Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.95

КВАЗИТЕМПЫ РОСТА И ε, δ -СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕЙМАНА – ГЕЙЛА

О.И.Пак

Как известно [1,2], не все модели экономической динамики Неймана – Гейла обладают состоянием равновесия и темпом роста. Между тем эти понятия играют важную роль при изучении таких моделей. В настоящей работе вводятся в рассмотрение понятия ε, δ -состояния равновесия и квазитемпа роста. С их помощью удалось существенно уточнить и прояснить конструкцию темпов роста, приведенную в [1], построить теорию двойственности квазитемпов и при некоторых предположениях доказать теорему о магистрали в слабой форме для квазитемпа роста. Близкие вопросы были затронуты в работах [2,3]. В [2], в частности, было введено понятие ε, δ -состояния равновесия, в [3] – квазитемпа роста.

Приведем некоторые определения из [1], необходимые в дальнейшем. Рассматривается конечномерное арифметическое вещественное пространство R^n размерности n. Через R^n_+ обозначим конус векторов R^n с неотрицательными компонентами, через R^n – конус векторов R^n с неположительными компонентами. Пусть $Z \subset R^n_+ \times R^n_+$ – конус, двойственным к нему называется конус

$$Z' = \{(p,q) \in R^n_+ \times R^n_+ : p(x) \geq q(y) \ \forall (x,y) \in Z\}.$$

Моделью Неймана – Гейла называется выпуклый замкнутый конус Z, лежащий в $R^n_+ \times R^n_+$ и обладающий следующими свойствами: $(0,y) \notin Z$, если $y \neq 0$ и $Pr_2(Z) \cap \operatorname{int} R^n_+ \neq \emptyset$. Если $Pr_1(Z) = R^n_+$, модель называется правильной. Очевидно, что двойственный конус правильной модели Неймана – Гейла также является моделью Неймана - Гейла. Полагая $K=P_{r_1}(\mathcal{Z})$, получим, что модель Неймана - Гейла можно отождествить с суперлинейным отображением $a: K \to \Pi(R^n_+)$, где $\Pi(R^n_+)$ - множество всех непустых подмножеств R^n_+. Отображение a, графиком которого является модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$, называется производственным отображением модели. Отображение $na: K \to \Pi(R^n_+)$, где K - конус в R^n, называется нормальной оболочкой суперлинейного отображения $a: K \to \Pi(R^n_+)$, если для любого $x \in K$ множество $na(x)$ совпадает с нормальной оболочкой $n(a(x)) = (a(x) - R^n_+) \cap R^n_+$ множества $a(x)$. Нормальной оболочкой модели Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$ с производственным отображением a называется конус $n\mathcal{Z}$, который является графиком отображения na. Модель Неймана - Гейла называется нормальной, если $\mathcal{Z} = n\mathcal{Z}$.

Пусть $\mathcal{Z}$ - выпуклый конус, лежащий в пространстве, натянутом на орты с номерами $i_1, \dots, i_N$, которое мы будем обозначать через $R(i_1, \dots, i_N)$, обладает тем свойством, что $\mathcal{Z} \cap int(R(i_1, \dots, i_N) \times R(i_1, \dots, i_N)) \neq \emptyset$. Тогда определим множество индексов $\mathcal{J}_\mathcal{Z} = \{i_1, \dots, i_N\}$. Величина

$$\alpha_\mathcal{Z} = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathcal{Z} \\ (x,y)\neq 0}} \min_{i \in \mathcal{J}_\mathcal{Z}} \frac{y^i}{x^i}$$

называется неймановским темпом роста конуса $\mathcal{Z}$. Последовательность (x_k, y_k) элементов конуса $\mathcal{Z}$ называется неймановской, если

$$\min_{i \in \mathcal{J}_\mathcal{Z}} \frac{y^i_k}{x^i_k} \to \alpha_\mathcal{Z}.$$

Для конуса $\mathcal{Z}$ определим множество индексов $I_\mathcal{Z} = \{i \in \mathcal{J}_\mathcal{Z} \mid$ существует неймановская последовательность $(x_k, y_k) \in \mathcal{Z}$ такая, что $y^i_k > 0$ для любого $k\}$.

