \|\lambda^-\|,$$

т. е. нам достаточно проверить, что каждый положительный функционал λ на E_f обладает единственным сохраняющим норму продолжением на L_f (которое будет необходимо положительным).

2. Пусть λ - положительный линейный функционал на E_f, $x(\cdot) \in L_f$, $\bar x(\cdot) \geq 0$. Положим

$$< \bar x(\cdot), \bar\lambda_1 > = \sup\{< \xi(\cdot), \lambda > : 0 \leq \xi(\cdot) \leq x(\cdot), \xi(\cdot) \in E_f\}$$

и $<x(\cdot), \bar\lambda_1> = < x^+(\cdot), \bar\lambda_1 > - < x^-(\cdot), \bar\lambda_1 >$ для произвольного $x(\cdot) \in L_f$.

Очевидно, $\bar\lambda$ - линейный функционал на L_f и $\|\bar\lambda_1\| = \|\lambda\|$, $<x(\cdot), \bar\lambda_1> = <x(\cdot), \lambda>$ для всех $x(\cdot) \in E_f$.

Пусть $\bar\lambda$ - другое продолжение λ на L_f, обладающее теми же свойствами. Тогда $\bar\lambda \geq \bar\lambda_1$ (т.е. $<x(\cdot), \bar\lambda_1> < <x(\cdot), \bar\lambda>$ для всех $x(\cdot) \geq 0$).

В самом деле, так как $\bar\lambda \geq 0$, то для всех $\xi(\cdot) \leq x(\cdot)$ $<x(\cdot) - \xi(\cdot), \bar\lambda> \geq 0$, т.е. $<x(\cdot), \bar\lambda> \geq <\xi(\cdot), \bar\lambda>$.

3. Итак, нужно доказать следующее: пусть λ_1 и λ_2 - положительные сингулярные функционалы на L_f, причем $\lambda_1 \geq \lambda_2$ и $\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\|$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2$. Достаточно, очевидно, проверить, что $< x(\cdot), \lambda_1 - \lambda_2 > = 0$ для всех $x(\cdot) \geq 0$.

Предположим, что существует функция $x(\cdot) \geq 0$ такая, что $\|x(\cdot)\| \leq 1$, $< x(\cdot), \lambda_1 - \lambda_2 > = \varepsilon > 0$. Выберем $\bar x(\cdot) \geq 0$ таким образом, чтобы

$$\|\bar x(\cdot)\| \leq 1, \ < \bar x(\cdot), \lambda_2 > \geq \|\lambda_2\| - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $< \bar x(\cdot), \lambda_1 > \geq \|\lambda_1\| - \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $G = \{t \in T : x(t) \geq \bar x(t)\}$. Тогда в силу следствия к предложению 2.1

$$\|\lambda_{1G}\| = \|\lambda_{2G}\|, \ \|\lambda_{1T\setminus G}\| = \|\lambda_{2T\setminus G}\|$$

и

$$< \bar x(\cdot), \lambda_{iG} > \geq \|\lambda_{iG}\| - \frac{\varepsilon}{3}; < \bar x(\cdot), \lambda_{iT\setminus G} > \geq \|\lambda_{iT\setminus G}\| - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\lambda_{1G}\| \geqslant \langle x(\cdot), \lambda_{1G} \rangle \geqslant \langle x(\cdot), \lambda_{2G} \rangle \geqslant \|\lambda_{2G}\| - \frac{\varepsilon}{3},$$

т.е.

$$\langle x(\cdot), \lambda_{2G} - \lambda_{2G} \rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

и, значит,

$$\langle x(\cdot), \lambda_{1T\setminus G} - \lambda_{2T\setminus G} \rangle \geqslant \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Положим $y(t) = \chi_{T\setminus G}(t)(\bar{x}(t) - x(t))$. Тогда $y(t) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\langle \bar{x}(\cdot) - x(\cdot), \lambda_{1T\setminus G} \rangle = \langle y(\cdot), \lambda_{1T\setminus G} \rangle \geqslant \langle \bar{x}(\cdot) - x(\cdot), \lambda_{2T\setminus G} \rangle,$$

или

$$\langle x(\cdot), \lambda_{1T\setminus G} - \lambda_{2T\setminus G} \rangle \leqslant \langle \bar{x}(\cdot), \lambda_{1T\setminus G} - \lambda_{2T\setminus G} \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|\lambda_{1T\setminus G}\| - \|\lambda_{2T\setminus G}\| + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Сравнивая с (4.2), получаем противоречие, доказывающее теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис в R^n и $\sum x^i e_i$ – разложение x по этому базису для всякого $x \in R^n$. Предположим, что $f(t,x) = \sum f_i(t, x^i)$. Тогда L_f обладает H -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_i : L_{f_i} \to L_f$ сопоставляет каждому $\xi(\cdot) \in L_{f_i}$ элемент $x(\cdot) = \pi_i \xi(\cdot) = (0, \ldots, 0, x^i(\cdot), 0, \ldots 0)$, где $x^i(\cdot) = \xi(\cdot)$ Так как $I_f(\pi_i \xi(\cdot)) = I_{f_i}(\xi(\cdot))$, то π_i суть изометрии.

