Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ЛИНЕЙНАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАДРОВ

А.К.Романов, А.И.Терехов

Математическое моделирование динамики кадров в организационных системах играет важную роль при прогнозировании и вариантных расчетах изменения численности и состава кадров на перспективу [1,2]. Основными характеристиками, которые учитываются в этом случае, являются служебный статус сотрудника и стаж его работы в данной организации. Если считать переменную времени t и переменную стажа s непрерывными, то описание динамики кадрового контингента можно осуществить в терминах функций плотности $I_j(s,t)$, где $I_j(s,t)ds$ является численностью индивидуумов j-й категории в момент времени t, общий стаж работы которых в организации принадлежит интервалу $(s, s+ds)$.

В данной работе рассматривается научная организация, персонал которой подразделяется на две категории: научных сотрудников без ученой степени и сотрудников с ученой степенью кандидата наук. Для описания движения кадров в системе с двумя выделенными квалификационно-должностными градациями строится непрерывновременная линейная детерминированная модель. Модели подобного рода применяются в демографии при моделировании динамики народонаселения с учетом возрастной структуры [3].

1. Формулировка и анализ модели

Будем предполагать, что плотности переходов сотрудников из 1-й градации во 2-ю, выбытия из 1-й и 2-й градаций пропорциональны плотностям численности и равны $\theta(s,t) I_1(s,t)$, $\varphi_1(s,t) I_1(s,t)$, $\sigma_2(s,t) I_2(s,t)$, где $\theta, \varphi_1, \sigma_2$ - соответствующие неотрицательные коэффициенты. Обозначим $\sigma_1(s,t) = \theta(s,t) + \varphi_1(s,t)$.

Балансовое уравнение для изменения численности индивидуумов в I-й градации в интервале $(t, t+\Delta t)$ имеет следующий вид:

$$I_1(s+\Delta s, t+\Delta t) = I_1(s,t) - \sigma_1(s,t) I_1(s,t)\Delta t,$$

где $\Delta t = \Delta s$. Разлагая $I_1(s+\Delta s, t+\Delta t)$ в ряд по формуле Тейлора для функций двух переменных и исключая $I_1(s,t)$ из обеих частей уравнения, получим

$$\frac{\partial I_1(s,t)}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial I_1(s,t)}{\partial t}\Delta t = -\sigma_1(s,t) I_1(s,t)\Delta t.$$

Поделив обе части на Δt и учитывая, что $\Delta s/\Delta t = 1$, окончательно имеем

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} + \frac{\partial I_1}{\partial t} = -\sigma_1(s,t) I_1(s,t). \qquad (I)$$

Балансовое уравнение для изменения численности индивидуумов во 2-й градации в интервале $(t, t+\Delta t)$ с учетом возможности переходов индивидуумов из I-й градации во 2-ю имеет следующий вид:

$$I_2(s+\Delta s, t+\Delta t) = I_2(s,t) - \sigma_2(s,t) I_2(s,t)\Delta t + \theta(s,t) I_1(s,t)\Delta t.$$

Произведя последовательность тех же операций, что и в первом случае, получим уравнение

$$\frac{\partial I_2}{\partial s} + \frac{\partial I_2}{\partial t} = -\sigma_2(s,t) I_2(s,t) + \theta(s,t) I_1(s,t). \qquad (2)$$

Вводя верхний предел ω для продолжительности пребывания индивидуумов в организации, будем считать, что уравнения (I) и (2) имеют место для $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant s < \omega$.

Начальные условия для уравнений (I) и (2) зададим обычным способом:

$$I_1(s,0) = I_1(s), \quad I_2(s,0) = I_2(s), \quad 0 \leqslant s < \omega, \qquad (3)$$

где $I_1(s)$, $I_2(s)$ - известные неотрицательные функции. В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$I_1(0,t)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s,t)\,I_1(s,t)+\sigma_2(s,t)\,I_2(s,t)\}\,ds\,,\quad t>0. \qquad (4)$$

$$I_2(0,t)=0,\, t\geqslant 0. \qquad (5)$$

Класс функций, в котором ищется решение сформулированной задачи, зависит от требований, налагаемых на коэффициенты φ_1, θ, σ_2 и функции $I_1(s)$, $I_2(s)$. Будем предполагать, что функции $I_1(s)$, $I_2(s)$, коэффициенты $\varphi_1, \theta, \sigma_2$ и их производные по t являются непрерывными при $0\leqslant s<\omega$.

