Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

О ПРОИЗВОДНОЙ ШТЕЙНЕРА ЛОКАЛЬНО-ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

О.В.Левчук

0. Отображение, сопоставляющее каждому сублинейному функционалу точку Штейнера его опорного множества, обладает целым рядом замечательных свойств и интересных приложений (см.[1-10]). В заметке строится некоторое распространение этого отображения на класс локально-липшицевых функций. При этом оказывается, что такое распространение на пространство функций, имеющих производные по направлениям, можно осуществить единственным способом. Этот факт аналогичен единственности точки Штейнера на совокупности компактных выпуклых подмножеств конечномерного евклидова пространства [2]. Устанавливаются некоторые правила вычисления построенного отображения для сложной функции. С помощью предложенных построений получено необходимое условие экстремума локально-липшицевых функций, а также формула для нахождения производной Кларка.

1. Пусть $x \in R^n$. Через $Lip(\bar{x}, R^k)$ будем обозначать множество функций, действующих из R^n в R^k, таких, что для каждой функции $f \in Lip(\bar{x}, R^k)$ найдется такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $\bar{x}$, что f удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{U}$, а через $\mathcal{L}(R^n, R^k)$ будем обозначать множество линейных операторов, действующих из R^n в R^k. Открытый шар в R^n радиуса ε с центром в точке $\bar{x}$ обозначим через $B_\varepsilon(\bar{x})$, а если $\bar{x} = 0$, то $B_\varepsilon(\bar{x}) = B_\varepsilon$. Пусть $(\cdot,\cdot)_\varepsilon$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(B_\varepsilon, R^k)$, т.е. для любых $f = (f^1, \ldots, f^k)$, $g = (g^1, \ldots, g^k) \in L_2(B_\varepsilon, R^k)$

$$(f, g)_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\varepsilon} f^i(\tau) \cdot g^i(\tau)\, d\tau .$$

Пусть $l \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сужение $l|_{B_\varepsilon}$ оператора l на B_ε. Так как $\varepsilon \neq 0$, то $l|_{B_\varepsilon}$ продолжается линейно на R^n единственным способом; значит, можно считать, что $\mathcal{L}(R^n, R^k)$ – подпространство в $L_2(B_\varepsilon, R^k)$. Для каждого $f \in Lip(0, R^k)$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняется $f|_{B_\varepsilon} \in L_2(B_\varepsilon, R^k)$. Полагаем по определению, что $st^\varepsilon f$ есть ортогональная проекция $f|_{B_\varepsilon}$ на подпространство $\mathcal{L}(R^n, R^k)$ в гильбертовом пространстве $L_2(B_\varepsilon, R^k)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Производной Штейнера функции $f \in Lip(0, R^k)$ в нуле будем называть множество $st f = \overline{co}(\mathcal{L}im_{\varepsilon \to +0}\, st^\varepsilon f)$, где $\mathcal{L}im_{\varepsilon \to +0}\, st^\varepsilon f$ означает совокупность пределов всех сходящихся подпоследовательностей $st^\varepsilon f$, а $\overline{co}(\mathcal{L}im_{\varepsilon \to +0}\, st^\varepsilon f)$ – его замкнутая выпуклая оболочка.

Производной Штейнера функции $g \in Lip(\bar{x}, R^k)$ в точке $\bar{x}$ будем называть $st_{\bar{x}}\, g(x) = st\, g(x - \bar{x})$.

Из определения легко получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.1. Производная Штейнера $st_{\bar{x}} f$ функции $f \in Lip(\bar{x}, R^k)$ – непустое выпуклое подмножество в $\mathcal{L}(R^n, R^k)$.

Будем обозначать скалярное произведение в евклидовом пространстве R^n через $(\cdot,\cdot)$. Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $s(\varepsilon)$, что для любых векторов $x, y \in R^n$

$$(x, y) = s(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon} (x, \tau)(y, \tau)\, d\tau.$$