**Для выпуклого телесного конуса $\mathcal{Z} \subset R^n_+ \times R^n_+$ опишем построение, результатом которого является упорядоченное множество конусов $g(\mathcal{Z}) = \{\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_N\}$, где N - число, зависящее от $\mathcal{Z}$ [1]. Обозначим $\Gamma_1 = R^n_+$, тогда $\mathcal{Z} \subset \Gamma_1 \times \Gamma_1$. Положим $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}$. Если $\mathcal{J}_{\mathcal{Z}_1} = I_{\mathcal{Z}_1}$, построение закончено и $N = 1$. Если же $\mathcal{J}_{\mathcal{Z}_1} \neq I_{\mathcal{Z}_1}$, обозначим через Γ_2 грань конуса R^n_+, натянутую на орты с номерами из $\mathcal{J}_{\mathcal{Z}_1} \setminus I_{\mathcal{Z}_1}$. Определим $\mathcal{Z}_2$ как проекцию $\mathcal{Z}_1$ на грань $\Gamma_2 \times \Gamma_2$. Если $\mathcal{J}_{\mathcal{Z}_2} = I_{\mathcal{Z}_2}$, построение закончено и $N = 2$. В противном случае строим грань Γ_3 и т.д. Процесс построения конечен, всегда $N \leq n$. Положим $\alpha_\nu = \alpha_{\mathcal{Z}_\nu}$, $I_\nu = I_{\mathcal{Z}_\nu}$.
Заметим, что $\mathcal{J}_\mathcal{Z} = \bigcup_{\mu=1}^{N} I_\mu$ и $I_\mu \cap I_\nu = \emptyset$ при $\mu \neq \nu$. В**

дальнейшем построенное таким образом упорядоченное множество конусов будем обозначать через $g(\mathcal{Z})=\{\mathcal{Z}_1,\dots,\mathcal{Z}_N\}$.

ЛЕММА А [I]. Пусть $\mathcal{Z}$ – выпуклый телесный конус в $R^n_+ \times R^n_+$ с конечным неймановским темпом роста. Тогда для любого номера ν от 1 до N и любого $\varepsilon > 0$ найдется процесс $(x,y)\in\mathcal{Z}$ такой, что

а) $\min\limits_{\mu\leq\nu} \alpha_\mu - \min\limits_{i\in J_\mathcal{Z}} \frac{y^i}{x^i} \leq \varepsilon$,

б) $x^i=y^i=0$ для всех $i\in J_\mathcal{Z} \setminus \bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} I_\mu$,

в) $y^i>0$ для всех $i\in \bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} I_\mu$.

СЛЕДСТВИЕ. Числа α_ν строго убывают с ростом ν.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, найдется номер $\nu>1$ такой, что $\min\limits_{\mu\leq\nu-1} \alpha_\mu = \alpha_{\mu_0} \leq \alpha_\nu$. В условиях леммы $\alpha_1<\infty$, следовательно, $\alpha_{\mu_0}<\infty$. Согласно лемме А, для номера ν найдется последовательность процессов $(x_k, y_k)\in\mathcal{Z}$ и последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0$, для которых выполняется

$$\alpha_{\mu_0} - \min_{i\in J_\mathcal{Z}} \frac{y^i_k}{x^i_k} \leq \varepsilon_k$$

и $y^i_k>0$ для всех $i\in \bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} I_\mu$. Проекции $Pr_{\Gamma_{\mu_0}\times\Gamma_{\mu_0}}(x_k,y_k)$ процессов (x_k,y_k) на грань $\Gamma_{\mu_0}\times\Gamma_{\mu_0}$ образуют неймановскую последовательность конуса $\mathcal{Z}_{\mu_0}$, при этом $y^i_k>0$ для $i\in\bigcup\limits_{\mu=\mu_0+1}^{\nu} I_\mu$ и для любого k, что противоречит определению I_{μ_0}. Следствие доказано.

ЛЕММА Б [I]. Пусть $\mathcal{Z}$ – выпуклый телесный конус в $R^n_+\times R^n_+$ с конечным неймановским темпом роста $\alpha_\mathcal{Z}$. Тогда найдется функционал $p\geq 0$, $p\neq 0$ такой, что $p(y)\leq\alpha_\mathcal{Z}\, p(x)$ для всех $(x,y)\in\mathcal{Z}$.