Пусть $\bar{\lambda} \in L_f^*$. Положим $\bar{\lambda}_i = \pi_i^* \bar{\lambda}$ (π_i^* - отображение $L_f^* \to L_{f_i}^*$, сопряженное с π_i). Очевидны следующие утверждения: если $\bar{\lambda}$ сингулярен, то и $\bar{\lambda}_i$ сингулярны; $\bar{\lambda} = \bar{\nu}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}_i = \bar{\nu}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Далее, равенство $I_f(x(\cdot)) = \sum I_f(\pi_i x^i(\cdot)) = \sum I_f(x^i(\cdot))$ влечет за собой,

$$E_f = \pi_1 E_{f_1} \oplus \ldots \oplus \pi_n E_{f_n}; \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \times \ldots \times \mathcal{D}_{f_n}.$$

Пусть теперь M_i - замкнутое разложенное подпространство L_{f_i}, $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$. В силу леммы 2.I, если λ - сингулярен на M, то

$$\|\lambda\|^M = \sup\{<x(\cdot),\lambda> : x(\cdot)\in \mathcal{D}_f \cap M\} =$$

$$= \sum \sup\{<\pi_i x^i(\cdot),\lambda> : x(\cdot)\in \mathcal{D}_{f_i} \cap M\} =$$

$$= \sum \sup\{<x^i(\cdot),\pi_i^*\lambda> : x^i(\cdot)\in \mathcal{D}_{f_i} \cap M_i\} = \sum \|\lambda_i\|^M.$$

Предположим теперь, что λ - сингулярный функционал на E_f и $\bar{\lambda}$ - его продолжение на L_f с $\|\bar{\lambda}\| = \|\lambda\|$. Если $x(\cdot)\in E_f$, то $x^i(\cdot)\in E_{f_i}$, $\pi_i x^i(\cdot) \in E_f$ и

$$<x^i(\cdot),\lambda_i> = <\pi_i x^i(\cdot),\lambda> = <\pi_i x^i(\cdot),\bar{\lambda}> = <x^i(\cdot),\bar{\lambda}_i>,$$

т.е. $\bar{\lambda}_i$ есть продолжение λ_i с E_{f_i} на L_{f_i}. Поэтому $\|\bar{\lambda}_i\| \geq \|\lambda_i\|$.

С другой стороны, в силу (4.3)

$$\|\bar{\lambda}\| = \sum \|\bar{\lambda}_i\| \geq \sum \|\lambda_i\| = \|\lambda\| = \|\bar{\lambda}\|,$$

т.е. $\|\bar{\lambda}_i\| = \|\lambda_i\|$ для всех i. Но по теореме 4.2 на L_{f_i} существует ровно один сингулярный функционал, совпадающий с λ_i на E_{f_i} и имеющий ту же норму, что и λ_i.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть* $f(t,x) = f(x)$ (*т. е. не зависит от* t). *Тогда* L_f *обладает* H-*свойством*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathrm{dom}\, f = \{x\in R^n : f(x) < \infty\}$. Возможны три случая:

а) $\mathrm{dom}\, f$ - ограниченное множество. Тогда всякая функция из $\mathcal{D}_f$ существенно ограничена и, значит, $L_f = E_f$.

б) $\mathrm{dom}\, f = R^n$. Тогда f обладает свойством (B) и, значит, (теорема 3.2), на E_f не существует ненулевых сингулярных функционалов, т.е. теорема верна и в этом случае.

в) $\mathrm{dom}\, f \neq R^n$ и не ограничено. Пусть K - асимптотический конус $\mathrm{dom}\, f$, т.е.

$$K = \{x\in R^n : x + \mathrm{dom}\, f \subset \mathrm{dom}\, f\}.$$

Поскольку f симметрична, то K - подпространство R^n. Обозначим через N его ортогональное дополнение

$$N = K^{\perp} = \{x\in R^n : <x,u> = 0 \ \ \forall u\in K\}.$$

Мы будем обозначать через u и v проекции вектора $x \in R^n$ на K и N соответственно. Положим $N_f = N \cap dom f$. По определению $\{0\} \subset N_f$ и N_f ограничено. Это значит, что из $x(\cdot) = u(\cdot) + v(\cdot) \in L_f$ следует, что $v(t)$ существенно ограничена, т.е. содержится в $E_f \subset L_f$, и, следовательно, $u(\cdot) = x(\cdot) - v(\cdot) \in L_f$ и если $x(\cdot) \in E_f$, то и $u(\cdot) \in E_f$.

Пусть λ – сингулярный функционал на E_f. Тогда

$$< x(\cdot), \lambda > = < u(\cdot), \lambda > + < v(\cdot), \lambda > .$$

Но $< u(\cdot), \lambda > = 0$. В самом деле, если $\varphi(\cdot)$ – ограничение f на K, то из $u(\cdot) \in L_f$ следует, что $u(\cdot) \in L_\varphi$. Но φ удовлетворяет условию (B), откуда и следует, что $< u(\cdot), \lambda > = 0$.

Итак, $< x(\cdot), \lambda > = < v(\cdot), \lambda >$ для всех $x(\cdot) \in E_f$. Если $x(\cdot) \in L_f$, то, как уже указывалось, $v(\cdot) \in E_f$. Определим $\bar{\lambda} = H\lambda$ следующим образом

$$< x(\cdot), \bar{\lambda} > = < v(\cdot), \lambda >, \quad x(\cdot) \in L_f .$$

Построенное таким образом отображение H очевидным образом удовлетворяет всем условиям определения 4.2. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. П у с т ь $f(t,x) = h(t) g(x)$, г д е $h(t)$ и $h^{-1}(t)$ с у м м и р у е м ы. Т о г д а L_f о б л а д а е т H - с в о й с т в о м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d\mu_1 = h(t) d\mu$, рассмотрим пространство $L_g(T, \Sigma, \mu_1)$ и применим теорему 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 2. П у с т ь $T = \bigcup_{K=1}^{m} T_K$, $T_K \cap T_j = \phi$ и $f(t,x) = \sum \chi_{T_K}(t) f_K(x)$. Т о г д а L_f о б л а д а е т H - с в о й с т в о м.