Через $(st^\varepsilon f)x$ будем обозначать значение линейного оператора $st^\varepsilon f$ от вектора $x \in R^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Для любого $f \in Lip(0, R^k)$ выполняется

$$(st^\varepsilon f)x = s(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon} (x, \tau) \cdot f(\tau)\, d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что $st^\varepsilon f = (st^\varepsilon f^1, \ldots, st^\varepsilon f^k)$. Поэтому достаточно доказать предложение для $k = 1$. Из определения $st^\varepsilon f$ следует, что $\langle l, f - st^\varepsilon f \rangle_\varepsilon = 0$ для любого $l \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$. Значит,

$$\int_{B_\varepsilon} (x, \tau) \cdot f(\tau)\, d\tau = \int_{B_\varepsilon} (x, \tau)(st^\varepsilon f)\tau\, d\tau. \qquad (*)$$

Так как $st^{\varepsilon}f \in \mathcal{L}(R^n, R^1)$, то можно считать, что $st^{\varepsilon}f \in R^n$ и $(st^{\varepsilon}f)x = (st^{\varepsilon}f, x)$. Тогда из определения $s(\varepsilon)$ получаем

$$(st^{\varepsilon}f)x = s(\varepsilon)\int_{B_\varepsilon}(x,\tau)\cdot(st^{\varepsilon}f)\tau d\tau.$$

Отсюда и из (ж) получаем требуемое. Предложение доказано.

2. Далее нам понадобится понятие производной Кларка [II-I2]. Пусть $\bar{x} \in R^n$, $f \in Lip(\bar{x}, R^k)$. Производной Кларка функции f в точке $\bar{x}$ называется множество $\partial f(\bar{x}) = \overline{co}\, \underset{x \to \bar{x}}{Lim} \{f'_x \mid x : \exists f'_x\}$, где f'_x означает производную Фреше функции f в точке x.

ТЕОРЕМА 2.I. Оператор st обладает следующими свойствами:

I) $st(f \circ \pi) = st f \circ \pi$, где π – ортогональное преобразование R^n;

2) $st(\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2) \subset \alpha_1 \cdot st f_1 + \alpha_2 \cdot st f_2$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ и $f_1, f_2 \in Lip(0, R^k)$;

3) $st f \subset \partial f(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – ортогональное преобразование R^n. Для любого вектора $x \in R^n$ имеем

$$(st^{\varepsilon}f)\pi(x) = s(\varepsilon)\cdot\int_{B_\varepsilon}(\tau, \pi(x))\cdot f(\tau)d\tau = s(\varepsilon)\cdot\int_{B_\varepsilon}(\pi^T(\tau), x)f(\tau)d\tau,$$

где π^T – оператор, сопряженный к π. Но так как π – ортогональное преобразование, то $\pi^T = \pi^{-1}$. Используя формулу замены переменных в кратном интеграле, получаем

$$s(\varepsilon)\cdot\int_{B_\varepsilon}(\tau, x)\cdot f(\pi(\tau))d\tau = (st^{\varepsilon}(f \circ \pi))x;$$

т.е. показали, что $st^{\varepsilon}(f \circ \pi) = st^{\varepsilon}f \circ \pi$. Взяв предельное множество и замкнутую выпуклую оболочку от обеих частей равенства, получаем $st f \circ \pi = st(f \circ \pi)$. Первое свойство доказано.

Докажем теперь второе свойство. Пусть $f_1, f_2 \in Lip(0, R^k)$ и пусть сначала $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Так как оператор st^{ε} линеен, то $st^{\varepsilon}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \cdot st^{\varepsilon}f_1 + \alpha_2\, st^{\varepsilon}f_2$. Значит, $st(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \subset \alpha_1 \cdot st f_1 + \alpha_2 st f_2$. Осталось доказать, что $st(-f) = -st f$. Имеем $st^{\varepsilon}(f(-x)) = st^{\varepsilon}(-f(x))$. Значит, $st(f(-x)) = st(-f(x))$. Из свойства I следует, что $(st f(-x))t = (st f)(-t)$. А так как $st f$ – множество линейных операторов, то $(st f)(-t) = -(st f)(t)$. Значит, $st(-f) = -st f$. Свойство 2 доказано.

