Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

# НЕКОТОРЫЕ ПРАВИЛА ПОДСЧЕТА КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ

А.Г.Кусраев

В субдифференциальном исчислении, а также в различных его приложениях часто приходится иметь дело с касательными конусами к множествам весьма сложной структуры. Поэтому наряду с аналитическим аппаратом субдифференцирования полезно иметь формулы для подсчета касательных конусов. В настоящей работе на основе метода субдифференцирования, предложенного в [1], выводятся такие формулы для касательных конусов в смысле Кларка к праобразу множества при многозначном отображении к лебегову множеству векторной функции и т.п. Для выпуклого случая такие формулы приведены, например, в [2], см. также [3,4].

1. Приведем необходимые определения. Всюду далее $X$, $Y$ и $Z$ - топологические векторные пространства, $E$ - топологическое $K$-пространство (т.е. порядково полное упорядоченное топологическое векторное пространство) с нормальным конусом положительных элементов, $\mathcal{L}(X,E)$ и $\mathcal{L}^+(X,E)$ - пространства непрерывных линейных и непрерывных линейных положительных операторов из $X$ в $E$ соответственно; $\mathcal{W}_x$ - фильтр окрестностей точки $x \in X$.

Касательный и нормальный конусы по Кларку к множеству $F \subset X$ в точке $x \in \bar{F}$ определяются соответственно следующими формулами [5,6]:

$$T(F;x) = \bigcap_{V \in \mathcal{W}_0} \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{W}_x \\ \varepsilon > 0}} \bigcap_{\substack{x' \in U \cap F \\ t \in (0,\varepsilon)}} [t^{-1}(F - x') + V],$$

$$N_E(F;x) = \{A \in \mathcal{L}(X,E) : Ah \leq 0,\ h \in T(F;x)\}.$$

Если $x \notin \bar{F}$, то полагаем по определению $T(F;x)=\emptyset$ и $N_E(F;x)=\mathcal{L}(X,E)\cup\{\infty\}$. Перечислим основные типы конусов, используемых в качестве регуляризующих [6,7]:

$$R(F;x)=\bigcup_{U\in\mathcal{U}_x,\,\varepsilon>0}\ \bigcap_{x'\in U\cap F,\,t\in(0,\varepsilon)} t^{-1}(F-x');$$

$$Q(F;x)=\bigcup_{\substack{U\in\mathcal{U}_x,\,\varepsilon>0,\\ V\in\mathcal{U}_0}}\ \bigcap_{\substack{x'\in U\cap F,\,h\in V,\\ t\in(0,\varepsilon)}}[t^{-1}(F-x')+h];$$

$$R^2(G,z)=\bigcap_{V\in\mathcal{U}_0^X}\ \bigcup_{U\in\mathcal{U}_z,\,\varepsilon>0}\ \bigcap_{\substack{z'\in U\cap G\\ t\in(0,\varepsilon)}}[t^{-1}(G-z')+V\times\{0\}];$$

$$Q^2(G,z)=\bigcap_{V\in\mathcal{U}_0^X}\ \bigcup_{\substack{U\in\mathcal{U}_z,\,\varepsilon>0,\\ W\in\mathcal{U}_0^Y}}\ \bigcap_{\substack{z'\in U\cap F,\,h\in W\\ t\in(0,\varepsilon)}}[t^{-1}(G-z')+V\times\{h\}].$$

Пусть $\Phi$ обозначает один из символов $R, Q, R^2$ или $Q^2$. Если $z\notin\bar{G}$, то полагаем $\Phi(G;z)=\emptyset$. Можно показать, что $\Phi(G,z)$ - выпуклый конус при всех $G$ и $z$.

Множество $G$ называется $\Phi$-регулярным в точке $z$, если $T(G;z)=\Phi(G;z)$.

2. Пусть задано отображение $f: X\times Y\to E_1\cup\{\infty\}$, и рассмотрим соответствие $\Phi=\{(x,y)\in X\times Y: f(x,y)\leqslant 0\}$. Нас будут интересовать формулы для подсчета касательного и нормального конусов к праобразу $\Phi^{-1}[C]$ подмножества $C\subset Y$. Введем следующее условие. Будем говорить, что $f$ и $C$ удовлетворяют условию $(\rho^{-1})$ в точке $(x,y)$, если для любых окрестностей $V$ и $W$ точек $y$ и $e=f(x,y)$ соответственно существует такая окрестность $U$ точки $x$, что если $x'\in U$, то $f(x',y')\leqslant e'$ для некоторых $y'\in C\cap V$ и $e'\in -E_1^+\cap W$.