Краевая задача (I)-(5) описывает динамику структуры кадров в системе с постоянной численностью персонала. В случае расширяющейся системы, когда рост численности персонала описывается монотонно возрастающей функцией $I(t)$ (причем $\int_0^{\omega}\{I_1(s)+I_2(s)\}\,ds=I(0)$), в граничное условие (4) должен быть введен член $I'(t)$. Будем считать функцию $I(t)$ непрерывно дифференцируемой на $[0,+\infty)$. Систему уравнений (I)-(5) с введенным в граничное условие (4) членом $I'(t)$ назовем задачей (P).

Покажем, что решение задачи (P) может быть сведено к решению интегрального уравнения восстановления. Пусть

$$B(t)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s,t)\,I_1(s,t)+\sigma_2(s,t)\,I_2(s,t)\}\,ds.$$

Применяя метод характеристик, получим общее решение уравнений (I) и (2):

$$I_1(s,t)=\{B(t-s)+I'(t-s)\}\,\ell_1(s,t),$$

$$I_2(s,t)=\{B(t-s)+I'(t-s)\}\,\ell_2(s,t)\int_0^{s}\frac{\ell_1(\tau,\tau+t-s)\,\theta(\tau,\tau+t-s)}{\ell_2(\tau,\tau+t-s)}\,d\tau, \qquad (6)$$

где $\ell_1(s,t)=exp\{-\int_0^{s}\sigma_1(\tau,\tau+t-s)\,d\tau\}$ есть доля лиц среди вновь принятых в организацию в момент $t-s$, которые в момент t будут находиться в I-й градации. Аналогичный смысл имеет функция $\ell_2(s,t)=exp\{-\int_0^{s}\sigma_2(\tau,\tau+t-s)\,d\tau\}$. Будем считать, что $\ell_1(s,t)$, $\ell_2(s,t)=0$ для $s\geqslant\omega$.

Условия согласования для решений задачи (P) можно записать следующим образом:

$$I_1(0,0)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s,0)I_1(s,0)+\sigma_2(s,0)I_2(s,0)\}ds+I'(0);$$

$$I_2(s,0)=I_1(s,0)\,\frac{l_2(s,0)}{l_1(s,0)}\int_0^{s}\frac{l_1(\tau,\tau-s)\theta(\tau,\tau-s)}{l_2(\tau,\tau-s)}d\tau,\ 0\le s<\omega.$$

Подставляя (6) в (4), получим

$$B(t)=\int_0^{\omega}f(s,t)B(t-s)ds+\int_0^{\omega}I'(t-s)f(s,t)ds, \qquad (7)$$

где

$$f(s,t)=\varphi_1(s,t)l_1(s,t)+\sigma_2(s,t)l_2(s,t)\int_0^{s}\frac{l_1(\tau,\tau+t-s)\theta(\tau,\tau+t-s)}{l_2(\tau,\tau+t-s)}d\tau.$$

Для $\omega<t<0$ функция $B(t)$ определяется через начальные данные:

$$B(t)=I_1(-t,0)/l_1(-t,0).$$

Поскольку $f(s,t)=0$ для $s>\omega$, то уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$B(t)=g(t)+\int_0^{t}f(s,t)B(t-s)ds,\ t\ge 0, \qquad (8)$$

где

$$g(t)=\int_0^{\omega}I'(t-s)f(s,t)ds+\int_t^{\infty}f(s,t)B(t-s)ds,\ t\ge 0. \qquad (9)$$

Полученное линейное интегральное уравнение имеет широкое применение в теории восстановления [4,5]. Путем подстановки $u=t-s$ уравнение (8) приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

$$B(t)=g(t)+\int_0^{T}f(t-u,t)B(u)du,\ t\ge 0.$$

В случае непрерывности и ограниченности функций $g(t)$ и $f(s,t)$ это уравнение имеет единственное непрерывное решение [6].

В дальнейшем будем предполагать, что $\theta(s,t)=\theta(s)$; $\varphi_1(s,t)=\varphi_1(s)$, $\sigma_2(s,t)=\sigma_2(s)$. Исследуем зависимость решений задачи (P) от начальных распределений $I_1(s)$, $\bar{I}_2(s)$ в этом случае.