§ 5. Выпуклые интегранты на L_f

Пусть $\varphi(t,x)$ - нормальный выпуклый интегрант. В этом параграфе рассматриваются функции вида $x(\cdot) \longmapsto I_\varphi(x(\cdot))$ на пространствах L_f. Доказываются критерии непрерывности I_φ и ее ограниченности на единичной сфере B_f. Из них, в свою очередь, выводятся некоторые результаты, касающиеся свойств самих пространств L_f (вложение, условия рефлексивности и т. д.).

Всюду в этом параграфе предполагается, что мера μ непрерывна (т.е. каждое множество положительной меры содержит подмножество половинной меры).

ЛЕММА 5.I. Пусть $\psi \geqslant 0$ - нормальный выпуклый интегрант, $\varphi : T \times R^n \to R \cup \{+\infty\}$, $\Sigma \oplus \mathcal{B}$ - измерима и полунепрерывна снизу по x и $\varphi(t,0) = \psi(t,0) = 0$. Предположим, что существует $\varepsilon \leqslant 1$ такое, что $I_\varphi(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon$ лишь только $I_\psi(x(\cdot)) \leqslant 1$. Тогда существует суммируемая действительная функция $\tau(t)$ такая, что

$$\varphi(t,x) \leqslant \psi(t,x) + \tau(t)$$

при всех t и почти всех x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что

$$I_\varphi(x(\cdot)) \leqslant I_\psi(x(\cdot)) + \varepsilon \tag{5.I}$$

для всех измеримых $x(t)$.

Неравенство (5.I) очевидно, если $I_\psi(x(\cdot)) \leqslant 1$ (поскольку $\psi \geqslant 0$), или если $I_\psi(x(\cdot)) = \infty$. Предположим, что $1 < I_\psi(x(\cdot)) < \infty$. Поскольку мера μ непрерывна, мы можем разбить T на непересекающиеся множества T_i, $i = 1, \dots, k+1$, таким образом, чтобы

$$I_\psi(\chi_{T_i} x(\cdot)) = \int_{T_i} \psi(t, x(t))\, d\mu = 1 \, (i = 1, \dots, k);$$

$$I_\psi(\chi_{T_{k+1}} x(\cdot)) \leqslant 1.$$

Тогда, в силу условия леммы,

$$I_\varphi(\chi_{T_i} x(\cdot)) = \int_{T_i} \varphi(t, x(t))\, d\mu \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Имеем

$$I_\varphi(x(\cdot)) - I_\psi(x(\cdot)) = \sum_{i=1}^{k+1} \left(I_\varphi(\chi_{T_i} x(\cdot)) - I_\psi(\chi_{T_i} x(\cdot)) \right) \leqslant$$

$$\leqslant I_\varphi(\chi_{T_{k+1}} x(\cdot)) - I_\psi(\chi_{T_{k+1}} x(\cdot)) \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось.

Для дальнейшего нам понадобятся два вспомогательных предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Существует последовательность измеримых функций $x_1(t),\dots,x(m),\dots$ такая, что

а) $\Psi(t,x_m(t))$ суммируемы для всех m;

б) почти при всех t множества $\{x\in R^n: x=x_m(t),\ m=1,2,\dots\}$ плотны в $\mathrm{dom}\,\Psi_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование последовательности измеримых функций $\tilde{x}_m(t)$, принимающих значения в $\mathrm{dom}\,\Psi_t$ и удовлетворяющих условию б), следует из описания нормальных выпуклых интегрантов.

Для каждых натуральных m и k выберем множество T_{mk} таким образом, чтобы $\mu T_{mk}\geqslant \mu T-\frac{1}{mk}$ и $\Psi(t,\tilde{x}_m(t))$ была суммируемой на T_{mk}. Это возможно, поскольку $\Psi(t,\tilde{x}_m(t))$ почти всюду конечны в силу выбора $\tilde{x}_m(t)$. Положим

$$x_{mk}(t)=\begin{cases} x(t), & t\bar{\in} T_{mk},\\ \tilde{x}_m(t), & t\in T_{mk}.\end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что построена требуемая последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $h(x)$ и $g(x)$ – выпуклые замкнутые функции в R^n. Пусть далее $x_1,\dots,x_m,\dots$ – счетное плотное подмножество $\mathrm{dom}\,g$. Тогда

$$\sup\{h(x)-g(x): x\in \mathrm{dom}\,g\}=$$
$$=\sup\{h(x_m)-g(x_m): 1\leqslant m<\infty\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,g\neq\emptyset$. В противном случае все рассмотрение можно вести в пространстве меньшей размерности. Предположим для простоты, что $0\in \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,g$.

Пусть $x_0\in \mathrm{dom}\,g$; причем x_0 произвольно, если $\mathrm{dom}\,g\subset \mathrm{dom}\,h$ и $x_0\in \mathrm{dom}\,g\setminus \mathrm{dom}\,h$, если последнее множество не пусто.

Рассмотрим отрезок

$$[0,x_0]=\{x\in R^n: x=\alpha x_0,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}.$$

Функция $g(x)$ непрерывна на $[0, x_0]$, а $h(x)$ полунепрерывна снизу (h и g замкнуты, а g, кроме того, конечна в концах отрезка). Поэтому, если $h(x_0) < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $0 \leq \alpha < 1$ такое, что

$$h(\alpha x_0) - g(\alpha x_0) \geq h(x_0) - g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Соответственно, если $h(x_0) = \infty$, для любого $N > 0$ найдется $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $h(\alpha x_0) - g(\alpha x_0) \geq 2N$).

