УДК 513.88

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕМА ШИЛОВА-БИШОПА

Е.Л. Аренсон

§ 1. Введение. Формулировка основного результата

Известная теорема Шилова-Бишопа ([1],[2]) сводит изучение произвольных алгебр с равномерной сходимостью к изучению так называемых антисимметричных алгебр. Напомним, что содержащая константы подалгебра A алгебры $C(X)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на компакте X называется антисимметричной, если каждая вещественная функция из A есть константа. Более общим образом будем говорить, что линейное подпространство $A \subset C(X)$ антисимметрично, если любая вещественная функция $f \in C(X)$ такая, что $fg \in A$ для всех $g \in A$, есть константа.

Обозначим через $f/_F$ сужение функции $f \in C(X)$ на замкнутое множество $F \subset X$. Если A - подпространство (подалгебра) алгебры $C(X)$, то множество $A/F = \{f/F : f \in A\}$ является подпространством (подалгеброй) алгебры $C(F)$. Множество F называется множеством антисимметрии (относительно A), если A/F антисимметрично.

Теорему Шилова-Бишопа можно сформулировать следующим образом. Пусть A - замкнутое линейное подпространство пространства $C(X)$. Тогда существует покрытие $\mathcal{K}$ пространства X, состоящее из попарно не пересекающихся множеств антисимметрии и удовлетворяющее условиям: (а) если $f \in C(X)$ и $f/K \in A/K$ для всех $K \in \mathcal{K}$, то $f \in A$;
(б) для каждого $K \in \mathcal{K}$ пространство A/K замкнуто в $C(K)$.

Как мы увидим далее, теорему Шилова-Бишопа можно переформулировать в терминах, не использующих понятия умножения функций. Более того, мы покажем, что эта теорема может рассматриваться как частный случай общей теоремы, в которой роль $C(X)$ играет произвольное локально-выпуклое пространство, а роль A - произвольное замкнутое выпуклое множество (точнее, некоторый класс выпуклых множеств).

Отправным моментом для наших построений является следующее, по-видимому, хорошо известное утверждение, устанавливающее связь между метрикой на $C(X)$ и операторами умножения на вещественные функции. Пусть E - замкнутый единичный шар в $C(X)$ (относительно обычной sup-нормы), $P: C(X) \to C(X)$ - линейный оператор. Если $Pg + (I-P)h \in E$ для всех $g, h \in E$ (здесь I - единичный оператор), то P есть оператор умножения на вещественную функцию $f \in C(X)$ такую, что $f(X) \in [0,1]$ (доказательство см. ниже (следствие I к лемме 2)). Как легко проверить, верно и обратное утверждение.

Введем теперь следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть S - выпуклое подмножество линейного пространства B, $P: B \to B$ - линейный оператор. Будем говорить, что S инвариантно относительно P, если $Px + (I-P)y \in S$ для всех $x, y \in S$.

Заметим, что если S - линейное подпространство, то это определение равносильно общепринятому (т.е. $PS \subset S$); если S - выпуклый конус, то S инвариантно относительно P тогда и только тогда, когда P и $I-P$ - положительные операторы; если $S = B$ или $S = \{x\}$ ($x \in B$), то S инвариантно относительно всех линейных операторов; наконец, любое выпуклое множество инвариантно относительно операторов вида αI, где $\alpha \in [0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Класс Σ выпуклых подмножеств линейного пространства называется неразложимым, если каждый линейный оператор, относительно которого инвариантны все множества из Σ, есть оператор вида αI, где $\alpha \in [0,1]$.

Теперь можно утверждение "подпространство $A \subset C(X)$ антисимметрично" переформулировать так: "класс $\Sigma = \{A, E\}$ (где E - единичный шар в $C(X)$) - неразложимый".

Далее, вместо замкнутых множеств $F \subset X$ можно эквивалентным образом говорить о замкнутых идеалах $G=\{f\in C(X): f|F\equiv 0\}$ алгебры $C(X)$ (известно, что каждый идеал имеет такой вид). При этом вместо $C(F)$ и $A|F$ можно рассматривать изометрически изоморфные им пространства $C(X)/G$ и $\mathcal{Y}_G(A)$, где $\mathcal{Y}_G$ – естественное отображение $C(X)$ на $C(X)/G$.

Для того, чтобы теорему Шилова-Бишопа можно было сформулировать в терминах, не использующих конкретную функциональную природу пространства $C(X)$, нужно переформулировать утверждение "подпространство $G\subset C(X)$ есть идеал". Это можно сделать многими различными способами. Например, эквивалентным является следующее утверждение "подпространство G инвариантно относительно всех операторов, относительно которых инвариантен единичный шар E ". Однако если это утверждение перенести на произвольные банаховы пространства в качестве определения понятия идеала, то это определение может оказаться малосодержательным, поскольку если в данном пространстве каждый оператор, относительно которого инвариантен единичный шар, кратен единичному (а такие случаи нередки), то все подпространства следует назвать идеалами.

Мы воспользуемся другим характеристическим свойством идеалов в $C(X)$. Это свойство сформулировано в следующем далее определении 3.

Пусть E – выпуклая окрестность нуля в локально-выпуклом пространстве B. Обозначим через E° множество всех функционалов ξ из сопряженного пространства B^*, для которых $\sup\limits_{x\in E} Re\,\xi(x)\leq 1$. Тогда E° – слабо компактное выпуклое подмножество пространства B^*. Пусть $ex\,Q$ означает множество всех крайних точек произвольного выпуклого множества $Q\subset B^*$. Пусть, далее, G – линейное подпространство пространства B. Обозначим через $G^\perp$ ортогональное дополнение G, т. е. $G^\perp=\{\xi\in B^*:\ \xi(x)=0$ для всех $x\in G\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Замкнутое линейное подпространство G локально-выпуклого пространства B называется E-идеалом (где E – выпуклая окрестность нуля в B), если $ex(G^\perp\cap E^\circ)\subset ex\,E^\circ$.

Покажем, что если E – единичный шар в $C(X)$, то подпространство $G\subset C(X)$ есть E-идеал тогда и только тогда, когда G есть идеал алгебры $C(X)$. В расематриваемом случае

E_0 есть не что иное, как единичный шар сопряженного пространства $C(X)^{\perp}$. Известно, что каждая крайняя точка E_0 имеет вид $\lambda\delta_t$, где λ -число, $|\lambda|=1$, δ_t - функционал значения в точке $t\in X$ (т.е. $\delta_t(f)=f(t)$). Пусть G есть идеал алгебры $C(X)$. Тогда $G=\{f\in C(X): f|F=0\}$ для некоторого замкнутого $F\subset X$. Пространство $G^{\perp}$ изометрически изоморфно пространству $(C(X)/G)^*$, а пространство $C(X)/G$ изометрически изоморфно пространству $C(F)$. Поэтому каждая крайняя точка множества $G^{\perp}\cap E^{\circ}$ имеет вид $\lambda\delta_t$, где $|\lambda|=1$ и $t\in F$, а все такие функционалы являются крайними точками E°. Таким образом, G есть E-идеал. Пусть теперь, обратно, G есть E-идеал. Тогда элемент $g\in C(X)$ принадлежит G в том и только в том случае, если $\xi(g)=0$ для всех $\xi\in ex(G^{\perp}\cap E^{\circ})$. Отсюда непосредственно следует, что для некоторого множества $F\subset X$ справедливо равенство $G=\{f\in C(X): f|F=0\}$ и тем самым G есть идеал алгебры $C(X)$.

Понятие E-идеала обладает некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных идеалов. В частности, каждый собственный E-идеал содержится в максимальном и, более того, является пересечением всех максимальных E-идеалов, его содержащих. Действительно, если $\xi\in ex E^{\circ}$, то $G_{\xi}=\{x\in B: \xi(x)=0\}$ есть максимальный E-идеал, и если G - произвольный E-идеал, то $G=\bigcap G_{\xi}$, где пересечение берется по всем $\xi\in ex(G^{\perp}\cap E)$. В следующем параграфе мы покажем, что если B - банахово пространство, E ограничено и G есть E-идеал, то G инвариантно относительно всех линейных операторов, относительно которых инвариантно E (обратное, вообще говоря, неверно).