ЛЕММА I. Пусть $\mathcal{Z}$ – выпуклый телесный в $R^n_+\times R^n_+$ конус с конечным неймановским темпом роста. Тогда для любого $\delta>0$ существуют функционалы $p,q\in int\,R^n_+$ такие, что $q\geqslant(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)p$, $(p,q)\in Z'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конус $V_Z=\{(-x,y):(x,y)\in Z\}$ и его замыкание $\bar V_Z$. По условию леммы $(0,y)\in Z$ только тогда, когда $y=0$, следовательно, $\bar V_Z\cap R^n_+\times R^n_+=\{0\}$. Рассмотрим конус $W_{Z,\delta}=\{\lambda(-\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)\bar x,\bar x):\lambda>0,\bar x\in R^n_+\}$ при $\delta<\frac{1}{\alpha_Z}$. Поскольку для $(-x,y)\in V_Z$ выполнено $\alpha_Z=\min\limits_{i\in J_Z}\frac{y^i}{x^i}$, а для $(-x,y)\in W_{Z,\delta}\setminus\{0\}$ имеет место неравенство $y>\alpha_Z x$, справедливо соотношение $\bar V_Z\cap W_{Z,\delta}=\{0\}$. Обозначим через $C=co\{R^n_+\times R^n_+,W_{Z,\delta}\}$ выпуклую оболочку конусов $R^n_+\times R^n_+$ и $W_{Z,\delta}$. Пусть $c=(-c_1,c_2)\in C\setminus R^n_+\times R^n_+\setminus W_{Z,\delta}$. Тогда верно представление

$$c=\alpha\bar\lambda(-(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)\bar x,\bar x)+(1-\alpha)(\tilde x,\tilde y)=(-c_1,c_2),$$

причем $(\tilde x,\tilde y)\in R^n_+\times R^n_+\setminus\{0\}$, $(-(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)\bar x,\bar x)\in W_{Z,\delta}\setminus\{0\}$, $\bar\lambda>0$, $0<\alpha<1$. Для c имеет место цепочка неравенств

$$\alpha_Z c_1=\alpha_Z(\alpha\lambda(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)\bar x+(\alpha-1)\tilde x)<$$

$$<\alpha\bar\lambda(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)\bar x<\alpha\bar\lambda\bar x+(1-\alpha)\tilde y=c_2.$$

Таким образом, $c_2>\alpha_Z c_1$ для любого $(-c_1,c_2)\in C\setminus R^n_+\times R^n_+\setminus W_{Z,\delta}$, в то время как для $(-x,y)\in V_Z$ всегда $\min\limits_{i\in J_Z}\frac{y^i}{x^i}\leqslant\alpha_Z$. Итак, $V_Z\cap C=\{0\}$. Пользуясь теоремой отделимости, можно показать, что найдется $(p,q)\in int(R^n_+\times R^n_+)$ такой, что $\max\limits_{(x,y)\in V_Z}(p,q)(p,x)=$

$$=0=\min_{(x,y)\in C}(p,q)(x,y).$$ Из левого равенства получаем, что $p(x)\geqslant q(y)$ для любого $(x,y)\in Z$. Из правого равенства, учитывая включение $W_{Z,\delta}\subset C$, получаем $q\geqslant(\frac{1}{\alpha_Z}-\delta)p$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Z - выпуклый телесный конус в $R^n_+\times R^n_+$ с конечным неймановским темпом роста. Тогда для любого номера ν найдутся функционалы $p,q\in int\,R^n_+$ такие, что $q\geqslant(\frac{1}{\alpha_\nu}-\delta)p$, $p^i>0$ для всех $i\in J_Z$ и $p^i=q^i=0$ для всех $i\in J_Z\setminus J_{Z_\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме I, найдется линейный функционал $(p_\nu, q_\nu) \in \mathcal{Z}'_\nu$ такой, что $p_\nu > 0$, $q_\nu > 0$, $q_\nu \geq (\frac{1}{\alpha_\nu} - \delta) p_\nu$. Положив

$$p^i = \begin{cases} p_\nu^i, & \text{если } i \in J_{\mathcal{Z}_\nu}, \\ 0, & \text{если } i \in J_{\mathcal{Z}} \setminus J_{\mathcal{Z}_\nu}, \end{cases}$$

$$q^i = \begin{cases} q_\nu^i, & \text{если } i \in J_{\mathcal{Z}_\nu}, \\ 0, & \text{если } i \in J_{\mathcal{Z}} \setminus J_{\mathcal{Z}_\nu}, \end{cases}$$