Для доказательства свойства 3 нам понадобится следующий факт. Пусть $f: R^n \to R^k, g: R^n \to R$, f и g — интегрируемые функции, ограниченные на B_ε, причем $g(x) > 0$ для любого $x \in R^n$. Тогда существует $c \in \overline{co} f[B_\varepsilon]$ такое, что

$$\int_{B_\varepsilon} g(x) \cdot f(x) dx = \int_{B_\varepsilon} g(x) \cdot c \, dx.$$

Выберем шар B_ε, на котором f будет липшицевой. Пусть x — произвольный единичный вектор из R^n. Тогда найдется в R^n такой ортогональный базис $\{e^1, \ldots, e^n\}$, что $e^1 = x$. Пусть в этом базисе $\tau = (\tau^1, \ldots, \tau^n)$, тогда, применяя теорему Фубини, получаем

$$(st^\varepsilon f)x = s(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon} (\tau, x) f(\tau) d\tau = s(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon^{n-1}} d(\tau^2 \ldots \tau^n) \int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} (\tau, x) f(\tau) d\tau^1.$$

Но в силу выбора e^1 выполняется $(\tau, x) = \tau^1$. Имеем

$$\int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} (\tau, x) \cdot f(\tau) d\tau^1 = \int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} \tau^1 \cdot f(\tau) d\tau^1 = \int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} \tau^1 (f(\tau) -$$

$$- f((0, \tau^2_1, \ldots, \tau^n))) d\tau^1 + \int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} \tau^1 \cdot f((0, \tau^2, \ldots, \tau^n)) d\tau^1.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Так как липшицева функция является абсолютно непрерывной, то по теореме Лебега о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной [15] получаем

$$(st^\varepsilon f)x = s(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon^{n-1}} d(\tau^2 \ldots \tau^n) \int_{-a(\tau^2 \ldots \tau^n)}^{a(\tau^2 \ldots \tau^n)} (\tau^1)^2 \Big(\int_0^1 f'_{(t\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)}(x) dt \Big) d\tau^1 =$$

$$= s(\varepsilon) \int_0^1 \int_{B_\varepsilon} (\tau^1)^2 \cdot f'_{(t\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)}(x) d\tau \cdot dt.$$

Отождествим $\mathcal{L}(R^n, R^k)$ с $R^{n \cdot k}$. Для любого $x \in R^n$ найдется такое $X \in \mathcal{L}(R^{n \cdot k}, R^k)$, что $l(x) = X(l)$ для любого $l \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$. Тогда

$$(st^\varepsilon f)x = s(\varepsilon) \cdot X \Big(\int_0^1 \int_{B_\varepsilon} (\tau^1)^2 \cdot f'_{(t\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)} d\tau dt \Big).$$

А значит, как было замечено выше, найдется такое $c \in \overline{co} f'_{[B_\varepsilon]} \subset R^{n \cdot k}$, что

$$\int_0^1 \int_{B_\varepsilon} (\tau^1)^2 \cdot f'_{(t\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)} d\tau dt = \int_0^1 \int_{B_\varepsilon} (\tau^1)^2 \cdot c \, d\tau dt;$$

т.е. мы получили $st^\varepsilon f = c \in \overline{co} f'_{[B_\varepsilon]}$. Значит, $\mathcal{L}im \, st^\varepsilon f \in$

$\in \bigcap \overline{co} f'_{[B_\varepsilon]} = \overline{co} \bigcap \overline{f}'_{[B_\varepsilon]} = \partial f(0)$. Теорема доказана.

Пусть в пространстве $Lip(0,R^k)$ задана полунорма $\|f\|^* = = \inf c(f)$, где $c(f)$ – такое множество, что $c_0 \in c(f)$ тогда и только тогда, когда найдется такая окрестность нуля, что f будет удовлетворять на ней условию Липшица с константой c_0 .

СЛЕДСТВИЕ. Оператор st сохраняет полунорму $\|\cdot\|^*$, т.е. для любого $A \in st f$ выполняется $\|A\|^* \leq \|f\|^*$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для любого $A \in \partial f(0)$ выполняется $\|A\|^* \leq \|f\|^*$, и применить свойство 3 теоремы.

Используя теорему и следствие, а также свойство единственности точки Штейнера [2] , нетрудно показать, что выполняется следующее

ЗАМЕЧАНИЕ. Производная Штейнера сублинейного функционала есть точка Штейнера его опорного множества.