Пусть $I_1(s,t)$, $I_2(s,t)$ и $\bar{I}_1(s,t)$, $\bar{I}_2(s,t)$ – решения задачи (P), соответствующие начальным распределениям $\bar{I}_1(s)$, $I_2(s)$ и $\bar{\bar{I}}_1(s)$, $\bar{\bar{I}}_2(s)$. Введем следующие обозначения:

$$B(t)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s)I_1(s,t)+\sigma_2(s)I_2(s,t)\}ds,$$
$$\bar{B}(t)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s)\bar{I}_1(s,t)+\sigma_2(s)\bar{I}_2(s,t)\}ds,$$
$$z_1(s,t)=I_1(s,t)-\bar{I}_1(s,t),\quad z_2(s,t)=I_2(s,t)-\bar{I}_2(s,t),$$
$$R(t)=z_1(0,t)=B(t)-\bar{B}(t),$$
$$\rho_1(s)=I_1(s)-\bar{I}_1(s),\quad \rho_2(s)=I_2(s)-\bar{I}_2(s).$$
Тогда $z_1(s,t)$, $z_2(s,t)$ являются решением следующей задачи (R) :
$$\frac{\partial z_1}{\partial s}+\frac{\partial z_1}{\partial t}=-\sigma_1(s)z_1(s,t),\quad 0\le s<\omega,\ t\ge 0;$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial s}+\frac{\partial z_2}{\partial t}=-\sigma_2(s)z_2(s,t)+\theta(s)z_1(s,t),\quad 0\le s<\omega,\ t\ge 0;$$
$$z_1(s,0)=\rho_1(s),\quad z_2(s,0)=\rho_2(s),\quad 0\le s<\omega;$$
$$z_1(0,t)=\int_0^{\omega}\{\varphi_1(s)z_1(s,t)+\sigma_2(s)z_2(s,t)\}ds,\quad t>0;$$
$$z_2(0,t)=0,\quad t\ge 0.$$
Отсюда
$$z_1(s,t)=\begin{cases}R(t-s)l_1(s), & s<t,\\ \rho_1(s-t)l_1(s)/l_1(s-t), & s\le t;\end{cases}$$
$$z_2(s,t)=\begin{cases}R(t-s)l_2(s)\int_0^s\frac{l_1(\tau)\theta(\tau)}{l_2(\tau)}d\tau, & s<t,\\ \rho_1(s-t)\frac{l_2(s)}{l_1(s-t)}\int_{s-t}^{s}\frac{l_1(\tau)\theta(\tau)}{l_2(\tau)}d\tau+\rho_2(s-t)\frac{l_2(s)}{l_2(s-t)}, & s\ge t.\end{cases}\tag{10}$$
Здесь
$$l_1(s)=\exp\Big\{-\int_0^s\sigma_1(\tau)d\tau\Big\},\quad l_2(s)=\exp\Big\{-\int_0^s\sigma_2(\tau)d\tau\Big\}.$$
Интегрирование системы (R) можно свести к решению интегрального уравнения восстановления
$$R(t)=\int_0^t f(s)R(t-s)ds+g(t),\tag{11}$$
где

$$f(s)=\varphi_1(s)l_1(s)+\sigma_2(s)l_2(s)\int\limits_0^s \frac{l_1(\tau)\theta(\tau)}{l_2(\tau)}d\tau,$$

функция $g(t)$ определяется через начальные условия и равна 0 для $t\geqslant\omega$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Если функции $\varphi_1(s)$ и $\sigma_2(s)$ ограничены сверху на $[0,\omega]$, то существует положительная константа k^* такая, что для $0\leqslant t\leqslant\omega$

$$|R(t)|\leqslant k^*\int\limits_0^\omega\{|\rho_1(s)|+|\rho_2(s)|\}ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению,

$$R(\tau)=B(\tau)-\bar{B}(\tau)=\int\limits_0^\omega\varphi_1(s)[I_1(s,\tau)-\bar{I}_1(s,\tau)]ds+$$

$$+\int\limits_0^\omega\sigma_2(s)[I_2(s,\tau)-\bar{I}_2(s,\tau)]ds.$$

Отсюда

$$|R(\tau)|\leqslant\int\limits_0^\omega\varphi_1(s)|I_1(s,\tau)-\bar{I}_1(s,\tau)|ds+\int\limits_0^\omega\sigma_2(s)|I_2(s,\tau)-\bar{I}_2(s,\tau)|ds\leqslant$$

$$\leqslant k\{\int\limits_0^\omega|I_1(s,\tau)-\bar{I}_1(s,\tau)|ds+\int\limits_0^\omega|I_2(s,\tau)-\bar{I}_2(s,\tau)|ds\},$$