Но $\alpha x_0 \in \mathrm{int}\, \mathrm{dom}\, g$. Поэтому, так как g непрерывна на $\mathrm{int}\, \mathrm{dom}\, g$, а h полунепрерывна снизу, найдется такая окрестность U точки αx_0, что

$$h(x) - g(x) \geq h(\alpha x_0) - g(\alpha x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(соответственно, $h(x) - g(x) \geq N$) для всех $x \in U$.

Если теперь $x_m \in U$, то

$$h(x_m) - g(x_m) \geq h(x_0) - g(x_0) - \varepsilon$$

(соответственно, $h(x_m) - g(x_m) \geq N$).

Поэтому при $\mathrm{dom}\, g \subset \mathrm{dom}\, h$

$$\sup\{h(x_m) - g(x_m) : m = 1, 2, \ldots\} \geq \sup\{h(x) - g(x) : x \in \mathrm{dom}\, g\} - \varepsilon,$$

если же $\mathrm{dom}\, g - \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$, то

$$\sup\{h(x_m) - g(x_m) : m = 1, 2, \ldots\} \geq N.$$

Отсюда, в силу произвольности ε и N, следует требуемый результат.

Вернемся к доказательству леммы.

Пусть $x_1(t), \ldots, x_m(t), \ldots$ – последовательность измеримых функций, удовлетворяющих предложению 5.I. Согласно предложению 5.2

$$r(t) = \sup\{\varphi(t, x) - \psi(t, x) : x \in \mathrm{dom}\, \psi_t\} =$$

$$= \sup\{\varphi(t, x_m(t)) - \psi(t, x_m(t)) : m = 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, $r(t) \geq \varphi(t, \bar{x}(t)) - \psi(t, \bar{x}(t))$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что $r(t)$ суммируема, т.е. что $\int_T r(t)\, d\mu < \infty$.

Допустим, что это не так. Положим

$$r_m(t) = \sup\{\varphi(t, x_k(t)) - \psi(t, x_k(t)) : 1 \le k \le m\}.$$

Последовательность $r_m(t)$, возрастая, сходится к $r(t)$. Поэтому для заданного $N > \varepsilon$ найдется такой номер $m(N)$, что $\int_T r_{m(N)}(t)\, d\mu \ge N$.

Пусть для $1 \le m \le m(N)$

$$T_m = \{t \in T : \varphi(t, x_m(t)) - \psi(t, x_m(t)) = r_{m(N)}(t)\}.$$

Положим

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in T_1, \\ x_2(t), & t \in T_2 \setminus T_1, \\ \ldots & \\ x_{m(N)}(t), & t \in T_{m(N)} \setminus \bigcup_{m=1}^{m(N)-1} T_m. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(t, x(t))$ суммируема и

$$I_\varphi(x(\cdot)) \ge I_\psi(x(\cdot)) + N > I_\psi(x(\cdot)) + \varepsilon$$

в противоречии с (5.I). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если функция $\bar{x}(t)$ ограничена, то утверждение леммы остается в силе при более слабых предположениях. Именно, справедлива

ЛЕММА 5.I. *Пусть φ, ψ и ε удовлетворяют условиям леммы 5.I. Если $I_\varphi(x(\cdot)) \le \varepsilon$ для всякой измеримой ограниченной функции $x(t)$, для которой $I_\psi(x(\cdot)) \le 1$, то*

$$\varphi(t, x) \le \psi(t, x) + r(t), \quad r(\cdot) \in L_1$$

для всех $x \in R^n$ и почти всех $t \in T$.

Доказательство леммы в точности повторяет доказательство леммы 5.I. Достаточно лишь заметить, что в предложении 5.I все функции могут считаться ограниченными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если мера μ не непрерывна, то лемма 5.I, вообще говоря, не верна. Противоречащий пример: $n = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varphi(t, x) = x^2$, $\psi(t, x) = |x|$, T состоит из одной точки, мера которой равна I.

Пусть теперь f - A-функция, φ - нормальный выпуклый интегрант.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть $x(\cdot)\in L_f$ и $\|I_\varphi(x(\cdot))\|<\infty$. Следующие условия эквивалентны:

I) I_φ (сильно) непрерывна на L_f в точке $x_o(\cdot)$;

2) Существуют число $\kappa>0$ и суммируемая функция $\tau(t)$ такие, что

$$\varphi(t,x_o(t)+x)\le f(t,\tfrac{x}{\kappa})+\tau(t)$$

для всех $x\in R^n$ и почти всех $t\in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $x_o(t)\equiv 0$ и $\varphi(t,0)\equiv 0$, иначе, мы можем вместо φ рассмотреть функцию $\varphi(t,x+x_o(t))-\varphi(t,x_o(t))$.

Пусть выполнено I). Тогда существует $\kappa>0$ такое, что $I_\varphi(x(\cdot))\le 1$ при $\|x(\cdot)\|\le\kappa$, т.е. при $I_f(\frac{x(\cdot)}{\kappa})\le 1$. Положим $f_1(t,x)=f(t,\frac{x}{\kappa})$. Применяя к функциям φ и f_1 лемму 5.I, получаем 2).

Обратно, пусть выполнено 2). Тогда при $\|x(\cdot)\|\le\kappa$

$$I_\varphi(x(\cdot))\le I_f\left(\frac{x(\cdot)}{\kappa}\right)+\int\tau(t)\,d\mu\le 1+\int\tau(t)\,d\mu,$$

т.е. I_φ ограничена сверху на шаре радиуса κ и, значит, непрерывна в нуле. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Утверждение теоремы остается в силе, если всюду в формулировке заменить L_f на E_f. Для доказательства нужно вместо леммы 5.I применить лемму 5.I.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если

$$f(t,x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ \infty, & |x|>1,\end{cases}$$

т.е. $L_f=L^n_\infty$, теорема сразу следует из предложения I.2 (даже без предположения о непрерывности меры). В данном случае этот результат может быть значительно усилен (см. [II], теорема 3).