Следствие к теореме I.2 можно несколько усилить. А именно, нетрудно показать, что оператор st сохраняет полунорму

$$\|f\|^*_{\bar{x}} = \overline{\lim_{\varepsilon \to +0}} s(\varepsilon) \cdot \|f\|_{L_2(B_\varepsilon(\bar{x}), R^k)} .$$

3. Пусть $\bar{x} \in R^n$. Будем обозначать через $\mathcal{D}'(\bar{x}, R^k)$ пространство всех функций из $Lip(\bar{x}, R^k)$, имеющих в точке $\bar{x}$ производные по направлениям, т.е. когда для каждого $h \in R^n$ существует $f'_{\bar{x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} (f(\bar{x}+\varepsilon h)) - f(\bar{x}))/\varepsilon$. Если $\bar{x} = 0$, то $f'_{\bar{x}}$ будем обозначать через f' . Нетрудно показать, что для любой функции $f \in \mathcal{D}'(x, R^k)$ ее производная $f'_{\bar{x}}$ есть положительно однородный непрерывный оператор.

ТЕОРЕМА 3.I. Для любой функции $f \in \mathcal{D}'(\bar{x}, R^k)$ имеем $st f \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$. Пусть существует еще одно отображение $\overline{st} : \mathcal{D}'(0, R^k) \to \mathcal{L}(R^n, R^k)$, обладающее свойствами I – 3 из теоремы 2.I, тогда $\overline{st} = st|_{\mathcal{D}'(0,R^k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что для любой функции $f \in \mathcal{D}(0, R^k)$ выполняется $f(x) = f(0) + f'(x) + O\|x\|$. Применяя предложение I.2, получаем $st f = st f'$. Но f' – положительно однородный оператор, значит, $st^{\varepsilon_1} f' = st^{\varepsilon_2} f' = st f' \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение достаточно доказать для $k = 1$. Так как свойства предлинейности, непрерывности и инвариантности относительно движения определяют точку Штейнера единственным способом, то из замечания к теореме 2.I следует, что операторы st и $\overline{st}$ совпадают на множестве сублинейных функционалов. Значит, они совпадают на их линейной оболочке $Lin(\mathcal{P})$. Можно считать, что $Lin(\mathcal{P})$ вложено в пространство непрерывных функций на единичной сфере, которое мы будем обозначать через $C(S^{n-1})$. А так как в этом пространстве $Lin(\mathcal{P})$ – решетка, разделяющая точки, то по теореме Стоуна – Вейерштрасса она плотна в $C(S^{n-1})$ с топологией равномерной сходимости. Используя теперь следствие к теореме 2.I, получаем, что st и $\overline{st}$ совпадают на множестве всех положительно однородных функций из $Lip(0,R^k)$. Следовательно, $stf = stf' = \overline{st}f' = \overline{st}f$. Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМА 4.I. Пусть $g: R^k \to R^m$, тогда если g дифференцируема в точке $f(\bar{x})$, то $st_{\bar{x}}(g\circ f) \subset g'_{f(\bar{x})} \circ st_{\bar{x}} f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем теорему для случая, когда $g \in \mathcal{L}(R^k, R^m)$. Имеем $L(st^{\varepsilon} f)x = L(s(\varepsilon)\cdot\int(x,\tau)f(\tau)d\tau) = s(\varepsilon)\cdot\int(x,\tau)L\circ f(\tau)d\tau = (st^{\varepsilon}(L\circ f))x$. Мы получили, что $st^{\varepsilon}(L\circ f) = L\circ st^{\varepsilon} f$. Заметим, что $\overline{co}\,L[A] = L[\overline{co}A]$ для любого $A \subset R^n$. Мы имеем $st_{\bar{x}}(L\circ f) = \overline{co}\,Lim\, st^{\varepsilon}(L\circ f(x-\bar{x})) \subset L[\overline{co}\,Lim\, st^{\varepsilon} f(x-\bar{x})] = L\circ st_{\bar{x}} f$. Пусть теперь g удовлетворяет условию теоремы. Тогда $g(f(x)) = g(f(\bar{x})) + g'_{f(\bar{x})}(f(x) - f(\bar{x})) + o\|f(x) - f(\bar{x})\|$. А так как f липшицева, то $o\|f(x) - f(\bar{x})\| = o\|x-\bar{x}\|$, т.е. $st_{\bar{x}}(g(f(x))) = st_{\bar{x}}(g'_{f(\bar{x})}(f(x) - f(\bar{x})))$, а значит, $st_{\bar{x}}(g\circ f) \subset g'_{f(\bar{x})} \circ st_{\bar{x}} f$. Теорема доказана.