где k - положительная константа. Для $t\geqslant 0$

$$\int\limits_0^t|R(\tau)|d\tau\leqslant k\int\limits_0^t\{\int\limits_0^\omega|I_1(s,\tau)-\bar{I}_1(s,\tau)|ds+\int\limits_0^\omega|I_2(s,\tau)-\bar{I}_2(s,\tau)|ds\}d\tau.$$

Обозначим внешний интеграл в правой части через $y(t)$. Из неравенства (I$'$) (см. приложение) имеем для $0\leqslant t\leqslant\omega$

$$y'(t)=\int\limits_0|I_1(s,t)-\bar{I}_1(s,t)|ds+\int\limits_0|I_2(s,t)-\bar{I}_2(s,t)|ds\leqslant ky(t)+G,$$

где

$$G=\int\limits_0^\omega\{|\rho_1(s)|+|\rho_2(s)|\}ds.$$

Тогда, согласно неравенству Гронуолла,

$$y(t)\leqslant G\int\limits_0^t[\exp(\int\limits_\tau^t kds)]d\tau=\frac{1}{k}G(e^{kt}-1).$$

Отсюда $y'(t)\leqslant Ge^{kt}$, и окончательно для $0\leqslant t\leqslant\omega$

$$\int\limits_0^\omega|I_1(s,t)-\bar{I}_1(s,t)|ds+\int\limits_0^\omega|I_2(s,t)-\bar{I}_2(s,t)|ds\leqslant$$

$$\leqslant e^{kt}\int\limits_0^\omega\{|\rho_1(s)|+|\rho_2(s)|\}ds$$

и

$$|R(t)|\leqslant ke^{k\omega}\int\limits_0^\omega\{|\rho_1(s)|+|\rho_2(s)|\}ds.$$

Докажем теперь следующее утверждение о локальной устойчивости решений задачи (P).

УТВЕРЖДЕНИЕ. П у с т ь $I_1(s,t)$, $I_2(s,t)$ и $\bar{I}_1(s,t)$, $\bar{I}_2(s,t)$ – р е ш е н и я з а д а ч и (P), о т в е ч а ю щ и е р а з л и ч н ы м н а ч а л ь н ы м у с л о в и я м: $I_1(s)$, $I_2(s)$ и $\bar{I}_1(s)$, $\bar{I}_2(s)$. Т о г д а д л я в с я к о г о с к о л ь у г о д н о м а л о г о $\varepsilon > 0$ н а й д е т с я δ_ε т а к о е, ч т о и з в ы п о л н е н и я у с л о в и й $|I_1(s)-\bar{I}_1(s)|$ и $|I_2(s)-\bar{I}_2(s)| < \delta_\varepsilon$ б у д е т с л е д о в а т ь, ч т о $|I_1(s,t)-\bar{I}_1(s,t)|$ и $|I_2(s,t)-\bar{I}_2(s,t)| < \varepsilon$ д л я $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если начальные условия выбраны так, что $|\rho_1(s)|$ и $|\rho_2(s)| < 1$, то согласно доказанной лемме для $t \in [0,\omega]$

$$|R(t)| < 2k^*\omega. \tag{12}$$

Возьмем $\varepsilon < 1$ и положим $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, \varepsilon/2k^*\omega\}$. Пусть $|\rho_1(s)|$, $|\rho_2(s)| < \delta_\varepsilon \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Докажем, что при этом $|z_1(s,t)|$, $|z_2(s,t)| < \varepsilon$. Поскольку $|\rho_1(s)|+|\rho_2(s)| < \varepsilon$, то, как следует из (10), для нашей цели достаточно доказать, что $|R(t)| < \varepsilon$. Так как $|\rho_1(s)|$, $|\rho_2(s)| < \frac{1}{2}\varepsilon < 1$, то, применяя соотношение (12), получаем: для $t \in [0,\omega]$

$$|R(t)| < 2k^*\omega\delta_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\bar{t} > \omega$ такое, что $|R(\tau)| < \varepsilon$ для $0 \leq \tau < \bar{t}$ и $|R(\bar{t})| = \varepsilon$. В соответствии с (11) $|R(\bar{t})| \leq \int f(s)|R(\bar{t}-s)|ds$. Поскольку $f(s)$ является функцией плотности вероятности, не сосредоточенной в нуле, то отсюда будет следовать, что $|R(\bar{t})| < \varepsilon$. Этим противоречием и завершается доказательство.