получим функционал (p, q), который и является искомым. Следствие доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что задано ε, δ -состояние равновесия выпуклого телесного конуса $\mathcal{Z} \subset R_+^n \times R_+^n$ с конечным неймановским темпом роста, если указаны число $\alpha > 0$, процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{Z}$ и функционал $(\bar{p}, \bar{q}) \in R_+^n$ такой, что $(p, q) \in \mathcal{Z}'$, $(\alpha - \varepsilon)\bar{x} \leq \bar{y}$, $(\frac{1}{\alpha} - \delta)\bar{p} \leq q$, $\bar{q}(\bar{y}) > 0$. Число α называется темпом роста ε, δ -состояния равновесия. Число α называется квазитемпом роста конуса $\mathcal{Z}$, если для любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется ε, δ -состояние равновесия с темпом роста α.

В этих терминах состояние равновесия [I] можно определить как 0,0-состояние равновесия с $q = \alpha^{-1} p$, где α - темп роста состояния равновесия.

В [3] было дано следующее определение квазитемпа роста модели Неймана - Гейла: "Число α называется квазитемпом роста модели Неймана - Гейла, если существует процесс $(x, y) \in \mathcal{Z}$ такой, что $\alpha x \leq y$ и неравенство $y \leq (y' - \alpha x')$ не имеет решения $(x', y') \in \mathcal{Z}$". Нетрудно заметить, что для модели Неймана - Гейла в свете следствия к лемме А это определение совпадает с определением квазитемпа роста модели, данным в настоящей работе.

ТЕОРЕМА А [I]. *Для того чтобы число α являлось темпом роста модели Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся конус $\mathcal{Z}_\nu$ в множестве $g(\mathcal{Z})$, обладающий неймановским состоянием равновесия с темпом роста $\alpha_\nu = \alpha$.*

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{Z}$ – выпуклый телесный в $R_+^n \times R_+^n$ конус с конечным неймановским темпом роста. Тогда множество квазитемпов роста этого конуса совпадает с множеством чисел α_ν.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что любое из чисел α_ν является квазитемпом роста модели $\mathcal{Z}$. Действительно, для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ согласно лемме А и следствию к лемме I найдутся процесс $(x,y) \in \mathcal{Z}$ и функционал $(p,q) \geq 0$ такие, что $q \geq (\frac{1}{\alpha_\nu} - \delta)p$, $y \geq (\alpha_\nu - \varepsilon)x$, $(p,q) \in \mathcal{Z}'$, $q^i > 0$, $y^i > 0$ для всех $i \in I_{\alpha_\nu}$, т.е. $q(y) > 0$. Таким образом, $\alpha_\nu, (x,y), (p,q)$ образуют ε, δ –состояния равновесия. В силу произвольности ε, δ число α является квазитемпом роста модели.

Докажем теперь, что любой квазитемп роста конуса совпадает с одним из чисел α_ν. Пусть α – квазитемп роста конуса. Если $\alpha > \alpha_1$, то при $\varepsilon < \alpha - \alpha_1$ ни для какого процесса $(x,y) \in \mathcal{Z}$ не выполнено неравенство $(\alpha - \varepsilon)x \leq y$. Следовательно, $\alpha \leq \alpha_1$. Обозначим $b(\alpha) = \min\limits_{\alpha_\nu \geq \alpha} \alpha_\nu - \alpha$ и докажем, что $b(\alpha) = 0$. Предположим противное: $b(\alpha) > 0$. Зададим последовательность $\varepsilon_k > 0, \delta_k > 0, \varepsilon_k \to 0, \delta_k \to 0$ и найдем ε_k, δ_k –состояние равновесия $\alpha, (x_k, y_k), (p_k, q_k)$, по которому определим множество индексов

$$Q_k = \Big\{ i \in J_{\mathcal{Z}} : p_k^i > 0,\ y_k^i \leq \alpha x_k^i + \varepsilon_k x_k^i + \frac{\delta_k \alpha^2 - \varepsilon_k \delta_k \alpha - \varepsilon_k}{(1 - \alpha\delta_k)\alpha_k}, \text{ где } \alpha_k = \min_{p_k^i > 0} p_k^i \Big\}.$$