Приводимые ниже следствия из теоремы 5.I связаны с изучением самих пространств L_f.

Пусть f_1 и f_2 – симметричные нормальные выпуклые интегранты. Мы пишем $f_1\prec f_2$, если для некоторых $\kappa>0$ и суммируемой функции $r(t)$

$$f_1(t,x) \le f_2(t,\tfrac{x}{k}) + r(t).$$

Если $f_1 \prec f_2$ и $f_2 \prec f_1$, то мы говорим, что f_1 и f_2 эквивалентны, и пишем $f_1 \sim f_2$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть f_1 и f_2 – A-функции. Тогда следующие условия эквивалентны:

I) $f_1 \prec f_2$;

2) $f_2^* \prec f_1^*$;

3) $L_{f_2} \subset L_{f_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность I) и 2) проверяется непосредственным вычислением сопряженных функций. Импликация I)$\Longrightarrow$3) тоже очевидна.

Докажем, что 3) влечет I). Рассмотрим пространства L_{f_2} и $L^*_{f_2}$. В силу теоремы Рокафеллера I_{f_1} и I_{f_2} суть сопряженные выпуклые функции на L_{f_1} и $L_{f_2^*}$ соответственно. Поэтому I_{f_1} полунепрерывна снизу относительно топологии $\sigma(L_{f_2}, L_{f_2^*})$. Эта топология слабее нормированной топологии L_{f_2} (так как $L_{f_2^*} \subset L^*_{f_2}$), и, значит, I_{f_1} сильно полунепрерывна снизу в L_{f_2}.

Поэтому множество

$$B = \{x(\cdot) \in L_{f_2} : I_{f_1}(x(\cdot)) \le 1\}$$

замкнуто. Далее, B, очевидно, выпукло и центрально симметрично. Наконец, B – поглощающее множество. Действительно, если $x(\cdot) \in L_{f_2}$, то $x(\cdot) \in L_{f_1}$ по условию и, следовательно, для некоторого $\alpha > 0$ $I_{f_1}(\alpha x(\cdot)) \le 1$.

Таким образом, B – бочка и, значит, содержит некоторую окрестность нуля [I] . Последнее означает, что I_{f_1} сильно непрерывна на $\operatorname{int} B$, т.е., согласно теореме 5.I,

ЗАМЕЧАНИЕ. Примененный к N-функциям [7], этот результат дает известный критерий вложимости одного пространства Орлича в другое.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть f_1 и f_2 суть A-функции. Следующие условия эквивалентны:

1) $f_1 \sim f_2$;

2) $L_{f_1} = L_{f_2}$ (как множества);

3) $L_{f_2} \subset L_{f_1}$ и тождественный оператор $I : L_{f_1} \to L_{f_2}$ отображает L_{f_2} на замкнутое подпространство L_{f_1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация I)$\Longrightarrow$2) вытекает из предыдущего следствия; 2)$\Longrightarrow$3) очевидна.

Осталось проверить, что из 3) следует I). В силу следствия 2, $f_1 \prec f_2$. Докажем справедливость обратного отношения.

Пусть $\widetilde{L}_{f_2} = IL_{f_2}$, т.е. $\widetilde{L}_{f_2}$ совпадает по составу элементов в L_{f_2} , но наделено нормированной топологией L_{f_1} . Поскольку $\widetilde{L}_{f_2}$ по условию замкнуто в L_{f_1}, оно есть банахово пространство. Множество IB_{f_2} есть бочка в $\widetilde{L}_{f_2}$. (В доказательстве нуждается лишь замкнутость IB_{f_2} , которая сразу следует из очевидного равенства

$$IB_{f_2} = \{x(\cdot) \in L_{f_1} : I_{f_2}(x(\cdot)) \leq 1\},$$

и вытекающей из теоремы Рокафеллера сильной полунепрерывности I_{f_2} на L_{f_1}).

Таким образом, IB_{f_2} есть окрестность нуля в $\widetilde{L}_{f_2}$ и, значит, I_{f_2} непрерывна на $\widetilde{L}_{f_2}$ в нуле. Но всякая ограниченная функция содержится в L_{f_2} и, следовательно, в $\widetilde{L}_{f_2}$. Поскольку последнее замкнуто, $E_{f_1} \subset \widetilde{L}_{f_2}$, т.е. I_{f_2} непрерывна на E_{f_1} . Поэтому (см. замечание после теоремы 5.I), $f_2 \prec f_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В 3) вместо замкнутости IL_{f_2} можно потребовать, чтобы I было гомеоморфизмом, или чтобы график I был замкнут.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть f - A -функция, а φ - нормальный выпуклый интегрант. Положим

$$\check{\varphi}(t,x) = \max(\varphi(t,x), \varphi(t,-x));$$

$$\hat{\varphi}(t,x) = \overline{co}\, \min(\varphi(t,x), \varphi(t,-x))$$

(через $\overline{co}\, g$ обозначается наибольшая выпуклая замкнутая функция, не превосходящая g). Тогда следующие условия эквивалентны:

1) I_φ и I_{φ^*} непрерывны в нулях пространств L_f и L_{f^*} соответственно;