2. Численный эксперимент

Для построения разностной аппроксимации задачи (P) на основе метода характеристик воспользуемся схемой Кранка – Николсона второго порядка точности по переменным s и t. Имеем

$$\frac{I_{1,s+1}^{t+1} - I_{1,s}^{t}}{\Delta\xi} + \sigma_1^{s+\frac{1}{2}}\frac{I_{1,s+1}^{t} + I_{1,s}^{t}}{2} = 0,$$

$$\frac{I_{2,s+1}^{t+1} - I_{2,s}^{t}}{\Delta\xi} + \sigma_2^{s+\frac{1}{2}}\frac{I_{2,s+1}^{t+1} + I_{2,s}^{t}}{2} = \theta^{s+\frac{1}{2}}\frac{I_{1,s+1}^{t+1} + I_{1,s}^{t}}{2},$$

или
$$I^{t+1}_{1,s+1}=\frac{(1-\sigma_1^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})}{(1+\sigma_1^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})}I^t_{1,s},$$

$$I^{t+1}_{2,s+1}=\frac{(1-\sigma_2^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})}{(1+\sigma_2^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})}I^t_{2,s}+\frac{\theta^{s+\frac12}}{(1+\sigma_1^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})(1+\sigma_2^{s+\frac12}\frac{\Delta\xi}{2})}I^t_{1,s}.$$

Здесь $I^t_{1,s}=I_1(s\cdot\Delta\xi,t\cdot\Delta\xi);I^t_{2,s}=I_2(s\cdot\Delta\xi,t\cdot\Delta\xi);\sigma_1^{s+\frac12}=\sigma_1[(s+\frac12)\Delta\xi]$; $\theta^{s+\frac12}=\theta[(s+\frac12)\Delta\xi]$; $\sigma_2^{s+\frac12}=\sigma_2[(s+\frac12)\Delta\xi]$; $t=0,\dots T$; $s=0,\dots,S$.

Счет по схеме можно начать, задавшись начальными данными: $I^0_{1,s}=I_1(s)$, $I^0_{2,s}=I_2(s)$, далее счет продолжается по слоям. Каждое новое приближение для $I_1(0,t)$ вычисляется по формуле
$$I^{t+1}_{1,0}=\Delta\xi\,(\sum_s\varphi_1^{s+\frac12}I^t_{1,s}+\sum_s\sigma_2^{s+\frac12}I^t_{2,s}).$$

Пусть ρ - доля лиц, достигающих второй градации. Плотностные функции $\bar\varphi_1(s)$, $\bar\theta(s)$, $\bar\varphi_2(s)$ определяются таким образом, что $\bar\varphi_1(s)ds$ является относительным числом индивидуумов среди выбывших из первой градации, стаж работы которых в момент выбытия принадлежит интервалу $(s,s+ds)$, $\bar\theta(s)ds$ - относительным числом индивидуумов среди переходящих во вторую градацию, стаж работы которых при переходе принадлежит интервалу $(s,s+ds)$, $\bar\varphi_2(s)ds$ - относительным числом индивидуумов среди выбывающих из второй градации, время пребывания которых в этой градации принадлежит интервалу $(s,s+ds)$. Обозначим через $l_1(s)$, $l_2(s)$ доли лиц, остающихся в первой и второй градациях соответственно, имея стаж работы в организации s. Тогда
$$\sigma_1(s)=\varphi_1(s)+\theta(s)=(1-\rho)\frac{\bar\varphi_1(s)}{l_1(s)}+\rho\frac{\bar\theta(s)}{l_1(s)},$$
$$\sigma_2(s)=\frac{\rho\int_0^s\bar\theta(\tau)\bar\varphi_2(s-\tau)d\tau}{l_2(s)}.$$

В нашем случае функции $\bar\varphi_1(s)$, $\bar\theta(s)$, $\bar\varphi_2(s)$ были аппроксимированы исходя из ретроспективных данных о квалификационно-должностной динамике научных кадров в СО АН СССР с помощью следующих кривых:
$$\bar\varphi_1(s)=0{,}0319s\exp\{-0.2857s\}+0{,}0568s^2\exp\{-0{,}5714s\},$$

$$\bar{\theta}(s)=2{,}7234\cdot 10^{-7}\, s^{12}\, \exp\{-1{,}4545 s\},$$
$$\bar{\varphi}_2(s)=0{,}0225 s\, \exp\{-0{,}15 s\}.$$