Покажем, что $p_k^i = 0$ для любого $i \in Q_k$. Допустим, существует $i_0 \in Q_k$ такой, что $p_k^{i} > 0$ и одновременно

$$y_k^{i_0} > \alpha x_k^{i_0} - \varepsilon_k x_k^{i_0} + \frac{\delta_k \alpha^2 - \varepsilon_k \delta_k + \varepsilon_k}{(1 - \delta_k \alpha)\alpha_k} p_k(x_k).$$

По определению ε_k, δ_k –состояния равновесия $y_k^i \geq (\alpha - \varepsilon_k) x_k^i$, $q_k^i \geq (\frac{1}{\alpha} - \delta_k) p_k^i$. Объединяя последние четыре неравенства, получаем

$$q_k(y_k) > (\tfrac{1}{\alpha} - \delta_k) p_k (\alpha - \varepsilon_k) x_k + (\tfrac{1}{\alpha} - \delta_k) p_k^{i_0} p_k(x_k) \cdot$$
$$\cdot \frac{\delta_k \alpha^2 + \varepsilon_k - \varepsilon_k \delta_k \alpha}{(1 - \delta_k \alpha)\alpha_k} \geq p_k(x_k) - \delta_k \alpha\, p_k(x_k) + \delta_k \varepsilon_k\, p_k(x_k) +$$

$$+\delta_k \alpha\, p_k(x_k) - \delta_k \varepsilon_k p_k(x_k) + \frac{\varepsilon_k}{\alpha} p_k(x_k) = p_k(x_k),$$

т.е. для $(p_k, q_k) \in Z'$, $(x_k, y_k) \in Z$ выполняется неравенство $q_k(y_k) > p_k(x_k)$, что противоречит определению двойственного конуса. Таким образом, предположение неверно и $p_k^i = 0$ для любого $i \in Q_k$.

Обозначим первый из номеров ν таких, что $I_\nu \cap Q_k \neq \emptyset$, через ν_k. Очевидно, что $Q_k \subset \bigcup_{\mu=\nu_k}^{n} I_\mu$ и $p_k^i = 0$ при $i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu_k-1} I_\mu$. Для любого k выполнено

$$\alpha_{\nu_k} = \alpha_{Z_{\nu_k}} = \sup_{(x,y)\in Z} \min_{i \in \bigcup_{\mu=\nu_k}^{n} I_\mu} \frac{y^i}{x^i} \geq \alpha - \varepsilon_k .$$

Положим $\bar{\alpha} = \underline{\lim}\, \alpha_{\nu_k}$ и выберем подпоследовательность $\alpha_{\nu_{k_j}} \to \bar{\alpha}$. Из вышесказанного вытекает, что $\bar{\alpha} \geq \alpha - \varepsilon_{k_j}$, но $\varepsilon_{k_j} \to 0$, следовательно, $\bar{\alpha} \geq \alpha$. По предположению $\bar{\alpha} - \alpha \geq b^{i}(\alpha) > 0$. Обозначим $\mu_{k_j} = \bar{\alpha} - \alpha + \varepsilon_{k_j} \geq b(\alpha) > 0$. Тогда, согласно лемме A, существует процесс $(\bar{x}_{k_j}, \bar{y}_{k_j}) \in Z$ такой, что $\bar{y}_{k_j} \geq (\alpha - 2\varepsilon_{k_j} + \mu_{k_j})\bar{x}_{k_j}$, $\bar{y}_{k_j}^i > 0$ для $i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu_{k_j}} I_\mu$. По определению ε_k, δ_k -состояния равновесия $q_{k_j} \geq (\alpha^{-1} - \delta_{k_j})\, p_{k_j}$. Из последних двух соотношений вытекает неравенство