Теперь ясно, как можно переформулировать теорему Шилова-Бишопа в абстрактных терминах. Мы не будем этого делать, а сразу сформулируем общую теорему. При этом мы будем использовать следующие обозначения: $int\, E$ - внутренность множества E, φ_K - естественное отображение линейного пространства B на фактор-пространство B/K (где K - подпространство пространства B).

ТЕОРЕМА I. Пусть Σ - класс замкнутых выпуклых подмножеств отделимого локально-выпуклого пространства

B. Предположим, что совокупность Σ_0 всех множеств вида $\lambda(E-y)$, где $\lambda>0$, $E\in\Sigma$ и $y\in \operatorname{int} E$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля в B. Тогда существует совокупность $\mathcal{K}$ замкнутых линейных подпространств пространства B, удовлетворяющая условиям: (1) если $E\in\Sigma$, то каждое $K\in\mathcal{K}$ есть E-идеал и для каждого максимального E-идеала G найдется единственное $K\in\mathcal{K}$, для которого $K\subset G$; (2) для каждого $K\in\mathcal{K}$ класс $\Sigma_K=\{\varphi_K(S): S\in\Sigma\}$ подмножеств пространства B/K - неразложимый; (3) если $x\in B$, $S\in\Sigma$ и $\varphi_K(x)\in\varphi_K(S)$ для всех $K\in\mathcal{K}$, то $x\in S$. Если, кроме того, B есть пространство Фреше, то $\mathcal{K}$ удовлетворяет также условию: (4) для каждого $S\in\Sigma$ и $K\in\mathcal{K}$ множество $\varphi_K(S)$ замкнуто в B/K.

Чтобы вывести теорему Шилова-Бишопа из теоремы I, достаточно положить $B=C(X)$ и $\Sigma=\{A,E\}$. Тогда утверждение (I) означает, что существует некоторое разбиение пространства X, утверждение (2) - что элементы этого разбиения суть множества антисимметрии, а утверждения (3) и (4) - что выполнены указанные в теореме Шилова-Бишопа свойства восстановления и замкнутости.

В следующем параграфе мы введем некоторые вспомогательные понятия, на основе которых мы сформулируем более общую теорему 2. Доказательству этой теоремы посвящены §§ 3 и 4. Доказательство утверждения (4) теоремы I (и аналогичного утверждения теоремы 2) основано на достаточном условии замкнутости образа выпуклого множества, выделенном в отдельную теорему 3 (см. § 4). В § 5 рассмотрены некоторые примеры.

§ 2. Характеризация операторов умножения в $C(X)$. Класс Σ и уточнение формулировки теоремы

Пусть S - произвольное непустое выпуклое подмножество локально-выпуклого пространства B. Обозначим через H_S функцию, определенную на B^* и принимающую значения из $(-\infty, +\infty]$: $H_S(\xi) = \sup_{x \in S} \operatorname{Re} \xi(x)$. Это полуаддитивная (т.е. $H_S(\xi+\eta) \leq H_S(\xi) + H_S(\eta)$, положительно однородная (т.е. $H_S(\lambda\xi) = \lambda H_S(\xi)$ при $\lambda \geq 0$, причем считается $0 \cdot \infty = 0$), слабо полунепрерывная снизу функция. Верно и обратное, а именно: если H - полуаддитивная, положительно однородная и слабо полунепрерывная снизу функция на B^* со значениями из $[+\infty, -\infty)$, то $H = H_S$ для некоторого замкнутого выпуклого $S \subset B$.

Отметим также некоторые свойства функций H_S:

(I) если $\bar{S}$ - замыкание S, то $H_{\bar{S}} = H_{S'}$;

(2) $x \in \bar{S}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} \xi(x) \leq H_S(\xi)$ для всех $\xi \in B^*$;

(3) если $S_1 \subset S_2$, то $H_{S_1} \leq H_{S_2}$; обратно, если $H_{S_1} \leq H_{S_2}$, то $S_1 \subset \bar{S}_2$;

(4) $H_{S_1+S_2} = H_{S_1} + H_{S_2}$;

(5) если $P: B \to B$ - линейный оператор, то $H_{PS}(\xi) = H_S(P^*\xi)$ для всех $\xi \in B^*$, где $P^*: B^* \to B^*$ - сопряженный оператор.

Свойства (I), (4) и (5) легко следуют из определения, свойства (2) и (3) вытекают из теоремы отделимости.

ЛЕММА I. Пусть S' - замкнутое выпуклое подмножество пространства B, $P: B \to B$ - линейный непрерывный оператор. Тогда следующие условия равносильны:

(I) S' инвариантно относительно P;

(2) $H_S(\xi) = H_S(P^*\xi) + H_S((I-P)^*\xi)$ для всех $\xi \in B^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (I) можно переписать в виде: $PS + (I-P)S \subset S$, что эквивалентно неравенству $H_{PS} + H_{(I-P)S} \leq H_S$, которое в свою очередь эквивалентно условию $H_S(P^*\xi) + H_S((I-P)^*\xi) \leq H_S(\xi)$ для всех $\xi \in B^*$.

Поскольку противоположное неравенство выполнено тривиальным образом, последнее условие равносильно условию (2), что и требовалось доказать.

Пусть $P: B^* \to B^*$ - линейный оператор (не обязательно сопряженный к некоторому оператору на B). Если для всех $\xi \in B^*$ справедливо равенство $H_S(\xi) = H_S(P\xi) + H_S((I-P)\xi)$, то мы иногда будем говорить, что S слабо инвариантно относительно P .

ЛЕММА 2. Пусть E - выпуклая окрестность нуля в локально-выпуклом пространстве B и пусть E слабо инвариантно относительно оператора $P: B^* \to B^*$. Тогда для каждой крайней точки ξ множества $E^\circ = \{\xi \in B^*: H_E(\xi) \leq 1\}$ существует число $\alpha \in [0,1]$ такое, что $P\xi = \alpha\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in ex\,E^\circ$. Положим $\alpha = H_E(P\xi)$, $\beta = H_E((I-P)\xi)$ Так как E - окрестность нуля, то H_E - неотрицательная функция и $H_E(\xi) = 1$, откуда α, $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = H_E(\xi) = 1$. Очевидно, $P\xi$ и $(I-P)\xi$ можно представить в виде $\alpha\eta$ и $\beta\zeta$ соответственно, где $\eta\,\zeta \in E^\circ$ (например, в качестве η можно взять $\frac{1}{\alpha}P\xi$, если $\alpha \neq 0$ и ξ, если $\alpha = 0$). Так как при этом $\xi = \alpha\eta + \beta\zeta$ и $\xi \in ex\,E^\circ$, то $\eta = \zeta = \xi$ или, что то же, $P\xi = \alpha\xi$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть E - единичный шар в $C(X)$, $P: C(X) \to C(X)$ - линейный оператор, относительно которого E инвариантно. Тогда существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(X) \in [0,1]$ и $Pg = fg$ для всех $g \in C(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы I оператор P^* удовлетворяет условию леммы 2. Пусть $t \in X$, δ_t - функционал из $C(X)^*$: $\delta_t(f) = f(t)$. Тогда δ_t - крайняя точка E°. Из леммы 2 вытекает, что для каждого $t \in X$ найдется число $f(t) \in [0,1]$, такое, что $P^*\delta_t = f(t)\delta_t$. Следовательно, если $g \in C(X)$, то $(Pg)(t) = f(t)\cdot g(t)$. Положим $g \equiv 1$. Тогда $f(t) = (P1)(t)$ и, следовательно, $f \in C(X)$. Таким образом, $Pg = fg$ для всех $g \in C(X)$ и $f(X) \subset [0,1]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. П у с т ь B - б а н а х о в о п р о с т р а н с т в о , E - о г р а н и ч е н н а я в ы п у к л а я о к р е с т н о с т ь н у л я в B и G - E - и д е а л . Т о г д а G и н в а р и а н т н о о т н о с и т е л ь н о в с е х л и н е й н ы х н е п р е р ы в н ы х о п е р а т о р о в , о т н о с и т е л ь н о к о т о р ы х и н в а р и а н т н о E .

Это утверждение непосредственно следует из определения E - идеала и лемм I и 2.

Пусть теперь Σ - класс множеств из теоремы I.

Введем следующие обозначения:

$\mathcal{P}(\Sigma)$ - множество всех линейных операторов на B^*, относительно которых все множества из Σ слабо инвариантны;

$\tilde{\tilde{\Sigma}}$ - совокупность всех замкнутых выпуклых подмножеств пространства B, слабо инвариантных относительно всех операторов из $\mathcal{P}(\Sigma)$.