Фактическая кривая динамики общей численности сотрудников рассматриваемых категорий за 18-летний период (1960-1978 гг.) аппроксимирована следующим образом:

$$I(t)=\begin{cases} 1+0{,}23t, & 0\le t\le 5,\\ 2{,}15+0{,}092(t-5), & 5<t\le 18.\end{cases}$$

Функции $I_1(s)$, $I_2(s)$ были выбраны произвольно. Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6 с шагом на равномерной прямоугольной сетке, равным 0,05. Для проверки чувствительности решений модели относительно входной информации были выполнены расчеты при различных начальных данных и параметрической вариации кривых $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}_2$. Вариация параметров обеспечивала сдвиг моды каждой из кривых $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}_2$ в промежутке $[Mo-1, Mo+1]$, где Mo - значение моды при исходной аппроксимации. Результаты численного эксперимента с моделью в графической форме представлены на рисунках.

Отметим, что несогласованность начальных данных с процессом пополнения персонала системы приводит к скачкообразному разрыву функции $B(t)$ в точке $t=0$ и, следовательно, разрыву функций $I_1(s,t)$ и $I_2(s,t)$ на линии $t-s=0$. Абсолютная величина скачка, как видно из рис. 2 и 3, является убывающей по мере роста t. Слабая чувствительность решений к вариациям коэффициентов уравнений не позволяет надеяться, что случайные флуктуации в среде (не учитываемые данной моделью) не будут оказывать существенного воздействия на динамику процесса и вызывать большие отклонения от прогноза по математическим ожиданиям.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что построенная линейная детерминированная модель достаточно адекватно описывает процесс квалификационно-должностной динамики научных кадров и может быть использована для прогноза численности и структуры кадров в крупных научных организациях.

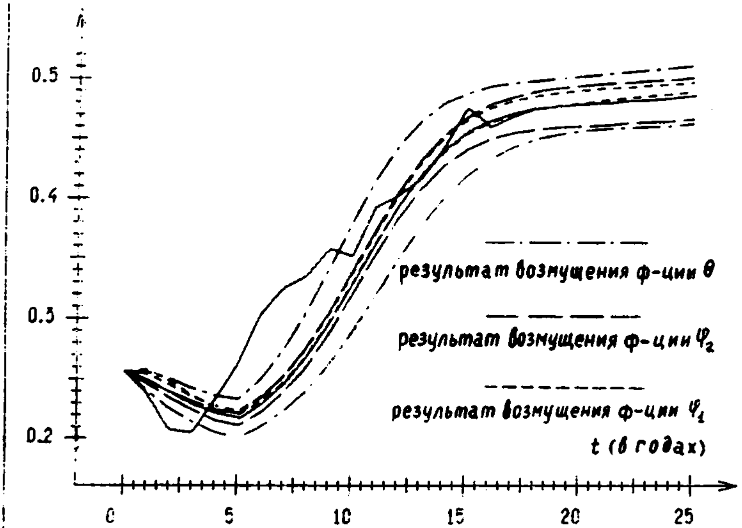

РИС. 1. Фактическая и расчетная кривые изменения удельного веса индивидуумов, находящихся во второй градации

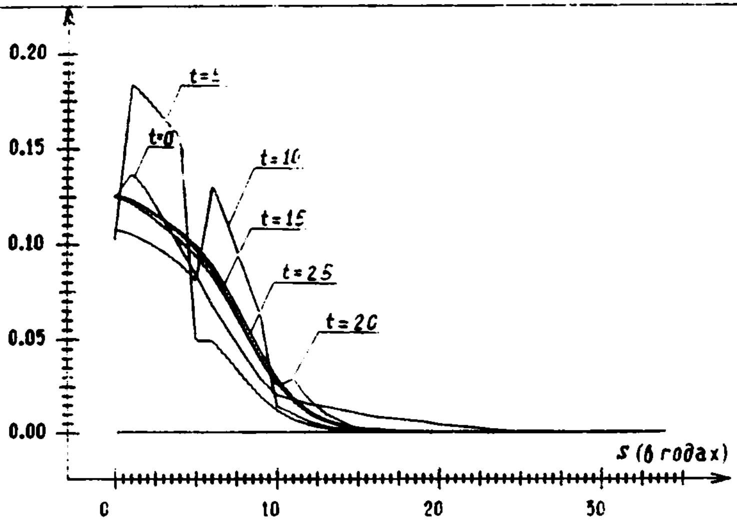

РИС. 2. Кривые плотности распределения времени пребывания в составе научного персонала для индивидуумов, находящихся в моменты времени t = 0,5,10,15,20,25 в первой градации