$$q_{k_j}(\bar{y}_{k_j}) \geq p_{k_j}(\bar{x}_{k_j}) + \frac{\mu_{k_j}}{2} p_{k_j}(x_{k_j}) +$$
$$+ \left(2\varepsilon_{k_j}\delta_{k_j} - \alpha\delta_{k_j} - \frac{2\varepsilon_{k_j}}{\alpha} - \delta_{k_j}\mu_{k_j}\right) p_{k_j}(x_{k_j}). \qquad \text{(I)}$$

По определению Q_{k_j} имеем $Q_{k_j} \cap I_{\nu_{k_j}} \neq \emptyset$), т.е. $q_{k_j}(\bar{y}_{k_j}) > 0$. Поскольку $\varepsilon_{k_j}, \delta_{k_j} \to 0$, в то время как $\mu_{k_j} \to b$, $\mu_{k_j} \geq b$, из соотношения (I) при достаточно больших k_j получаем $q_{k_j}(\bar{y}_{k_j}) > p_{k_j}(\bar{x}_{k_j})$, что противоречит определению двойственного конуса. Итак, предположение неверно, и для любого квазитемпа роста конуса α выполнено $b(\alpha) = 0$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2. П у с т ь $Z \subset R_+^n \times R_+^n$ – в ы п у к л ы й к о н у с с к о н е ч н ы м н е й м а н о в с к и м т е м п о м р о с т а т а к о й, ч т о $Z \cap \operatorname{int}(R_+^n \times R_+^n) \neq \emptyset$, nZ – е г о н о р м а л ь н а я о б о л о ч к а, т о г д а $\alpha_Z = \alpha_{nZ}$, $I_Z = I_{nZ}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ – неймановская последовательность конуса nZ. Так как $Z \subset R_+^n \times R_+^n$, справедливо включение

$$n(a(\mathring{x}_k)) \subseteq \{ y \mid \text{ существует } \bar{y} \in a(\mathring{x}_k) : y \leq \bar{y} \},$$

но $\mathring{y}_k \in n(a(\mathring{x}_k))$, следовательно, найдется $y_k \in a(\mathring{x}_k)$, $y_k \geq \mathring{y}_k$. Из включения $\mathcal{Z} \subset n\mathcal{Z}$ вытекает $\alpha_{\mathcal{Z}} \leq \alpha_{n\mathcal{Z}}$. Очевидно, что последовательность $(\mathring{x}_k, y_k) \in \mathcal{Z}$ также является неймановской для $n\mathcal{Z}$, таким образом, $\alpha_{\mathcal{Z}} = \alpha_{n\mathcal{Z}}$. Из последнего равенства и из включения $\mathcal{Z} \subset n\mathcal{Z}$ получаем $I_{\mathcal{Z}} \subseteq I_{n\mathcal{Z}}$. Обратное включение вытекает из произвольности неймановской последовательности и неравенства $y_k \geq \mathring{y}_k$. Таким образом, $I_{n\mathcal{Z}} = I_{\mathcal{Z}}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{Z} \subset R^n_+ \times R^n_+$ – выпуклый конус с конечным неймановским темпом роста такой, что $\mathcal{Z} \cap int(R^n_+ \times R^n_+) \neq \emptyset$. Тогда для любого $\nu = 1, \ldots, N$ имеют место равенства:

$$I_\nu = I_{(n\mathcal{Z})_\nu}, \quad \alpha_\nu = \alpha_{(n\mathcal{Z})_\nu}. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\nu = 1$ утверждение следствия очевидно. Пусть равенства (2) доказаны для всех $\nu_0 < V_0$. Тогда конусы $\mathcal{Z}_{\nu_0}$ и $(n\mathcal{Z})_{\nu_0}$ получаются проектированием конусов $\mathcal{Z}_{\nu_0 - 1}$ и $(n\mathcal{Z})_{\nu_0 - 1}$ на одну и ту же грань Γ_{ν_0} конуса R^n_+. Отсюда следует

$$(n\mathcal{Z})_{\nu_0} = Pr_{\Gamma_{\nu_0} \times \Gamma_{\nu_0}}(n\mathcal{Z}) = n\, Pr_{\Gamma_{\nu_0} \times \Gamma_{\nu_0}}(\mathcal{Z}) = n(\mathcal{Z}_{\nu_0}).$$