2) $\check{\varphi} \sim \hat{\varphi} \sim f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I)$\Longrightarrow$2). В силу теоремы

$$\varphi(t,x) \le f(t,\tfrac{x}{K_1}) + r_1(t);$$

$$\varphi^*(t,y) \le f^*(t,\tfrac{y}{K_2}) + r_2(t). \tag{5.2}$$

Из второго неравенства следует, что

$$\varphi(t,x) = \sup\{(x,y) - \varphi^*(t,y) : y \in R^n\} \geq$$
$$\geq \sup\{(x,y) - f^*(t,\tfrac{y}{K_2}) : y \in R^n\} - r_2(t) =$$
$$= f(t, K_2 x) - r_2(t).$$

Используя симметричность f , получаем из первого неравенства (5.2) и (5.3)

$$\varphi(t,-x) \le f(t,\tfrac{x}{K_1}) + r_1(t);$$

$$\varphi(t,-x) \geq f(t,K_2 x) - r_2(t).$$

Таким образом,

$$f(t,\tfrac{x}{K_1}) + r_1(t) \geq \check{\varphi}(t,x) \geq \hat{\varphi}(t,x) \geq$$
$$\geq f(t,K_2 x) - r_2(t),$$

откуда следует 2).

2)$\Longrightarrow$I). Если $\hat{\varphi} \sim f$, то $I_{\check{\varphi}}$ непрерывна на L_f . Поэтому, так как $I_\varphi \le I_{\check{\varphi}}$, либо I_φ непрерывна на L_f , либо $I_\varphi = -\infty$ на $\mathrm{dom}\, I_{\check{\varphi}}$.

С другой стороны, поскольку $\check{\varphi} \sim f$ и $(\hat{\varphi})^* = \check{\varphi}^*$ (см. [3]), $I_{\check{\varphi}^*}$ непрерывна на L_{f^*} в нуле (следствие 2) и, следовательно, либо I_{φ^*} непрерывна, либо $I_{\varphi^*} = -\infty$ на $\mathrm{dom}\, I_{\check{\varphi}^*}$.

Однако если $I_\varphi = -\infty$ или $I_{\varphi^*} = -\infty$ хотя бы в одной точке, то или $I_{\varphi*} = I_{\varphi}^{*} = \infty$, или $I_{\varphi} = I_{\varphi*}^{*} = \infty$, но ни то, ни другое невозможно.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть f - A-функция, φ - нормальный выпуклый интегрант и $|I_{\varphi}(0)| < \infty$. Следующие условия эквивалентны:

1) I_{φ} ограничена сверху на B_f;

2) I_{φ} ограничена сверху на некотором множестве

$$\{x(\cdot) \in L_f : I_f(x(\cdot)) \le \alpha\}, \ \alpha > 0;$$

3) $\varphi(t, x(t))$ суммируема, если суммируема $f(t, x(t))$;

4) существуют $\kappa > 0$ и суммируемая функция $r(t)$ такие, что $\varphi(t,x) \le \kappa f(t,x) + r(t)$ для всех $x \in R^n$ и почти всех $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $\kappa > 0$,

$$\frac{1}{\kappa} \ge \sup\{|I_{\varphi}(x(\cdot))| : x(\cdot) \in B_f\}.$$

Тогда $\frac{1}{\kappa} I_{\varphi}(x(\cdot)) = I_{\frac{\varphi}{\kappa}}(x(\cdot)) \le 1$, если $I_f(x(\cdot)) \le 1$.

Применяя лемму 5.1 к функциям $\frac{\varphi}{\kappa}$ и f, получаем, что для некоторой суммируемой функции $r(t)$

$$\frac{1}{\kappa} \varphi(t,x) \le f(t,x) + r(t).$$

4) $\Longrightarrow$ 3). Для всякой $x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$

$$I_{\varphi}(x(\cdot)) \le \kappa I_f(x(\cdot)) + \int r(t)\,d\mu < \infty. \qquad (5.4)$$

Если же $I_{\varphi}(x(\cdot)) = -\infty$ для некоторой $x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$, то, в силу выпуклости I_{φ} и суммируемости $\varphi(t,0)$, $I_{\varphi}(-x(\cdot)) = \infty$ в противоречие с (5.4). Таким образом, $|I_{\varphi}(x(\cdot))| < \infty$ на $\mathcal{D}_f$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Если $\frac{1}{\kappa}$ есть верхняя грань значений I_{φ} на множестве $\{x(\cdot) \in L_f : I_f(x(\cdot)) \le \alpha\}$, то $\frac{1}{\kappa} I_{\varphi}(x(\cdot)) \le 1$, лишь только $\frac{1}{\alpha} I_f(x(\cdot)) \le 1$. Применяя неравенство (5.1) (см. начало доказательства леммы 5.1) к функциям $\frac{\varphi}{\kappa}$ и $\frac{1}{\alpha}$, получаем, что

$$\frac{1}{k} I_\varphi(x(\cdot)) \le \frac{1}{\alpha} I_f(x(\cdot)) + 1$$

для всех $x(\cdot) \in L_f$, т.е. I_φ ограничена на единичной сфере L_f.