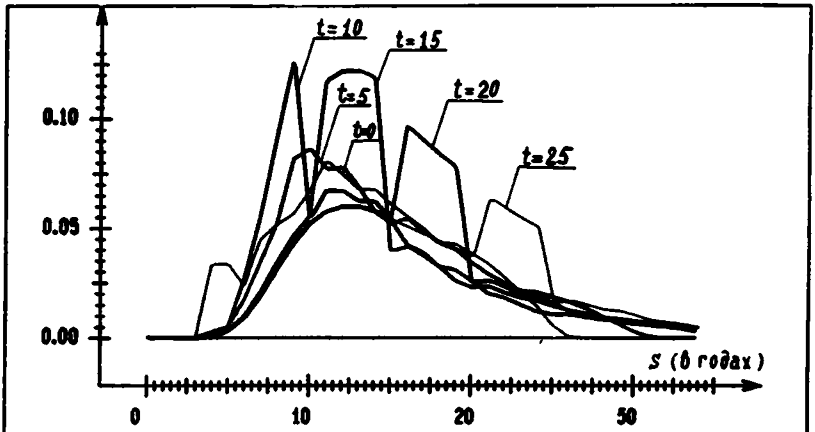

РИС.3. Кривые плотности распределения времени пребывания в составе научного персонала для индивидуумов, находящихся в моменты времени t=0,5,10,15,20,25 во второй градации

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $B(t)$ – заданная непрерывная функция. Рассмотрим следующую задачу (P') :

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} + \frac{\partial I_1}{\partial t} = -[\varphi_1(s) + \theta(s)]\, I_1(s,t), \quad 0 < s < \omega, \quad t \geq 0;$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial s} + \frac{\partial I_2}{\partial t} = -\sigma_2(s)\, I_2(s,t) + \theta(s)\, I_1(s,t), \quad 0 < s < \omega, \quad t \geq 0;$$

$$I_1(s,0) = I_1(s), \quad I_2(s,0) = I_2(s), \quad 0 < s < \omega;$$

$$I_1(0,t) = B(t), \quad I_2(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

Исследуем зависимость решения этой задачи от начальных данных.

Пусть $I_1(s), I_2(s)$ и $\bar{I}_1(s), \bar{I}_2(s)$ – отличные начальные данные в задаче (P'); $I_1(s,t), I_2(s,t)$ и $\bar{I}_1(s,t), \bar{I}_2(s,t)$ – искомые функции, соответствующие этим начальным данным. Фиксируем точку (s_0, t_0) и обозначим

$$I_1^{o}(h) = I_1(s_0 + h, t_0 + h),$$

$$I_2^{o}(h) = I_2(s_0 + h, t_0 + h),$$

$$\varphi_1^0(h)=\varphi_1(s_0+h),$$

$$\theta^0(h)=\theta(s_0+h),$$

$$\sigma_2^0(h)=\sigma_2(s_0+h).$$

В дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумений, записывая эти функции, будем опускать аргумент. Вдоль характеристики, проходящей через точку (s_0, t_0), уравнения задачи (P') сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$I_1^{0\prime}=-\varphi_1^0 I_1^0-\theta^0 I_1^0,$$

$$I_2^{0\prime}=-\sigma_2^0 I_2^0+\theta^0 I_1^0$$

и

$$\bar{I}_1^{0\prime}=-\varphi_1^0 \bar{I}_1^0-\theta^0 \bar{I}_1^0,$$

$$\bar{I}_2^{0\prime}=-\sigma_2^0 \bar{I}_2^0+\theta \bar{I}_2^0.$$

Произведя почленное вычитание, получим

$$\bar{I}_1^{0\prime}-I_1^{0\prime}=-\varphi_1^0[\bar{I}_1^0-I_1^0]-\theta^0[\bar{I}_1^0-I_1^0],$$

$$\bar{I}_2^{0\prime}-I_2^{0\prime}=-\sigma_2^0[\bar{I}_2^0-I_2^0]+\theta^0[\bar{I}_1^0-I_1^0].$$