Конус $\mathcal{Z}_{\nu_0}$ удовлетворяет условиям леммы 2, согласно которой равенства (2) выполнены для конусов $\mathcal{Z}_{\nu_0}$ и $n(\mathcal{Z}_{\nu_0}) = (n\mathcal{Z})_{\nu_0}$. Следствие доказано.

Перейдем к описанию связей квазитемпов роста прямой и двойственной моделей. Пусть $\mathcal{Z} \subset R^n_+ \times R^n_+$ и $\mathcal{Z}' \subset R^n_+ \times R^n_+$ – выпуклые телесные взаимно-двойственные конусы с конечными неймановскими темпами роста. Построим множества $g(\mathcal{Z}) = \{\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_N\}$ и $g(\mathcal{Z}') = \{\mathcal{Z}'_1, \ldots, \mathcal{Z}'_{N'}\}$ и обозначим $\alpha_\nu = \alpha_{\mathcal{Z}_\nu}$, $\alpha'_\nu = \alpha_{\mathcal{Z}'_\nu}$, $I_\nu = I_{\mathcal{Z}_\nu}$, $I'_\nu = I_{\mathcal{Z}'_\nu}$.

ЛЕММА 3. Если $\alpha_\nu \alpha'_\mu > 1$, то $I_\nu \cap I'_\mu = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существуют ν и μ такие, что $\alpha_\nu \alpha'_\mu > 1$ и $I_\nu \cap I'_\mu \neq \emptyset$. По лемме А по любому $\varepsilon > 0$ можно найти $(x, y) \in \mathcal{Z}$ и $(p, q) \in \mathcal{Z}'$, которые удовлетворяют условию $y \geq (\alpha_\nu - \varepsilon) x$ и $q \geq (\alpha'_\mu - \varepsilon) p$, причем $y^i > 0$ для всех $i \in I_\nu$ и $q^i > 0$ для всех $i \in I'_\mu$. По предположению, $I_\nu \cap I'_\mu \neq \varnothing$, следовательно, $q(y) > 0$. Кроме того,

$$q(y) \geqslant (\alpha_\nu \alpha'_\mu - \varepsilon(\alpha_\nu + \alpha'_\mu) + \varepsilon^2)\,p(x).$$

Так как по предположению $\alpha_\nu \alpha'_\mu > 1$, то при достаточно малых ε получим $q(y) > p(x)$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 4. $\alpha'_1 \alpha_N = 1$, $I'_1 = I_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Б существует функционал $p_N > 0$ такой, что $p_N(y_N) \leqslant \alpha_N p_N(x_N)$ для всех $(x_N, y_N) \in Z_N$. Построим $p \in R^n_+$, положив

$$p^i = \begin{cases} p^i_N, & \text{если } i \in J_{Z_N}, \\ 0, & \text{если } i \in J_Z \setminus J_{Z_N}. \end{cases}$$

Очевидно, что $(p, \frac{1}{\alpha_\nu} p) \in Z'$; это значит, что $\alpha_{Z'} = \alpha'_1 \geqslant \frac{1}{\alpha_N}$, но тогда в силу следствия к лемме А $\alpha'_1 \alpha_\nu \geqslant 1$ для всех $\nu < N$. Отсюда, опираясь на лемму 3, получаем $I'_1 \subset I_N$. Предположив $\alpha'_1 \alpha_N > 1$, в силу леммы 3 имеем $I'_1 = \varnothing$, что невозможно. Итак, $\alpha'_1 \alpha_N = 1$. Тогда по следствию к лемме I $I'_1 = I_N$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Z, Z' \subset R^n_+ \times R^n_+$ – выпуклые телесные взаимно-двойственные конусы с конечными неймановскими темпами роста. Тогда