Отметим некоторые свойства класса $\tilde{\tilde{\Sigma}}$.

(I) $\Sigma \subset \tilde{\tilde{\Sigma}}$.

(2) $B \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$ и все одноточечные множества принадлежат $\tilde{\tilde{\Sigma}}$.

(3) Если $S \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$ и λ -число из поля скаляров, то $\lambda S \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$.

(4) Если $S_1, S_2 \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$, то $\overline{S_1 + S_2} \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$ (черта означает замыкание).

(5) Если σ - линейно упорядоченная по включению совокупность множеств из $\tilde{\tilde{\Sigma}}$, то множество $S_1 = \overline{\bigcup_{S \in \sigma} S}$ принадлежит $\tilde{\tilde{\Sigma}}$.

(6) Каждая окрестность нуля из Σ_0 принадлежит $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ (определение Σ_0 дано в формулировке теоремы I). Свойства (I) - (6) легко следуют из определения.

(7) $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ содержит фундаментальную систему абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V - любая абсолютная выпуклая окрестность нуля в B. Так как Σ_0 образует фундаментальную систему окрестностей нуля, то найдется $E_0 \in \Sigma_0$ такое, что $E_0 \subset V$. Из (6) следует, что $E_0 \in \tilde{\tilde{\Sigma}}$. Для любого числа λ, $|\lambda| = 1$ множество $\lambda E_0 \subset V$. Если B - вещественное пространство, то множество $E = \frac{1}{2}(E_0 - E_0)$ является абсолютно выпуклой окрестностью нуля, принадлежит $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ и содержится в V.

Если B - комплексное пространство, то рассмотрим функцию на B^* :

$$H(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_{E_o}(e^{i\theta}\xi)\,d\theta$$

(интеграл имеет смысл, так как подынтегральная функция неотрицательна и полунепрерывна снизу).

Очевидно, H - неотрицательная, полуаддитивная и положительно однородная функция на B^*. Покажем, что она слабо полунепрерывна снизу. Отсюда будет следовать, что $H=H_E$ для некоторого множества E, причем легко проверить, что $E\subset V$, $E\in\tilde{\Sigma}$, E абсолютно выпукло и является окрестностью нуля (E содержит все $x\in E_o$, такие, что для всех θ $e^{i\theta}x\in E_o$).

Обозначим через H_n ($n=1,2,\dots$) функцию на B^* :

$$H_n(\xi)=\frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{4n-1} H_{E_o}\left(e^{\frac{k}{4n}2\pi i}\xi\right)$$

и покажем, что для некоторого числа $\tau>0$ при всех $\xi\in B^*$ и всех $n=1,2,\dots$ выполняются неравенства:

$$\left(1-\frac{\tau}{n}\right)H_n(\xi)\leq H(\xi)\leq\left(1+\frac{\tau}{n}\right)H_n(\xi).$$

Из этих неравенств можно заключить, что для любого $\lambda>0$ множество $\{\xi\in B^*: H(\xi)>\lambda\}$ совпадает с множеством $\bigcup\limits_{n>\tau}\{\xi\in B^*: H_n(\xi)>\frac{n\tau}{n-\tau}$, а это множество (слабо) открыто, так как H_n - слабо полунепрерывная снизу функция при всех n , откуда следует, что и H - полунепрерывная снизу функция.

Найдем положительное число τ такое, что при всех $n=1,2,\dots$, если $0<\delta\leq\frac{\pi}{2n}$, то $1-\cos\delta\leq\frac{\tau}{2n}$ и $\sin\delta\leq\frac{\tau}{2n}$.

Зафиксируем n , возьмем любое $\theta\in[0,2\pi]$ и δ , $0<\delta<\frac{\pi}{2n}$.

Очевидно, справедливы неравенства:

$$H_{E_o}(e^{i\theta}\xi)-H_{E_o}((1-e^{i\delta})e^{i\theta}\xi)\leq H_{E_o}(e^{i(\theta+\delta)}\xi)\leq H_{E_o}(e^{i\theta}\xi)+$$

$+H_{E_o}((e^{i\delta}-1)e^{i\theta}\xi)$. Но $H_{E_o}((1-e^{i\delta})e^{i\theta}\xi)=H_{E_o}((1-\cos\delta)e^{i\theta}\xi+$

$$+\sin\delta\cdot e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\xi\Big)\le\frac{\tau}{2n}\Big[H_{E_0}(e^{i\theta}\xi)+H_{E_0}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\xi)\Big]$$

и аналогично

$$H_{E_0}\big((e^{i\delta}-1)e^{i\theta}\xi\big)\le\frac{\tau}{2n}\Big[H_{E_0}(e^{i(\theta+\pi)}\xi)+H_{E_0}(e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\xi)\Big].$$

Положим $\theta_K=\frac{K}{2n}\cdot 2\pi$ $(K=0,1,2,\dots,4n-1)$. Тогда

$$H_n(\xi)=\frac{1}{4n}\sum_{K=0}^{n-1}H_{E_0}(e^{i\theta_K}\xi).$$

Так как при всех целых p

$$\frac{1}{4n}\sum_{K=0}^{4n-1}H_{E_0}(e^{i(\theta_K+p\frac{\pi}{2})}\xi)=\frac{1}{4n}\sum_{K=0}^{4n-1}H_{E_0}(e^{i\theta_K}\xi)=H_n(\xi),$$

то справедлива оценка

$$\frac{1}{4n}\sum_{K=0}^{4n-1}H_{E_0}(\pm(1-e^{i\delta})e^{i\theta_K}\xi)\le\frac{\tau}{n}H_n(\xi).$$

Таким образом, при всех δ, $0<\delta<\frac{\pi}{2n}$, справедливы неравенства

$$\Big(1-\frac{\tau}{n}\Big)H_n(\xi)\le\frac{1}{4n}\sum_{K=0}^{4n-1}H_{E_0}(e^{i(\theta_K+\delta)}\xi)\le\Big(1+\frac{\tau}{n}\Big)H_n(\xi).$$

Умножая эти неравенства на $\frac{2K}{\pi}$ и интегрируя по δ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2n}$, получаем

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{n}\Big)H_n(\xi)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_{E_0}(e^{i\theta}\xi)\,d\theta\le\Big(1+\frac{\tau}{n}\Big)H_n(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы сформулируем уточненный вариант теоремы I, доказательству которого посвящены §§ 3 и 4. Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть E - абсолютно выпуклая окрестность нуля в B. Тогда E порождает непрерывную полунорму $\|\cdot\|_E$ на B. Обозначим через ρ_E соответствующую предметрику на B: $\rho_E(x,y)=\|x-y\|_E$. Если K - замкнутое подпространство пространства B, φ_K - естественное отображение B на B/K, то по полунорме $\|\cdot\|_E$ на B можно естественным образом ввести полунорму и соответствующую предметрику на B/K. Не опасаясь путаницы, мы эти функции будем также обозначать $\|\cdot\|_E$ и ρ_E, т.е. будем пользоваться обозначениями: $\|\varphi_K(x)\|_E = \inf_{z\in K} \|x+z\|_E$ $(x\in B)$ и $\rho_E(\varphi_K(x),\varphi_K(y)) = \|\varphi_K(x)-\varphi_K(y)\|_E$ $(x,y\in B)$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы I существует содержащаяся в $\widetilde{E}$ совокупность $\mathcal{K}$ подпространств пространства B, удовлетворяющая условиям:

(I) если E-окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$, то каждое $K\in\mathcal{K}$ есть E-идеал и для каждого максимального E-идеала G найдется единственное, такое, что $K\subset G$;

(2) для каждого $K\in\mathcal{K}$ класс $\Sigma_K=\{\varphi_K(S): S\in\Sigma\}$ неразложимый (и тем более класс $\widetilde{\Sigma}_K=\{\varphi_K(S): S\in\widetilde{\Sigma}\}$ неразложимый);

(3) если $x\in B$, $S\in\widetilde{\Sigma}$ и E-абсолютно выпуклая окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$, то

$$\rho_E(x,S)=\sup_{K\in\mathcal{K}} \rho_E(\varphi_K(x),\varphi_K(S)),$$

причем верхняя грань в правой части достигается. Если, кроме того, B есть пространство Фреше, то $\mathcal{K}$ удовлетворяет также условию:

(4) для каждого $S\in\widetilde{\Sigma}$ и $K\in\mathcal{K}$ множество $\varphi_K(S)$ замкнуто в B/K. •

§ 3. Конструкция $\mathcal{K}$ и доказательство утверждений (I), (2) и (3) теоремы 2

ЛЕММА 3. $\mathcal{P}(\Sigma)$ - коммутативная полугруппа операторов на B^*, компактная в слабой операторной топологии. Если $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$ и g - многочлен, отображающий отрезок $[0,I]$ в себя, то оператор $g(P): B^* \to B^*$ принадлежит $\mathcal{P}(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем компактность. Прежде всего, заметим, что $\mathcal{P}(\Sigma)$ - замкнутое множество в слабой операторной топологии. Действительно, $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда для всех $S \in \Sigma$, $x, y \in S$ и $\xi \in B^*$ выполнено неравенство $Re[(P\xi)(x) + ((I-P)\xi)(y)] \leq H_S(\xi)$, поэтому замкнутость очевидна. С другой стороны, каждый оператор из $\mathcal{P}(\Sigma)$ удовлетворяет условию: для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля E из $\widetilde{\Sigma}$, элемента $x \in E$ и функционала $\xi \in E^\circ$ выполнено неравенство $|(P\xi)(x)| \leq 1$. Поскольку множество всех таких операторов, как нетрудно проверить, компактно, то и $\mathcal{P}(\Sigma)$ компактно.

Покажем теперь, что $\mathcal{P}(\Sigma)$ - полугруппа. Пусть $P, Q \in \mathcal{P}(\Sigma)$, $S \in \Sigma$, $\xi \in B^*$. Тогда:

$$H_S(PQ\xi) + H_S((I-PQ)\xi) = H_S(PQ\xi) + H_S((I-P)Q\xi + (I-Q)\xi) \leq$$
$$\leq H_S(PQ\xi) + H_S((I-P)Q\xi) + H_S((I-Q)\xi) =$$
$$= H_S(Q\xi) + H_S((I-Q)\xi) = H_S(\xi).$$

Так как противоположное неравенство выполняется тривиально, то $PQ \in \mathcal{P}(\Sigma)$ и $\mathcal{P}(\Sigma)$ - полугруппа.

Для того, чтобы доказать остальные утверждения леммы, покажем предварительно, что вопрос можно свести к изучению операторов, относительно которых инвариантен единичный шар в банаховом пространстве.

Обозначим через B_1 вещественную линейную оболочку множества $\mathcal{P}(\Sigma)$ в пространстве всех линейных операторов на B^*. Положим $E_1 = I - 2\mathcal{P}(\Sigma)$. Как нетрудно проверить, E_1 - абсолютно выпуклое (в вещественном смысле) поглощающее подмножество пространства B_1. Введем в B_1 норму $\|\cdot\|$ по правилу $\|P\| = \inf\{\lambda > 0 : P \in \lambda E_1\}$. Используя компактность $\mathcal{P}(\Sigma)$ в слабой операторной топологии, нетрудно убедиться, что B_1 с нормой $\|\cdot\|$ есть (вещественное) банахово пространство, в котором E_1 - единичный шар. Более того, B_1 есть банахова алгебра над полем вещественных чисел (с естественной операцией умножения операторов). Поставим в соответствие каждому элементу $P \in B_1$ оператор $R_P: B_1 \to B_1$ по правилу $R_P(Q) = PQ$. Тогда операция $P \to R_P$ сохраняет алгебраические соотношения.

Заметим теперь, что E_1 инвариантно относительно всех операторов вида R_P ($P\in\mathcal{P}(\Sigma)$). Действительно, если P, $Q_1, Q_2\in\mathcal{P}(\Sigma)$, то легко проверяется, что $PQ_1+(1-P)Q_2\in$ $\in\mathcal{P}(\Sigma)$. Возьмем два произвольных элемента из E_1. Их можно представить в виде $Q_1'=I-2Q_1$ и $Q_2'=I-2Q_2$, где $Q_1, Q_2\in\mathcal{P}(\Sigma)$. Отсюда получаем: $R_P(Q_1')+(I-R_P)(Q_2')=$ $=P(I-2Q_1)+(I-P)(I-2Q_2)=I-2(PQ_1+(I-P)Q_2)\in E_1$.

Теперь оставшиеся недоказанными утверждения леммы очевидным образом вытекают из следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть E - единичный шар в банаховом пространстве B, $\mathcal{P}$ - совокупность всех линейных операторов на B, относительно которых E инвариантно. Тогда $\mathcal{P}$ - коммутативная полугруппа, и если $P\in\mathcal{P}$ и g - многочлен такой, что $g([0,1])\subset[0,1]$, то $g(P)\in\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x,y\in E$, $P,Q\in\mathcal{P}$. Тогда $PQx+$ $+(I-PQ)y=PQx+P(I-Q)y+(I-P)y=P(Qx+(I-Q)y)+(I-P)y\in E$. Таким образом, $PQ\in\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}$ - полугруппа.

Докажем ее коммутативность. Из лемм I и 2 вытекает, что каждый функционал $\xi\in ex\,E^\circ$ есть собственный вектор каждого оператора P^* ($P\in\mathcal{P}$). Отсюда следует, что если P, $Q\in\mathcal{P}$, то для всех $\xi\in ex\,E^\circ$

$$P^*Q^*\xi=Q^*P^*\xi.$$

Применяя теорему Крейна-Мильмана, получаем, что последнее равенство справедливо для всех $\xi\in E^\circ$ и, следовательно, $P^*Q^*=Q^*P^*$, или, что эквивалентно, $PQ=QP$. Таким образом, коммутативность доказана.

Пусть теперь $P\in\mathcal{P}$, g - многочлен и $g([0,1])\subset[0,1]$. Покажем, что $Q=g(P)\in\mathcal{P}$. Для этого нужно доказать, что если $x,y\in E$, то $Qx+(I-Q)y\in E$. Последнее соотношение эквивалентно неравенству $Re\,\xi(Qx+(I-Q)y)\le 1$ для всех $\xi\in E^\circ$. Функция $\xi\mapsto Re\,\xi(Qx+(I-Q)y)$ достигает максимума в некоторой крайней точке η множества E°. Но для $\eta\in ex\,E^\circ$ существует число $\alpha\in[0,1]$ такое, что $P^*\eta=\alpha\eta$. Поскольку $g([0,1])\subset[0,1]$, то $Q^*\eta=(g(P))^*\eta=g(\alpha)\eta$, причем

$g(\alpha)\in[0,1]$. Отсюда имеем: $Re\,\eta(Qx+(I-Q)y)=Re[(Q^*\eta)(x)+$
$+((I-Q)^*\eta)(y)]=g(\alpha)Re\,\eta(x)+(1-g(\alpha))\,Re\,\eta(y)$
(так как $Re\,\eta(x)\leq 1$ и $Re\,\eta(y)\leq 1$). Таким образом, $Qx+(I-Q)y\in E$, и лемма доказана.

Перейдем теперь к конструкции множества $\mathcal{K}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех ненулевых слабо замкнутых подпространств M пространства B^* , удовлетворяющих условию: каков бы ни был оператор $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$, сужение которого P/M слабо непрерывно, пространство M инвариантно относительно P .

Рассмотрим пример подпространства из $\mathfrak{M}$. Пусть E - любая окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$ и ξ - крайняя точка E°. Тогда для каждого $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$ существует число $\alpha\in[0,1]$ такое, что $P\xi=\alpha\xi$, откуда следует, что одномерное подпространство, натянутое на ξ , принадлежит $\mathfrak{M}$.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}_1$ означает подмножество множества $\mathfrak{M}$, состоящее из таких $M\in\mathfrak{M}$, для которых если $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$ и P/M слабо непрерывно, то для некоторого $\alpha\in[0,1]$, $P\xi=\alpha\xi$ для всех $\xi\in M$. Совокупность $\mathfrak{M}_1$ непуста и содержит, в частности, все одномерные подпространства только что описанного типа.