Беря левые производные от $|\bar{I}_1^0-I_1^0|$ и $|\bar{I}_2^0-I_2^0|$, имеем

$$|\bar{I}_1^0-I_1^0|'\leqslant[\operatorname{sgn}(\bar{I}_1^0-I_1^0)](\bar{I}_1^{0\prime}-I_1^{0\prime})\leqslant-\theta^0|\bar{I}_1^0-I_1^0|$$

и

$$|\bar{I}_2^0-I_2^0|'\leqslant[\operatorname{sgn}(\bar{I}_2^0-I_2^0)](\bar{I}_2^{0\prime}-I_2^{0\prime})\leqslant$$

$$\leqslant[\operatorname{sgn}(\bar{I}_1^0-I_1^0)\operatorname{sgn}(\bar{I}_2^0-I_2^0)]\,\theta^0|\bar{I}_1^0-I_1^0|,$$

где

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}|x|x^{-1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Отсюда

$$|\bar{I}_1^0(h)-I_1^0(h)|-|\bar{I}_1^0(0)-I_1^0(0)|\leqslant-\int_0^h\theta^0(x)|\bar{I}_1^0(x)-I_1^0(x)|\,dx;$$

$$|\bar{I}_2^0(h)-I_2^0(h)|-|\bar{I}_2^0(0)-I_2^0(0)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^h\operatorname{sgn}[\bar{I}_1^0(x)-I_1^0(x)]\operatorname{sgn}[\bar{I}_2^0(x)-I_2^0(x)]\,\theta^0(x)\,|\bar{I}_1^0(x)-I_1^0(x)|\,dx.$$

Поскольку $sgn[\bar{I}_1^o(x)-I_1^o(x)]sgn[\bar{I}_2^o(x)-I_2^o(x)]-1\leqslant 0$, то

$$|\bar{I}_1^o(h)-I_1^o(h)|+|\bar{I}_2^o(h)-I_2^o(h)|-|\bar{I}_1^o(0)-I_1^o(0)|-|\bar{I}_2^o(0)-I_2^o(0)|\leqslant 0.$$

Пусть $s<t$; $s_o=0$, $t_o=t-s$, $h-s$. . Тогда

$$|\bar{I}_1(s,t)-I_1(s,t)|+|\bar{I}_2(s,t)-I_2(s,t)|\leqslant|\bar{B}(t-s)-B(t-s)|.$$

Пусть $s>t$; $s_o=s-t$, $t_o=0$, $h=t$. Тогда

$$|\bar{I}_1(s,t)-I_1(s,t)|+|\bar{I}_2(s,t)-I_2(s,t)|\leqslant|\bar{I}_1(s-t)-I_1(s-t)|+|\bar{I}_2(s-t)-I_2(s-t)|.$$

Из этого следует, что для $t\leqslant\omega$

$$\int_0^{\omega}\{|\bar{I}_1(s,t)-I_1(s,t)|+|\bar{I}_2(s,t)-I_2(s,t)|\}ds\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t}|\bar{B}(\tau)-B(\tau)|d\tau+\int_0^{\omega-t}|\bar{I}_1(s)-I_1(s)|ds+\int_0^{\omega-t}|\bar{I}_2(s)-I_2(s)|ds\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t}|\bar{B}(\tau)-B(\tau)|d\tau+\int_0^{\omega}\{|\bar{I}_1(s)-I_1(s)|+|\bar{I}_2(s)-I_2(s)|\}ds. \qquad (1')$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ДУДНИКОВ Е.Е., ХАЙНИШ С.В., ЯНКОВ Д.Т. Анализ и усовершенствование функционирующих организационных систем / Обзор. - М.: Международный центр научной и технической информации, 1979.
2. РОМАНОВ А.К., ТЕРЕХОВ А.И. Математические модели процессов мобильности / Обзор. - Экономика и мат. методы, 1980, т.16, вып.2, с.272-291.
3. Динамическая теория биологических популяций. - М.: Наука, 1974.
4. КОКС Д., СМИТ В. Теория восстановления. - М.: Советское радио, 1967.
5. БЕЛЛМАН Р., КУК К. Дифференциально-разностные уравнения. - М.: Мир, 1967.
6. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.09.1981 г.