Из теоремы легко получаются следующие два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Если $st_{\bar{x}} f \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$, то $st_{\bar{x}}(f\circ g) = g'_{f(\bar{x})} \circ st_{\bar{x}} f$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Со знаком включения вправо (а в случае, когда $st_{\bar{x}} f \in \mathcal{L}(R^n, R^k)$, то со знаком равенства) для производной Штейнера верны правила дифференцирования суммы, разности, частного, произведения двух функций и т.п.

Например, для $f, g \in \mathcal{D}(R^n, R)$ имеем $st_{\bar{x}}(f\cdot g) = f(\bar{x})\cdot st_{\bar{x}} g + g(\bar{x})\cdot st_{\bar{x}} f$.

5. Пусть $\bar{x} \in R^n$, $f: R^n \to R^k$. Тогда $\bar{x}$ называется точкой локального экстремума функции f, если найдется такая окрест-

ность $\mathcal{U}$ точки $\bar{x}$, что $f(\bar{x})$ будет наибольшим или наименьшим значением f на множестве $\mathcal{U}$. При этом порядок в R^k берется покоординатно.

ТЕОРЕМА 5.I. Если $\bar{x}$ - точка локального экстремума функции $f\in Lip(\bar{x}, R^k)$, то для любого $A\in st_{\bar{x}} f$ выполняется $\|A\|'_{\bar{x}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\|_{\bar{x}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{x}=0$, $f(0)=0$ и $\bar{x}$ - точка локального минимума, т.е. на некоторой окрестности нуля $f(x)\geq 0$. Так как $st^{\varepsilon} f$ является ортогональной проекцией f, то $(f, st^{\varepsilon} f)_{\varepsilon} = (st^{\varepsilon} f, st^{\varepsilon} f)_{\varepsilon}$.
Значит,

$$s(\varepsilon)\|st^{\varepsilon} f\|_{\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon)\|f\|_{\varepsilon} = \frac{s(\varepsilon)}{\|st^{\varepsilon} f\|_{\varepsilon}}(\|st^{\varepsilon} f\|^2_{\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{2}\|st^{\varepsilon} f\|_{\varepsilon}\|f\|_{\varepsilon}) =$$

$$= \frac{s(\varepsilon)}{\|st^{\varepsilon} f\|_{\varepsilon}}((f, st^{\varepsilon} f)_{\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{2}\|st^{\varepsilon} f\|_{\varepsilon}\|f\|_{\varepsilon}).$$

Будем доказывать, что это выражение меньше либо равно нулю, а для этого достаточно показать, что таким будет выражение в скобках, которое равно

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B_{\varepsilon}} f^i st^{\varepsilon} f^i - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B_{\varepsilon}}(f^i)^2}.$$

Далее обозначим $B^i_{\varepsilon} = B_{\varepsilon}\cap\{st^{\varepsilon} f^i > 0\}$. Будем рассматривать те $\varepsilon > 0$, для которых $f(x)\geq 0$ на B_{ε}. Тогда $\int_{B_{\varepsilon}} f^i\cdot st^{\varepsilon} f^i \leq \int_{B^i_{\varepsilon}} f^i st^{\varepsilon} f^i$. Учитывая, что $\int_{B_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2 = 2\int_{B^i_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2$ и используя неравенство Гельдера, продолжаем цепочку неравенств

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B^i_{\varepsilon}} f^i\cdot st^{\varepsilon} f^i - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B^i_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B^i_{\varepsilon}}(f^i)^2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k}\sqrt{\int_{B^i_{\varepsilon}}(f^i)^2}\sqrt{\int_{B^i_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B^i_{\varepsilon}}(st^{\varepsilon} f^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\int_{B^i_{\varepsilon}}(f^i)^2}.$$

Но по неравенству Коши - Буняковского последнее выражение меньше либо равно нулю, т.е. мы показали, что $s(\varepsilon)\|st^{\varepsilon} f\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}s(\varepsilon)\|f\|_{\varepsilon}$. А значит, для любого $A\in st f$ выполняется $\|A\|'_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\|'_0$. Теорема доказана.