Покажем, что каждое $M\in\mathfrak{M}_1$ содержится в максимальном. Пусть $\mathcal{E}$ - линейно упорядоченная по включению совокупность подпространств из $\mathfrak{M}_1$. Обозначим через M_0 слабое замыкание объединения всех пространств из $\mathcal{E}$. Пусть $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$ и P/M_0 слабо непрерывно. Тогда для каждого $N\in\mathcal{E}$ P/N слабо непрерывно и $P(N)\subset N$. Следовательно и $P(M_0)\subset M_0$. Далее, для каждого $N\in\mathcal{E}$ существует число $\alpha_N\in[0,1]$ такое, что $P\xi=\alpha_N\xi$ для всех $\xi\in N$. Но так как $\mathcal{E}$ линейно упорядочено, то все числа α_N совпадают между собой. Из слабой непрерывности P/M_0 вытекает, что $P\xi=\alpha_N\xi$ для всех $\xi\in M_0$ и наше утверждение доказано (в силу леммы Цорна).

Отметим, что если M_1 и M_2 - различные максимальные элементы $\mathfrak{M}_1$, то $M_1\cap M_2=\{0\}$. Действительно, в противном случае найдется ненулевой функционал $\xi\in M_1\cap M_2$. Если положить $M=M_1+M_2$, то, как легко проверить, $M\in\mathfrak{M}_1$ и пространства M_1 и M_2 содержатся в M и не совпадают с ним, что противоречит их максимальности.

Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ множество всех максимальных элементов из $\mathfrak{M}_1$ и положим $\mathcal{K}=\{M^\perp: M\in\mathfrak{M}_2\}$, где $M^\perp$ означает

$\{x \in B : \xi(x) = 0$ для всех $\xi \in M\}$.

ЛЕММА 5. Для каждого $K \in \mathcal{K}$ найдется оператор $P_K \in \mathcal{P}(\Sigma)$ такой, что $P_K^2 = P_K$ и $P_K(B^*) = K^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем говорить, что подпространство $M \subset B^*$ $\mathcal{P}(\Sigma)$ - дополняемо, если существует $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ такой, что $P^2 = P$ и $P(B^*) = M$. Заметим, что если M - ненулевое слабо замкнутое $\mathcal{P}(\Sigma)$ -дополняемое подпространство, то $M \in \mathfrak{M}$. Действительно, если $P^2 = P$, $P(B^*) = M$ и $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$, то для любого оператора $R \in \mathcal{P}(\Sigma)$ такого, что R/M - слабо непрерывный оператор, имеем $R/M = (RP)/M = (PR) \mid M$, откуда следует, что $R(M) \subset M$.

Используя лемму 3, нетрудно показать, что если $K \in \mathcal{K}$, то среди всех слабо замкнутых $\mathcal{P}(\Sigma)$ -дополняемых подпространств пространства B^*, содержащих $K^\perp$, существует наименьшее (для доказательства нужно рассмотреть предельную точку естественным образом упорядоченной совокупности соответствующих проекторов). Обозначим это наименьшее пространство через M_0 и покажем, что $M_0 = K^\perp$. Если это не так, то $K^\perp$ - собственное подмножество M_0, и следовательно, $M_0 \notin \mathfrak{M}_1$ (так как $K^\perp$- максимальный элемент из $\mathfrak{M}_1$). Поэтому найдется оператор $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ такой, что $P(M_0) \subset M_0$ и $P \mid M_0$ - не кратный единичному слабо непрерывный оператор. Поскольку $K^\perp \in \mathfrak{M}_1$, найдется $\alpha \in [0,1]$ такое, что $P\xi = \alpha\xi$ для всех $\xi \in K^\perp$. Пусть g - многочлен, такой что $g([0,1]) \subset [0,1]$ и $g^{-1}(1) = \{\alpha\}$. Пусть P_0 - проектор на M_0 (из $\mathcal{P} \subset \Sigma_0$)).

Обозначим через Q оператор $P_0 \cdot g(P)$ и через M_1 - подпространство $\{\xi \in B^* : Q\xi = \xi\}$. Очевидно, $Q \mid M_0$ - слабо непрерывный оператор. Если $\xi \in K^\perp$, то $Q\xi = g(P)P_0(\xi) = g(P)\xi = g(\alpha)\xi = \xi$, откуда $K^\perp \subset M_1$. Далее, если $\xi \in M_1$, то $Q\xi = \xi$, откуда $P_0\xi = P_0 Q\xi = Q\xi = \xi$ и $\xi \in M_0$. Следовательно, $M_1 \subset M_0$. Из слабой непрерывности $Q \mid M_0$ вытекает, что M_1 - слабо замкнутое пространство. Так как оператор $P \mid M_0$ не кратен единичному, то для некоторой окрестности нуля $E \in \widetilde{\Sigma}$ найдется $\xi \in M_0^\perp \cap ex E^0$ такое, что $P\xi = \beta\xi$, где $\beta \neq \alpha$. Отсюда следует, что оператор $g(P) \mid M_0$ не кратен единичному и, следовательно, $M_1 \neq M_0$.

Из компактности $\mathcal{P}(\Sigma)$ в слабой операторной топологии вытекает, что последовательность $\{Q^n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет в этой топологии предельную точку Q_1. Так как это - последовательность степеней, то $Q_1^2 = Q_1$ и $QQ_1 = Q_1$. Поэтому $Q_1(B^*) = M_1$. Действительно, включение $M_1 \subset Q_1(B^*)$ очевидно, если же $\xi \subset Q_1(B^*)$, то $Q_1\xi = \xi$ и, следовательно $Q\xi = QQ_1\xi = Q\xi = \xi$, т.е. $\xi \in M_1$. Таким образом, M_1 - собственное слабо замкнутое $\mathcal{P}(\Sigma)$ - дополняемое подпространство пространства M_0, содержащее $K^\perp$, что противоречит минимальности M_0 среди всех таких пространств. Это противоречие показывает, что $M_0 = K^\perp$, и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Каждое $K \in \mathcal{K}$ принадлежит $\widetilde{\Sigma}$. Для доказательства достаточно проверить, что если $\xi \in K^\perp$ и $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$, то $P\xi \in K^\perp$ (поскольку $K^\perp$ - линейное пространство). Но если $\xi \in K^\perp$, то $P\xi = PP_K\xi = P_K P\xi \in K^\perp$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если K_1, $K_2 \in \mathcal{K}$ и $K_1 \neq K_2$, то $P_{K_1} P_{K_2} = 0$. Это вытекает из попарной дизъюнктности подпространств из $\mathfrak{M}_2$.

В следующих далее леммах 6, 7 и 8 доказываются утверждения (1), (2) и (3) теоремы 2.

ЛЕММА 6. Пусть E - окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$. Тогда каждое $K \in \mathcal{K}$ есть E-идеал, и каждый максимальный E-идеал содержит в точности одно $K \in \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый максимальный E-идеал есть подпространство вида $G_\xi = \{x \in B : \xi(x) = 0\}$, где $\xi \in ex\, E_0$. Как уже отмечалось выше, ортогональное дополнение $G_\xi^\perp$ пространства G_ξ принадлежит $\mathfrak{M}_1$ ($G_\xi^\perp$ есть одномерное подпространство, натянутое на ξ). Поэтому найдется максимальное множество из $\mathfrak{M}_1$, содержащее $G_\xi^\perp$, т.е. для некоторого $K \in \mathcal{K}$ $G_\xi^\perp \subset K^\perp$, откуда $K \subset G_\xi$.
Единственность K следует из попарной дизъюнктности максимальных множеств из $\mathfrak{M}_1$.

Выберем теперь $K \in \mathcal{X}$ и покажем, что K есть E-идеал. Пусть $\xi \in ex(K^{\perp} \cap E^{\circ})$. Если $\xi = a\xi_1 + (1-a)\xi_2$, где $a \in (0,1)$ и ξ, $\xi_2 \in E_o$, то $H_E(\xi) = 1$ и $H_E(\xi_i) = 1 \ (i = 1,2)$; иначе оказалось бы, что $H_E(\xi) < 1$, откуда следует:

$$a H_E((I-P_K)\xi_1) + [1-a) H_E((I-P_K)\xi_2) = a H_E(\xi_1) - a H_E(P_K \xi_1) +$$
$$+ (1-a) H_E(\xi_2) - [1-a) H_E(P_K(\xi_2) \leq 1 - H_E(P_K(a\xi_1 + (1-a)\xi_2)) =$$
$$= 1 - H_E(P_K \xi) = 1 - H_E(\xi) = 0.$$

Отсюда следует, что $(I-P_K)\xi_1$ и $(I-P_K)\xi_2$ равны 0 (так как $H_E(\eta) > 0$ при $\eta \neq 0$), т.е. $\xi_1, \xi_2 \in K^{\perp}$. Так как ξ - крайняя точка $K^{\perp} \cap E^{\circ}$, то $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Следовательно, $\xi \in ex\, E^{\circ}$, что и требовалось.