ТЕОРЕМА 1. Допустим, что $f$ и $C$ удовлетворяют условию $(\rho^{-1})$ в точке $(x,y)$, причем $f(x,y)\leqslant 0$ и выполнено одно из условий:

1) $f$ $R^2$-регулярно в точке $(x,y)$, $C$ $R$-регулярно в точке $y$, а ко-

нусы $R^2(f;(x,y))$ и $X\times R(C;y)\times(-E_1^{\tau})$ находятся в общем положении;

2) $f$ $Q^2$-регулярно в точке $(x,y)$, а конусы $Q^2(f;(x,y))$ и $X\times T(C;y)\times(-E_1')$ находятся в общем положении;

3) $C$ $Q$-регулярно в точке $y$, $\operatorname{int} E_1^+\neq\emptyset$, а конусы $X\times Q(C;y)\times(-\operatorname{int} E_1')$ и $T(f;(x,y))$ находятся в общем положении.

Тогда имеют место включения

$$T(\Phi^{-1}[C];x)\supset\{h\in X:\exists k\in T(C;y),\ \exists\lambda>0,$$
$$\lambda f(x,y)+f^{\circ}(x,y)(h,k)\leqslant 0\};\qquad (1)$$

$$N_E(\Phi^{-1}[C]:x)\subset\{A\in\mathcal{L}(X,E):\exists B\in N_E(C;y),(A,B)\in\mathcal{M}\},\ (2)$$

где $\mathcal{M}=\{(A,B)\in\mathcal{L}(X\times Y,E):\exists D\in\mathcal{L}^+(E_1,E),$

$$D\circ f(x,y)=0,\ (A,B,D)\in N_E(f,(x,y))\}.$$

Если, кроме того, $f$ правильно по направлениям в точке $(x,y)$, то

$$\mathcal{M}=\cup\{\partial(\alpha\circ f^{\circ}(x,y):\alpha\in\mathcal{L}^+(E_1,E),\ \alpha\circ f(x,y)=0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F=\operatorname{epi} f$, $G=C\times(-E_1^+)\times\mathcal{Z}$, $u=(x,y,e,0)$, $u_1=(x,y,e)$, $u_2=(y,e,0)$, где $\mathcal{Z}$ - произвольное топологическое векторное пространство и $0\in\mathcal{Z}$. Нетрудно видеть, что каждое из условий 1)–3) обеспечивает справедливость соответствующего условия теоремы 1 из [1]. Кроме того, очевидно, что $(\rho^{-1})$ влечет условие $(\rho c)$ для $F$ и $G$ в точке $u$. Таким образом, применима теорема 1 из [1], согласно которой касательный конус к $F\circ G$ в точке $u$ содержится в композиции касательных конусов к $F$ и $G$ в точках $u_1$ и $u_2$ соответственно. Осталось заметить, что $T(F\circ G;(x,0))=$ $=T(\Phi^{-1}[C];x)\times\mathcal{Z}$ и $Fd_e(-E_1^+)\subset T(-E^+;e)$. Тогда

$$T(F;u_1)\circ T(G;u_2)\supset P_X[T(f;(x,y))\cap X\times T(C;y)\times Fd_e(-E^+)]\times\mathcal{Z},$$

откуда немедленно вытекает включение (1).

Включение (2) устанавливается аналогично, учитывая соотношение

$$N_E(-E_1^+;e)=\{\alpha\in\mathcal{L}^+(E_1,E):\alpha e=0\}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что если в условиях теоремы I $x\notin\overline{\Phi^{-1}[C]}$, то в силу включения (I) необходимо $T(C;y)=\emptyset$, т.е. $y\notin\bar{C}$.

3. СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $X$ и $Y$ – топологические векторные пространства, $F$ – соответствие из $X$ в $Y$, $C\subset Y$ и $(x,y)\in X\times Y$. Допустим, что для любой окрестности $V$ точки $y$ существует окрестность $\mathcal{U}$ точки $x$ такая, что $F[x']\cap C\cap V\neq\emptyset$ для всех $x'\in\mathcal{U}\cap F^{-1}[C]$. Далее, пусть выполнено одно из следующих условий:

I) множество $F$ $Q^2$-регулярно в точке $(x,y)$, а конусы $Q^2(F;(x,y))$ и $X\times T(C;y)$ находятся в общем положении;

2) множество $F$ $R^2$-регулярно в точке $(x,y)$, $C$ $R$-регулярно в точке $y$, а конусы $R^2(F;(x,y))$ и $X\times R(C;y)$ находятся в общем положении;

3) множество $C$ $Q$-регулярно в точке $y$, а конусы $T(F;(x,y))$ и $X\times Q(C;y)$ находятся в общем положении.