3)$\Longrightarrow$2). Мы докажем эту импликацию, сначала предполагая, что п. в.

$$\{x \in R^n : f(t,x) = 0\} = \{0\}. \tag{5.5}$$

Докажем предварительно одно вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть выполнено условие 3) теоремы и (5.5). Предположим, кроме того, что f удовлетворяет условию (A). Если I_φ не ограничена сверху на каждом множестве

$$\{x(\cdot) \in L_f : I_f(x(\cdot)) \le \alpha\},\ \alpha > 0,$$

то для любых $\varepsilon > 0$, $N > 0$ найдутся измеримое множество $T_\varepsilon \subset T$ и функция $x_\varepsilon(\cdot) \in L_f$ такие, что

а) $\mu T_\varepsilon = \varepsilon$;

б) $x_\varepsilon(t) = 0$ вне T_ε ;

в) $I_f(x_\varepsilon(\cdot)) \le \varepsilon$;

г) $\int\limits_{T_\varepsilon} \varphi(t, x_\varepsilon(t))\, d\mu \ge N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует последовательность $\{x_m(\cdot)\}$ элементов L_f такая, что $I_f(x_m(\cdot)) \to 0$, $I_\varphi(x_m(\cdot)) \to \infty$. Поскольку $f \ge 0$, $f(t, x_m(t)) \to 0$ по мере. Не теряя общности, можно считать, что $f(t, x_m(t)) \to 0$ почти всюду. В силу (5.5) отсюда следует, что $x_m(t) \to 0$ почти всюду. По теореме Егорова и так как мера μ непрерывна для любого $\varepsilon > 0$, найдется множество T_ε с мерой, равной ε, вне которого $x_m(t) \to 0$ равномерно.

Выберем $n+1$ точку $x_1, \dots, x_{n+1}$ из R^n так, чтобы $f(t, x_k)$ были суммируемы и выпуклая оболочка этих точек содержала шар некоторого радиуса $\delta > 0$. Тогда $\varphi(t, x_k)$ суммируемы по условию, значит, суммируема и функция

$$p(t) = \max\{|\varphi(t, x_k)| : 1 \le k \le n+1\}.$$

Положим $N_1 = \int p(t)d\mu$.

Заметим еще, что в силу выпуклости φ для всякой измеримой функции $x(t)$, принимающей значения в шаре радиуса δ, при почти всех $t \in T$: $\varphi(t, x(t)) \le p(t)$.

Выберем номер $m(\varepsilon)$ таким образом, чтобы при $m \ge m(\varepsilon)$ $I_f(x_m(\cdot)) \le \varepsilon$, $I_\varphi(x_m(\cdot)) \ge N + N_1$, $|x_m(t)| < \delta$, если $t \in T_\varepsilon$. Положим

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_{m(\varepsilon)}(t), & t \in T_\varepsilon, \\ 0, & t \in T_\varepsilon. \end{cases}$$

Функция $x_\varepsilon(t)$ и множество T_ε искомые. В самом деле, а) и б) выполнены по построению. Далее,

$$I_f(x_\varepsilon(\cdot)) \le I_f(x_{m(\varepsilon)}(\cdot)) \le \varepsilon.$$

Наконец,

$$I_\varphi(x_\varepsilon(\cdot)) = I_\varphi(x_{m(\varepsilon)}(\cdot)) - \int_{T \setminus T_\varepsilon} \varphi(t, x_{m(\varepsilon)}(t)d\mu \ge$$

$$\ge I_\varphi(x_{m(\varepsilon)}(\cdot)) - \int_T p(t)d\mu \ge N,$$

что и требовалось.

Вернемся к доказательству теоремы.

Предположим, что импликация 3)$\Longrightarrow$2) неверна. Поскольку $\varphi(t, x(t))$ суммируема, если $x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$, φ удовлетворяет условию (A) и, значит, выполнены все требования предложения 5.3.

Пусть $x_m(t)$ и T_m удовлетворяют условиям а) – г) предложения 5.3 с $\varepsilon \le \frac{1}{2^{m+1}} \mu T$; $N \ge 2^{m+1}$. Без ограничения общности можно считать, что $T_{m+1} \subset T_m$. Выберем последовательность $m_1, \dots, m_k$ натуральных чисел таким образом, чтобы

$$\int_{T_{m_k} \setminus T_{m_{k+1}}} \varphi(t, x_{m_k}(t)) d\mu \ge 2^{m_k}.$$

Положим,

$$x(t) = \begin{cases} x_{m_1}, & t \in T_{m_1} \setminus T_{m_2} \\ \text{-------------------} \\ x_{m_k}(t), & t \in T_{m_k} \setminus T_{m_{k+1}} \\ \text{-------------------} \\ 0, & t \,\overline{\in}\, T_{m_1}. \end{cases}$$

Тогда

$$I_f(x(\cdot)) \le \sum_{k=1}^{\infty} I_f(x_{m_k}(\cdot)) \le \sum_{m=1}^{\infty} I_f(x_m(\cdot)) \le \frac{\mu}{2}^T$$

и

$$I_\varphi(x(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_{m_k} \setminus T_{m_{k+1}}} \varphi(t, x_{m_k}(t)) d\mu + \int_{T \setminus T_{m_1}} \varphi(t,0) d\mu \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{\infty} 2^{m_k} + \int_{T \setminus T_{m_1}} \varphi(t,0) d\mu = \infty .$$

Таким образом, $\varphi(t, x(t))$ не суммируема, но этот результат противоречит условиям теоремы. Таким образом, если выполнено условие (5.5), теорема верна.

Пусть теперь f - произвольная A-функция. Для заданного $\varepsilon > 0$ положим

$$f_\varepsilon(t,x) = f(t,x) + \varepsilon |x| .$$

Очевидно, $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_\varepsilon}$ (предложение I.2). Поэтому $\varphi(t, x(t))$ суммируема для каждой $x(\cdot) \in \mathcal{D}_{f_\varepsilon}$. Но f_ε уже удовлетворяет (5.5). Поэтому I_φ ограничена на некотором множестве

$$\{x(\cdot) \in L_{f_\varepsilon} : I_{f_\varepsilon}(x(\cdot)) \le \alpha\} = \{x(\cdot) \in L_f : I_{f_\varepsilon}(x(\cdot)) \le \alpha\}$$

($L_{f_\varepsilon} = L_f$, так как $\mathcal{D}_{f_\varepsilon} = \mathcal{D}_f$) и, следовательно, на множестве B_{f_ε} (поскольку импликация 2)$\Longrightarrow$I) уже доказана)).