ЛЕММА 7. Для каждого $K \in \mathcal{X}$ класс $\Sigma_K = \{\varphi_K(S) : S \in \Sigma\}$ - неразложимый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любой оператор $\hat{R} : B/K \to B/K$ такой, что все множества из Σ_K инвариантны относительно $\hat{R}$. Тогда и все замыкания этих множеств инвариантны относительно $\hat{R}$ и, следовательно, для каждого $S \in \Sigma$ имеет место равенство

$$H_{\varphi_K}(S)(\hat{\xi}) = H_{\varphi_K(S)}(\hat{R}^* \hat{\xi}) + H_{\varphi_K(S)}((I-\hat{R})^* \hat{\xi})$$

для всех $\hat{\xi} \in (B/K)^*$. Но пространство $(B/K)^*$ канонически изоморфно пространству $K^{\perp}$, причем так, что если $\xi \in K^{\perp}$, $x \in B$, $\hat{\xi}$ - функционал из $(B/K)^*$, соответствующий ξ, то $\xi(x) = \hat{\xi}(\varphi_K(x))$. Поэтому для всех $\xi \in K^{\perp}$ и всех $S \in \Sigma$ имеем:

$$H_p(\xi) = H_S(R\xi) + H_S((I_1 - R)\xi),$$

где R - оператор на $K^{\perp}$, соответствующий $\hat{R}^*$, I_1 - тождественный оператор на $K^{\perp}$.

Оператор R, очевидно, слабо непрерывен. Определим оператор $P: B^* \longrightarrow B^*$ по правилу $P(\xi) = R(P_K \xi)$, т.е. $P = RP_K$. Тогда $RP_K + (I_1 - R)P_K = P_K$. Следовательно,

$$H_S(\xi) = H_S(P_K \xi) + H_S((I-P_K)\xi) = H_S(RP_K \xi) + H_S((I_1 - R)P_K \xi) +$$
$$+ H_S((I-P_K)\xi) \geq H_S(RP_K \xi) + H_S((P_K - RP_K + I - P_K)\xi) =$$

$$= H_S(RP_K \xi) + H_S((I - RP_K)\xi) = H_S(P\xi) + H_S((I-P)\xi).$$

Таким образом, $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ и $P|K^{\perp} = R$ - слабо непрерывный оператор. По определению множеств из $\mathcal{K}$ существует $\alpha \in [0,1]$, такое, что $R = \alpha I_1$. Следовательно, $\hat{R} = \alpha \hat{I}$ ($\hat{I}$ - тождественный оператор на B/K). Это и означает, что класс Σ_K - неразложимый.

Закончим этот параграф доказательством утверждения (3) теоремы 2.

ЛЕММА 8. Пусть $S \in \widetilde{\Sigma}$, $x \in B$, E - абсолютно выпуклая окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$. Тогда

$$\rho_E(x, S) = \max_{K \in \mathcal{K}} \rho_E(\varphi_K(x), \varphi_K(S)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем формулу, которой мы воспользуемся в следующем параграфе:

$$\rho_E(x, S) = \max_{H_E(\xi) \le 1} (Re\,\xi(x) - H_S(\xi)).$$

Эта формула справедлива для любого выпуклого $S \subset B$ и абсолютно выпуклой окрестности нуля E.

Положим $a = \rho_E(x, S)$. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай $a > 0$. Из равенства $\rho_E(x,S) = a$ следует, что $x \in \overline{S + aE}$, откуда $Re\,\xi(x) \le H_S(\xi) + a H_E(\xi)$ для всех $\xi \in B^*$. С другой стороны, x не принадлежит открытому множеству $\bigcup_{0<\lambda<a} (S + \lambda E)$. Применяя теорему отделимости, получаем, что для некоторого функционала $\xi_0 \ne 0$ справедливо равенство :

$$Re\,\xi_0(x) = H_S(\xi_0) + a H_E(\xi_0),$$

причем без ограничения общности можно считать, что $H_E(\xi_0) = 1$. Таким образом, если $H_E(\xi) \le 1$, то $Re\,\xi(x) + H_S(\xi) \le a H_E(\xi) \le a$, а,с другой стороны, $Re\,\xi_0(x) + H_S(\xi_0) = a$, откуда $a = \max_{H_E(\xi)\le 1}(Re\,\xi(x) - H_S(\xi))$, что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству леммы. Пусть $S \in \widetilde{\Sigma}$; $x \in B$ и E - абсолютно выпуклая окрестность нуля из $\widetilde{\Sigma}$. Очевидно, можно ограничиться случаем $a=\rho_\varepsilon(x,S)>0$. Из доказанной выше формулы легко следует, что для каждого $K\in\mathcal{K}$

$$\rho_\varepsilon(\varphi_K(x),\varphi_K(S))=\max_{H_\varepsilon(\xi)\le 1,\ \xi\in K^\perp}(\operatorname{Re}\xi(x)-H_\rho(\xi)),$$

поэтому достаточно показать, что среди всех функционалов из $E^\circ=\{\xi\in B^*: H_\varepsilon(\xi)\le 1\}$ найдется такой элемент η, что $\eta\in K^\perp$ для некоторого $K\in\mathcal{K}$ и $\operatorname{Re}\eta(x)-H_s(\eta)>a$.

Рассмотрим множество $F=\{\xi\in B^*: H_\varepsilon(\xi)=1,\ \operatorname{Re}\xi(x)-H_s(\xi)=a\}$. Это - непустое слабо компактное выпуклое множество, причем $H_\varepsilon(\xi)=1$ для всех $\xi\in F$ (так как $a>0$). Пусть $\eta\in ex\,F$. Покажем, что для любого оператора $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$ найдется число $\alpha\in[0,1]$ такое, что $P\eta=\alpha\eta$. Отсюда будет следовать, что одномерное подпространство B^*, натянутое на η_0, принадлежит $\mathfrak{M}$, и, следовательно, содержится в некотором максимальном подпространстве из $\mathfrak{M}$, иначе говоря, найдется $K\in\mathcal{K}$, для которого $\eta\in K^\perp$.

Пусть $P\in\mathcal{P}(\Sigma)$. Если $P\eta=0$ или $P\eta=\eta$, то все доказано. В противном случае положим $\alpha=H_\varepsilon(P\eta)$. Так как $1=H_\varepsilon(\eta)=H_\varepsilon(P\eta)+H_\varepsilon((I-P)\eta)$, то $0<\alpha<1$. Положим $\eta_1=\frac{P\eta}{\alpha}$, $\eta_2=\frac{(I-P)\eta}{1-\alpha}$. Тогда $\eta_1,\eta_2\in E^\circ$, и, следовательно, $\operatorname{Re}\eta_i(x)-H_s(\eta_i)\le a$ $(i=1,2)$. На самом деле в обоих этих неравенствах имеет место равенство. Действительно, в противном случае, учитывая слабую инвариантность S относительно P, имеем

$$H_s(\eta)=\alpha H_s(\eta_1)+(1-\alpha)H_s(\eta_2),$$

откуда $\operatorname{Re}\eta(x)-H_s(\eta)=\alpha[\operatorname{Re}\eta_1(x)-H_s(\eta_1)]+(1-\alpha)[\operatorname{Re}\eta_2(x)-H_s(\eta_2)]<a$, что противоречит выбору η.

Из равенств $\operatorname{Re}\eta_i(x)-H_s(\eta_i)=a$ вытекает, что $\eta_i\in F$ $(i=1,2)$, а так как $\eta\in ex\,F$ и $\eta=\alpha\eta_1+(1-\alpha)\eta_2$, то $\eta_1=\eta$ или, что то же, $P\eta=\alpha\eta$, что и требовалось доказать.

§ 4. Замкнутость образа выпуклого множества. Доказательство утверждения (4) теоремы 2

Известно [2], что если A - замкнутое линейное подпространство пространства $C(X)$ и F - замкнутое подмножество пространства X, удовлетворяющее условию: для любой меры μ, ортогональной к A (т.е. $\int_X f d\mu = 0$ для всех $f \in A$), сужение μ_F меры μ на F ортогонально к A (т.е. $\int_F f d\mu = 0$ для всех $f \in A$), то пространство $A|F$ замкнуто в $C(F)$.