$$\alpha_\nu = (\alpha'_{N-\nu+1})^{-1}, \tag{3}$$

$$I_\nu = I'_{N-\nu+1}. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\nu = N$ равенства (3),(4) выполняются в силу леммы 4. Предположим, что они верны для $\nu = \bar\nu + 1, \ldots, N$, и докажем их для $\nu = \bar\nu$. По предположению, $I'_{N-\bar\nu+1} \subset \bigcup_{\mu=1}^{\bar\nu} I_\mu$, отсюда по лемме 2 получаем, что $\alpha_{\bar\nu} \alpha'_{N-\bar\nu+1} \leqslant 1$. Но в силу следствия к лемме I $\alpha_{\bar\nu} \alpha'_{N-\bar\nu+1} = 1$, причем $I_{\bar\nu} \subset I'_{N-\bar\nu+1}$. Из леммы 3 следует, что $I_\nu = I'_{N-\bar\nu+1}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые определения из [I], необходимые в дальнейшем.

Пусть Z – правильная нормальная модель Неймана – Гейла, α_ν – квазитемп роста этой модели. Положим $\Pi_{\alpha_\nu} = \{p > 0 \mid p \in \alpha_\nu a'(p)\}$. Множество Π_{α_ν} непусто, при этом $\Pi_{\alpha_\nu} \cup \{0\}$ представляет собой выпуклый замкнутый конус. Нетрудно убедиться в том, что все функционалы из $ri\,\Pi_{\alpha_\nu}$ имеют одни и те же ненулевые координаты. Через G_{α_ν} обозначим множество всех номеров i из $I=\{1,\dots,n\}$, для которых $p^i>0\,(p\in ri\,\Pi_{\alpha_\nu})$. Отметим, что если $p\in\Pi_{\alpha_\nu}$, то последовательность $\varphi_p=(p,\alpha_\nu^{-1}p,\dots,\alpha_\nu^{-t}p,\dots)$ является траекторией модели $\mathcal{Z}'$, двойственной к $\mathcal{Z}$.

Говорят, что траектория $\chi=(x_t)$ модели $\mathcal{Z}$ имеет средний темп роста α_ν, если эта траектория согласована с траекторией φ_p при некотором $p\in ri\,\Pi_{\alpha_\nu}$, иными словами, если $\lim \alpha_\nu^{-t}p(x_t)>0$. Траектория имеет средний темп роста α_ν в том и только в том случае, когда найдется индекс $i\in G_{\alpha_\nu}$, при котором $\overline{\lim}\,\alpha_\nu^{-t}x_t^i>0$. Если α_ν – темп роста $\mathcal{Z}$, заведомо существует траектория, имеющая средний темп роста α_ν [I]. Введем обозначение $N_{\alpha_\nu}=\mathcal{Z}\cap(\bigcap_{p\in\Pi_{\alpha_\nu}}H_p)$, где H_p – гиперплоскость функционала p.

ТЕОРЕМА 5. Пусть α_ν – квазитемп роста правильной нормальной модели Неймана – Гейла. Точка $x_0>0$ и функционал $f>0$ удовлетворяют следующим условиям:

а) из точки x_0 исходит траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$, растущая средним темпом α_ν;

б) найдутся положительные числа k' и k'' и функционал $p\in ri\,\Pi_{\alpha_\nu}$ такие, что $k'p\leq f\leq k''p$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Тогда для любой конечной траектории $\chi_T=(x_t)_0^T$, исходящей из x_0 и оптимальной в смысле f, число процессов (x_t,x_{t+1}) таких, что

$$\rho\left(\cdot\frac{(x_t,x_{t+1})}{|x_t|},N_{\alpha_\nu}\right)\geq\varepsilon,$$

не превосходит некоторого числа L, не зависящего от T.

Доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы о магистрали в слабой форме (см., например, [I]).

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, I973.

2. МОВШОВИЧ С.М. Теоремы о магистралях в моделях Неймана - Гейла. - Экономика и мат. методы, I969, т.5, вып. 6, с. 877-899.

3. BROMEK T., KANIEWSKA J., LOS J. Contributions to theory of von Neuman equilibria. - In: Computing equilibria: how and why. Amsterdam, 1976, p.203-216.

Поступила в ред.-изд. отдел
05.09.I98I г.