Дадим теперь некоторую геометрическую интерпретацию теоремы 5.I. В случае, когда $f\in \mathcal{D}'(\bar{x}, R^k)$, можно считать, что полунорма $\|\cdot\|_{\bar{x}}^{\cdot}$ порождена скалярным произведением $(f,g)_{\bar{x}}^{\cdot} = s(1)(f'_{\bar{x}}, g'_{\bar{x}})_1$. Тогда теорему можно сформулировать так: "Если $\bar{x}$ – экстремальная точка, то угол между вектором f и плоскостью линейных операторов должен быть больше, чем $\pi/4$ ".

6. ТЕОРЕМА 6.I. Для любой функции $f \in Lip(\bar{x}, R^k)$ выполняется

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{\omega \in O(x)} \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} st_x f,$$

где $O(x)$ – множество окрестностей точки $\bar{x}$, на которых f является липшицевой функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения производной Кларка легко получается, что $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \partial f(x) \subset \partial f(\bar{x})$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\omega \in O(\bar{x})$ такое, что

$$\partial f(\bar{x}) + \bar{B}_\varepsilon \supset \bigcup_{x \in \omega} \partial f(x).$$

А так как множество $\partial f(x) + \bar{B}_\varepsilon$ замкнуто и выпукло, то

$$\partial f(\bar{x}) + \bar{B}_\varepsilon \supset \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} \partial f(x).$$

Из теоремы 2.I следует, что $st_x f \subset \partial f(x)$. Значит,

$$\partial f(\bar{x}) + \bar{B}_\varepsilon \supset \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} \partial f(x) \supset \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} st_x f.$$

Взяв пересечение по всем $\varepsilon > 0$, получаем

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\partial f(\bar{x}) + \bar{B}_\varepsilon) \supset \bigcup_{\omega \in O(x)} \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} st_x f.$$

Включение влево доказано. Докажем включение вправо. По определению,

$$\partial f(\bar{x}) = \overline{co} \left\{ \lim_{x \to \bar{x}} f'_x \mid x : \exists f'_x, \exists \lim_{x \to \bar{x}} f'_x \right\}.$$

Но для всех x таких, что существует производная f'_x, множество $st_x f$ состоит из одной точки f'_x. Значит,

$$\partial f(\bar{x}) = \overline{co} \left\{ \lim_{x \to \bar{x}} f'_x \mid x : \exists f'_x, \exists \lim_{x \to \bar{x}} f'_x \right\} =$$
$$= \overline{co} \left\{ \lim_{x \to \bar{x}} st_x f \mid x : \exists f'_x, \exists \lim_{x \to \bar{x}} f'_x \right\} \subset \bigcap_{\omega \in O(\bar{x})} \overline{co} \bigcup_{x \in \omega} st_x f.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Г.П.Акилову, С.С.Кутателадзе и А.Г. Кусраеву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. STEINER J. Von dem Krummungsschwerpunkte ebenes Curven.- J. Reine Angew. Math., 1840, N21, 33-63, 101-122. (Gesammelte Werke, Bd.2, Berlin,1822, 99-159).
2. SCHNEIDER R.S. On Steiner points of convex bodies. - Israel J. Math., 1971, v.9, 241-249.
3. ГРЮНБАУМ Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. - М.: Наука, 1971.
4. FLANDERS H. The Steiner points of closed hupersurfons.- Mathematika, 1966, v.13, 181-188.
5. SALLE G.T. A voluation property of Steiner points. - Mathematika, 1966, v.13, 76-82.
6. Shepard G.C. The Steiner points of convex polytope. - Canad. J. Math., 1966, N18, 1294-1300.
7. Shepard G.C. A uniqueness theorem for the Steiner points of a convex region. - J. London Math. Soc., 1968, v.43, 439-444.
8. Schmitt K.A. Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper. - Math. Z., 1968, N105, 387-392.
9. SALLE G.T. Polutores valuations and the Euler relation.- Canad. J. Math., 1968,N20, 1412-1424.
10. ЛИНКЕ Ю.Э. Применение точки Штейнера для исследования одного класса сублинейных операторов. - ДАН, 1980, т.254, №5, с. 1069-1072.
11. CLARKE F.H. On the inverse function theorem.- Pacific J. Math., 1976, v.64, N1, 97-102.
12. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications.- Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v.205, 247-262.
13. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1976.
14. АЛЕКСЕЕВ В.М., ТИХОМИРОВ В.М., ФОМИН С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979.
15. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

16. ЭКЛАНД И., ТЕМАМ Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979.
17. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
18. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н . Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.07.1981 г.