Если обозначить через K подпространство $\{f \in C(X): f|F = 0\}$ пространства $C(X)$, то $C(F)$ изометрически изоморфно $C(X)/K$, а $A|F$ можно рассматривать как $\varphi_K(A)$. Кроме того, в пространстве мер на X (которое изоморфно $C(X)^*$) существует оператор P сужения мер на множество F. Это - идемпотентный оператор, проектирующий $C(X)^*$ на $K^\perp$. Условие "если $\mu \in A^\perp$, то $P_\mu \in A^\perp$", очевидно, эквивалентно следующему условию: " A слабо инвариантно относительно P ".

Как будет видно из следующей теоремы, при такой формулировке условия на A замкнутость $A|F$ (или, что то же, $\varphi_K(A)$) имеет место не только для линейных пространств, но и для произвольных выпуклых множеств. Из этой теоремы в силу леммы 5 также очевидным образом вытекает утверждение (4) теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B - пространство Фреше, S - замкнутое выпуклое подмножество, K - замкнутое линейное подпространство пространства B. Предположим, что существует линейный оператор $P: B^* \to B^*$, удовлетворяющий условиям:

(1) S слабо инвариантно относительно P;

(2) $P^2 = P$ и $P(B^*) = K^\perp$;

(3) существует фундаментальная система таких абсолютно выпуклых окрестностей нуля E, что для некоторого $\lambda > 0$ (зависящего от E) $H_E(P\xi) \le \lambda H_E(\xi)$ для всех $\xi \in B^*$. Тогда $\varphi_K(S)$ замкнуто в B/K.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, если B - банахово пространство, условие (3) равносильно непрерывности P по норме в пространстве B^*.

Доказательство будет основано на следующей лемме, которую мы докажем позже.

ЛЕММА 9. Существует фундаментальная система абсолютно выпуклых окрестностей нуля, слабо инвариантных относительно P. Пусть E и E_1 - такие окрестности, $E_1 \subset E$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ - соответствующие полунормы на B (и на B/K). Тогда для любых x, $y \in S$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $z \in S$ такой, что $\|\varphi_K(z-y)\|_1 \leq \varepsilon$ и $\|z-x\| \leq \|\varphi_K(y-x)\| + \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из S такова, что для некоторого $x \in B$ $\varphi_K(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_K(x_n)$. Покажем, что $\varphi_K(x) = \varphi_K(z)$ для некоторого $z \in S$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что ряд $\varphi_K(x_1) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_K(x_{n+1} - x_n)$ сходится абсолютно в B/K к элементу $\varphi_K(x)$. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ - убывающая фундаментальная последовательность абсолютно выпуклых окрестностей нуля, слабо инвариантных относительно P и $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$ - соответствующая последовательность полунорм. Выберем любую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$, и построим на индукции последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов S. Положим $z_1 = x_1$. Если уже выбраны $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то в соответствии с леммой 9 выберем $z_{n+1} \in S$ так, что

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|\varphi_K(x_{n+1} - z_n)\| n + \varepsilon_n ;$$

$$\|\varphi_K(z_{n+1} - x_{n+1}) n+1 \leq \varepsilon_n .$$

Как нетрудно проверить, при таком выборе z_n $(n=1,2,\ldots)$ ряд $z_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_{n+1} - z)$ сходится абсолютно в B. Отсюда следует, что $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in S$ и $\varphi_K(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_K(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_K(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_K(z_n - x_n) = \varphi_K(x)$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 9. Пусть E_0 - любая окрестность нуля, удовлетворяющая условию (3) теоремы. Тогда существует число $\lambda > 0$ такое, что $H_{E_0}(P\xi) \le \lambda H_{E_0}(\xi)$ и $H_{E_0}((I-P)\xi) \le \lambda H_{E_0}(\xi)$ для всех $\xi \in B^*$. Пусть $\|\cdot\|_0$ – полунорма, порожденная множеством E_0. Положим для $x \in B$

$$\|x\| = \max\{\sup_{P\xi=\xi,\, H_{E_0}(\xi)\le 1} Re\,\xi(x), \sup_{P\xi=0,\, H_{E_0}(\xi)\le 1} Re\,\xi(x)\}.$$

Легко проверяется, что полунормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_0$ эквивалентны и $E_0 \subset E = \{x \in B : \|x\| \le 1\}$. Кроме того, из определения полунормы $\|\cdot\|$ следует, что если $x \in E$, то $Re(P\xi)(x) \le H_{E_0}(P\xi)$ и $H_{E_0}((I-P)\xi) \ge Re((I-P)\xi)(x)$. Для любого $\xi \in B^*$ имеем:

$$H_E(\xi) = \sup_{x\in E} Re\,\xi(x) = \sup_{x \in E}[Re(P\xi)(x) + Re((I-P)\xi)(x)] \le$$

$$\le H_{E_0}(P\xi) + H_{E_0}((I-P)\xi) \le H_E(\xi) + H_E((I-P)\xi),$$

откуда следует, что E слабо инвариантно относительно P. Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Зафиксируем теперь две слабо инвариантные относительно P абсолютно выпуклые окрестности нуля E и E_1 такие, что $E_1 \subset E$, и обозначим через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ соответствующие полунормы на B (и на B/K). Пусть заданы x, $y \in S$. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in S$, так что $\|z-x\| \le \|\varphi_K(y-x)\| + \varepsilon$ и $\|\varphi_K(z-y)\|_1 \le \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что B – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_1$ (чтобы свести к этому случаю, достаточно вместо B рассмотреть пополнение нормированного пространства B/B_0 с нормой $\|\cdot\|_1$, где $B_0 = \{v \in B : \|v\|_1 = 0\}$, а вместо x, y и S – их образы при естественном отображении B на B/B_0. Кроме того, можно считать, что $y = 0$ (иначе, можно рассмотреть $S - y$ вместо S). Таким образом, нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in S$, так что $\|z-x\| \le \|\varphi_K(x)\| + \varepsilon$ и $\|\varphi_K(z)\|_1 \le \varepsilon$. Докажем эквивалентное утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ расстояние $\rho_E(x, A)$ от x до множества $A = \{z \in S : \|\varphi_K(z)\|_1 \le \varepsilon\}$ не превосходит $\|\varphi_K(x)\| + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Воспользуемся формулой:

$$\rho_\varepsilon(x,A) = \sup_{H_\varepsilon(\xi)\le 1} (Re\,\xi(x) - H_A(\xi))$$

(см. доказательство леммы 8).

Вначале заметим, что если $H_\varepsilon(\xi)\le 1$, то $H_{\varepsilon_1}(\xi)\le 1$ и $H_{\varepsilon_1}(P\xi)\le 1$, поэтому для всех $z\in A$, $|(P\xi)(z)\le H_{\varepsilon_1}(P\xi)\cdot$ $\cdot\|\varphi_\kappa(z)\|_1\le\|\varphi_\kappa(z)\|_1\le\varepsilon$.

Оценим $H_A(\xi)$ снизу, считая $H_\varepsilon(\xi)\le 1$.

$$H_A(\xi)= \sup_{z\in A} Re(\xi(z)) = \sup_{z\in A}[Re(P\xi)(z) + Re((I-P)\xi)(z)] \geq$$

$$\geq -\varepsilon + \sup_{z\in A} Re((I-P)\xi)(z) = -\varepsilon + H_A((I-P)\xi).$$

Представляя $Re\,\xi(x)$ в виде $Re(P\xi)(x) + Re((I-P)\xi)(x)$ и замечая, что $\sup\limits_{H_\varepsilon(\xi)\le 1}|(P\xi)(x)| = \|\varphi_\kappa(x)\|$, можно оценить $\rho_\varepsilon(x,A)$ следующим образом:

$$\rho_\varepsilon(x,A)\le\|\varphi_\kappa(x)\| + \sup_{H_\varepsilon(\xi)\le 1,\ P\xi=0} Re\,\xi(x) - H_A(\xi)) + \varepsilon.$$

Покажем теперь, что если $P\xi = 0$, то $H_A(\xi) = H_\rho(\xi)$, а так как $x\in S$, то отсюда будет следовать, что второе слагаемое в правой части последней оценки неположительно, и мы получаем требуемую оценку: $\rho_\varepsilon(x,A)\le\|\varphi_\kappa(x)\| + \varepsilon$.