Далее, в силу предложения I.2 и леммы I.2, мы можем выбрать $\varepsilon > 0$ таким образом, что $\|x(\cdot)\|_{L_f} \ge 2\varepsilon \int |x(t)| d\mu$, т.е. неравенство $I_f(x(\cdot)) \le 1$ влечет $\varepsilon \int |x(t)| d\mu \le \frac{1}{2}$. В силу формулы (5.I)

$$\varepsilon \int |x(t)| d\mu \le I_f(x(\cdot)) + \frac{1}{2}$$

для всех $x(\cdot) \in L_f$. Следовательно,

$$I_{f_\varepsilon}(x(\cdot)) \le 2 I_f(x(\cdot)) + \frac{1}{2} .$$

Мы имеем таким образом, что множество $\{x(\cdot) \in L_f : I_f(x(\cdot)) \le \frac{1}{4}\}$ содержится в B_{f_ε} и, значит, I_φ ограничена сверху на этом множестве. Теорема доказана.

Прежде чем выводить следствия из доказанной теоремы, дадим одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.I. Скажем, что A-функция f удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют число $\kappa > 0$ и суммируемая функция $r(t)$ такие, что

$$f(t, 2x) \leq \kappa f(t, x) + r(t)$$

для всех $x \in R^n$ и почти всех $t \in T$.

Это есть точный аналог Δ_2-условия для N-функций, широко применяемого в теории пространств Орлича. Приводимые ниже следствия из теоремы 5.2 обобщают известные свойства пространств Орлича на пространства L_f.

СЛЕДСТВИЕ I. $L_f^* = L_{f^*}$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет Δ_2-условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f удовлетворяет Δ_2-условию. Пусть $x(\cdot) \in L_f$ и для заданного измеримого $E \subset T$ $x_E(t) = \chi_E x(t)$. Покажем, что для любого натурального m найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\|x_E(\cdot)\| \leq 2^{-m}$, лишь только $\mu E \leq \varepsilon$. В самом деле, для каждого $\delta > 0$ выберем $\varepsilon(\delta)$ таким образом, что $I_f(x_E(\cdot)) \leq \delta$ и $\int_E r(t) d\mu \leq \delta$, лишь только $\mu E \leq \varepsilon(\delta)$. Тогда,

$$I_f(2x_E(\cdot)) \leq \kappa I_f(x_E(\cdot)) + \int_E r(t) d\mu \leq (\kappa+1)\delta;$$

$$I_f(4x_E(\cdot)) \leq \kappa(\kappa+1)\delta + \delta \leq (\kappa+1)^2 \delta;$$

- -

$$I_f(2^m x_n(\cdot)) \leq \kappa(\kappa+1)^{m-1}\delta + \delta \leq (\kappa+1)^m \delta.$$

Если $\delta \leq (\kappa+1)^{-m}$, то $I_f(2^m x_E(\cdot)) \leq 1$, т. е. $\|x_E(\cdot)\| \leq 2^{-m}$. Отсюда следует, что ограниченные функции плотны в L_f, т.е. $E_f = L_f$ и, значит, $L_f^* = E_f^*$. Но, как легко видеть, всякая функция, удовлетворяющая Δ_2-условию, удовлетворяет также и условию (B). Поэтому $E_f^* = L_{f^*}$.

Пусть, обратно, $L_f^* = L_{f^*}$. Это значит, что на L_f нет нетривиальных сингулярных функционалов. В силу предложения 4.2 отсюда следует, что таких функционалов нет и на E_f, т.е. $E_f^* = L_{f^*}$. Поэтому f удовлетворяет условию (B) (теорема 3.2) и $E_f = L_f$ (иначе на L_f существовал хотя бы один нетривиальный вполне сингулярный функционал). Таким образом (предложение 3.2), $L_f = E_f \subset \mathcal{D}_f$.

Если теперь $f(t, x(t))$ суммируема, то и $f(t, 2x(t))$ суммируема. Применяя теорему к функциям $\varphi(t,x) = f(t, 2x)$ и $f(t,x)$, получаем (из эквивалентности 3) и 4)), что f удовлетворяет Δ_2-условию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанного, в частности, следует эквивалентность Δ_2-условия равенству $L_f = \mathcal{D}_f$.

СЛЕДСТВИЕ 2. L_f рефлексивно тогда и только тогда, когда f и f^* удовлетворяют Δ_2-условию.

Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
2. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенств, ЖВМ и МФ, 8: 4 (1968), 725-779.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН, 23:6 (1968), 51-116.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., О минимизации интегральных функционалов, Функц. анализ, 3:3 (1969), 61-70.
5. Иоффе А.Д., B-пространства, порождаемые выпуклыми интегрантами и многомерные вариационные задачи, ДАН СССР, 195, 5 (1970).
6. Иоффе А.Д., Субдифференциалы ограничений выпуклых функций, УМН, 25:4 (1970), 181-182.
7. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, ФМ, М., 1958.
8. J.J.Moreau. Sur la fonction polaire d'une fonction semicontinue supèrieurment, C.R.Ac.Sci. Paris,258 (1964),1128-1131.
9. R.T.Rockafellar. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations.
10. R.T.Rocafellar. Convex analysis, Princeton, 1970.
11. R.T.Rocafellar. Measurable dependence of convex sets and functions of parameters, J.Math.Anal.Appl.,28 (1969),4-25.
12. R.T.Rocafellar. Integrals which are convex functionals, Pac. J. Math., 24 (1968), 525-539.

Поступила в редакцию
15.IX. 1970 г.