Остается доказать, что если $P\xi=0$, то $H_A(\xi)=H_S(\xi)$.

Будем рассматривать B как вложенное во второе сопряженное пространство B^{**} (при этом для всех $\xi\in B^*$ и $X\in B^{**}$ будем писать $\xi(X)$ вместо $X(\xi)$). Обозначим через $\bar S$ замыкание S в слабой топологии $\sigma(B^{**}, B^*)$ на B^{**}, порожденной дуальной парой (B^{**}, B^*). Покажем, что $\bar S$ инвариантно относительно P^*. Действительно, если B^{**} рассматривать с топологией $\sigma(B^{**}, B^*)$, то сопряженное к нему пространство совпадает с B^*. Но для всех $\xi\in B^*$, $H_S(\xi)=H_{\bar S}(\xi)$, откуда $H_S(\xi) = H_{\bar S}(P\xi) + H_{\bar S}((I-P)\xi)$. Так как оператор P можно рассматривать как оператор, сопряженный к $P^*:$ $: P^{**}\longrightarrow B^{**}$ (считая, что P^* действует в пространстве B^{**} с топологией $\sigma(B^{**}, B^*)$, то по лемме I множество $\bar S$ инвариантно относительно P^*.

Пусть теперь $\xi \in B^*$, $P\xi = 0$. Возьмем любое $a < H_S(\xi)$, выберем $x \in S$ такое, что $Re\,\xi(x) > a$, и покажем, что найдется $v \in A$, для которого $Re\,\xi(v) > a$.

Так как $P\xi = 0$, то $\xi(x) = ((I-P)\xi)(x) = \xi((I-P)^* x)$, причем $(I-P)^* x \in \bar{S}$, поскольку $x \in S \subset \bar{S}$, $\bar{S}$ инвариантно относительно P^* и $0 \in \bar{S}$. Отсюда следует, что существует обобщенная последовательность $\{v_\beta\}$ элементов S, сходящаяся к $(I-P)^* x$ в топологии $\sigma(B^{**}, B)$. При этом $\lim\limits_\beta Re\,\xi(v_\beta) > a$ и для любого $\eta \in K^\perp$

$$\lim_\beta \eta(v_\beta) = \lim_\beta (P\eta)(v_\beta) = (P\eta)((I-P)^* x) = 0.$$

Последнее означает, что последовательность $\{\varphi_K(v_\beta)\}$ сходится к нулю слабо (т.е. в $\sigma(B/K, (B/K)^*)$ -топологии). В этом случае, как хорошо известно, для любого $\delta > 0$ и любого индекса β_0 найдется такая выпуклая комбинация $\varphi_K(v)$ элементов последовательности $\{\varphi_K(v_\beta)\}$ с индексами, большими β_0, что $\|\varphi_K(v)\|_1 < \delta$. Если взять β_0 такое, что $Re\,\xi(v_\beta) > a$ при $\beta > \beta_0$, то мы получим, что найдется такой элемент $v \in S$, что $\|\varphi_K(v)\|_1 < \delta$ и $Re\,\xi(v) > a$. Если теперь взять $\delta < \varepsilon$, то мы получаем, что $v \in A$, что и требовалось доказать.

§ 5. Замечания и примеры

I. Рассмотрим конечномерное пространство B. Пусть Σ - класс множеств, удовлетворяющий условиям теоремы I. В этом случае множество $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа элементов $K_1, K_2, \dots K_m$ и пространство B разлагается в прямое произведение

$$B = \varphi_{K_1}(B) \times \varphi_{K_2}(B) \times \dots \times \varphi_{K_m}(B),$$

причем так, что каждое $S \in \Sigma$ есть прямое произведение

$$S = \varphi_{K_1}(S) \times \varphi_{K_2}(S) \times \dots \times \varphi_{K_m}(S).$$

Если $P: B \to B$ - линейный оператор, то все множества из Σ инвариантны относительно P тогда и только тогда, когда каждое $K \in \mathcal{K}$ инвариантно относительно P. Поскольку $B^{**} = B$, оператор $Q: B^* \to B^*$ принадлежит $\mathcal{P}(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда все $S \in \Sigma$ инвариантны относительно $Q^*: B \to B$.

2. В случае произвольного локально-выпуклого пространства B это пространство можно рассматривать как подпространство (вообще говоря, незамкнутое) прямого произведения $B_1 = \prod\limits_{K \in \mathcal{K}} \varphi_K(B)$. При этом каждое $S \in \Sigma$ представляется в виде $S = B \cap \prod\limits_{K \in \mathcal{K}} \varphi_K(S)$.

Из утверждения (3) теоремы 2 вытекает, что даже если при некотором $K \in \mathcal{K}$ $\varphi_K(S)$ не замкнуто в B/K_1, множество S замкнуто в B, если B рассматривать в топологии прямого произведения, так как S можно представить в виде $S = B \cap \prod\limits_{K \in \mathcal{K}} \overline{\varphi_K(S)}$, где $\overline{\varphi_K(S)}$ - замыкание $\varphi_K(S)$ в B/K.

3. Пусть A - замкнутый выпуклый конус в пространстве $C(X)$, E - единичный шар в $C(X)$ и $\Sigma = \{A, E\}$. В этом случае теорема I принимает следующий вид.

Существует покрытие $\mathcal{K}$ пространства X, состоящее из попарно дизъюнктных компактов и такое, что:

(I) для каждого $K \in \mathcal{K}$ конус $A|K$ антисимметричен в том смысле, что если $f \in C(K)$, $0 \le f \le 1$ и $fg \in A|K$ и $(1-f)g \in A|K$ для всех $g \in A|K$, то $f \equiv const$;

(2) если $f \in C(X)$ и $f|K \in A|K$ для всех $K \in \mathcal{K}$, то $f \in A$;

(3) для каждого $K \in \mathcal{K}$ конус $A|K$ замкнут в $C(K)$.

Пусть A и B - конусы. Если $A \subset B$, то будем называть A подконусом конуса B. Обозначим через $C_+(X)$ конус всех неотрицательных функций из $C(X)$. Конус $A \subset C(X)$ будем называть мультипликативным, если $1 \in A$ и $fg \in A$ для всех $f, g \in A$.

В случае, если A - мультипликативный подконус конуса $C_+(X)$, то утверждение (2) принимает вид: если $f \in A|K$ и $1-f \in A|K$, то $f \equiv const$. Примером такого конуса может служить конус всех непрерывных неотрицательных монотонно возрастающих функций на отрезке $[0, I]$.

4. Пусть A - замкнутый выпуклый конус в пространстве $C(X)$, F - замкнутое подмножество пространства X. Обозначим для каждой меры $\mu \in C(X)^*$ через μ_F сужение меры

μ на F. Пусть, далее, A^* обозначает сопряженный конус, т.е. $A^* = \{\mu \in C(X)^* : \mu(f) \geq 0$ для всех $f \in A\}$ (здесь $\mu(f)$ означает $\int_X f\, d\mu$).

В этом случае применение теоремы 3 дает: если для каждой меры $\mu \in A^*$ меры μ_F и $\mu - \mu_F$ принадлежат A^*, то конус $A|F$ замкнут в $C|F$.

5. Результаты данной статьи можно несколько усилить, если распространить на случай произвольных выпуклых множеств в локально-выпуклых пространствах различные варианты обобщения теоремы Шилова-Бишопа, изложенные в работах [3] и [4], где показано, что изучение произвольных алгебр с равномерной сходимостью можно свести к изучению алгебр из более узкого класса, чем класс антисимметричных алгебр.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Р.Э. Вальскому за полезное обсуждение результатов работы и за исправление ряда неточностей, замеченных им при чтении рукописи.

Литература

1. E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstrass theorem. Pacific T. Math., 11, 3 (1961) 777-783.
2. I. Glicksberg. Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry. Trans. Amer. Math. Soc, 105, 3 (1962) 415-435.
3. Аренсон Е.Л., О некоторых свойствах алгебр непрерывных функций. ДАН СССР, 171, № 4 (1966), 767-769.
4. Аренсон Е.Л., Алгебры с равномерной сходимостью и восстанавливающие покрытия. Мат. сборник, т. 79, вып.2 (1969), 217-249.

Поступила в редакцию
25.X. 1970 г.