Тогда

$$T(F^{-1}[C];x)\supset\{h\in X:\exists k\in T(C,y),(h,k)\in T(F;(x,y))\};\qquad(3)$$

$$N_E(F^{-1}[C];x)\subset\{A\in\mathcal{L}(X,E):\exists B\in -N_E(C;y);\quad (A,B)\in N_E(F;(x,y))\}.\qquad(4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему I к отображению $f=\delta_E(F)$ и множеству $C$. Тогда $F=\Phi$, $f^\circ(x,y)=\delta_E(T(F;(x,y)))$ и $\partial(\alpha\circ f^\circ(x,y))=N_E(F;(x,y))$ для любого $\alpha\in\mathcal{L}^+(E_1,E)$. Таким образом, (3) и (4) немедленно вытекают из формул (I) и (2).

Если в следствии I $C=\{y\}$, то $C$ $R^2$-регулярно и $T(C;y)=\{0\}$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $F$ является $R^2$-регулярным множеством в точке $(x,y)$, а конусы $R^2(F;(x,y))$ и $X\times\{0\}$ находятся в общем положении. Тогда

$$T(F^{-1}[y];x)\supset\{h\in X:(h,0)\in T(F;(x,y))\};$$

$$N_E(F^{-1}[y];x)\subset\{A\in\mathcal{L}(X,E):\exists B\in\mathcal{L}(Y,E),$$
$$(A,B)\in N_E(F;(x,y))\}.$$

Пусть теперь $Y$ - упорядоченное векторное пространство, $Q$ - топологическое пространство. Отображение $f:Q\to Y\cup\{\infty\}$ называется полунепрерывным сверху в точке $x\in Q$, если для любой окрестности $V$ точки $x$ существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $f(x)$, что $f[U]\subset f[Q]\cap V-Y^{+}\cup\{\infty\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Рассмотрим отображение $f:X\to Y\cup\{\infty\}$ и множество $C\subset Y$. Допустим, что сужение $f$ на $f^{-1}[C]$ полунепрерывно сверху и правильно по направлениям в точке $x\in X$, а $C$ является идеалом в $Y$, т.е. $C-Y^{+}\subset C$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $C$ $Q$-регулярно в точке $f(x)$, а конусы $X\times Q(C;f(x))$ и $T(f;x)$ находятся в общем положении;

2) $C$ $R$-регулярно в точке $f(x)$, $f$ $R^2$-регулярно в точке $x$, а конусы $R^2(f;x)$ и $X\times R(C;f(x))$ находятся в общем положении. Тогда

$$T(f^{-1}[C];x)\supset[f^{\circ}(x)]^{-1}[T(C;f(x))-Y^{+}];$$

$$N_E(f^{-1}[C];x)\subset\bigcup\{\partial(\alpha\circ f^{\circ}(x)):\alpha\in N_E(C;f(x))\}.$$

Доказательство немедленно вытекает из следствия I, если положить $F=epi\,f$.

Следующие два утверждения представляют собой два важных частных случая следствия 3, когда $C=-Y^{+}$ и $Y^{+}=\{0\}$.

Пусть $\{f\leq y\}=\{x\in X:f(x)\leq y\}$ - лебегово множество отображения $f$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть отображение $f: X \to Y \cup \{\infty\}$ правильно по направлениям и полунепрерывно сверху на множестве $\{f \leq y\}$ в точке $x \in X$, $f(x) \leq y$. Допустим, что $\mathrm{int}\, Y^+ \neq \emptyset$ и конусы $T(f; x)$ и $-X \times \mathrm{int}\, Y^+$ находятся в общем положении. Тогда

$$T(\{f \leq y\}; x) \supset \{h \in X : \exists \lambda > 0,\ f^\circ(x)h + \lambda[f(x) - y] \leq 0\},$$

$$N_E(\{f \leq y\}; x) \subset \bigcup \{\partial(\alpha \circ f^\circ(x)) : \alpha \in \mathcal{L}^+(Y; E),\ \alpha \circ f(x) = y\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $X$ и $Y$ – топологические векторные пространства, отображение $f: X \to Y$ непрерывно и строго дифференцируемо по направлениям в точке $x$, множество $C \subset Y$ $Q$-регулярно в точке $f(x)$. Предположим, что конус $X \times Q(C; f(x))$ и график оператора $f'(x) = A \in \mathcal{L}(X, Y)$ находятся в общем положении. Тогда

$$T(f^{-1}[C]; x) \supset A^{-1}[T(C; f(x))];$$

$$N_E(f^{-1}[C]; x) \subset N_E(C; f(x)) \circ A.$$

В случае, когда $E = R$, а общее положении реализуется вследствие наличия внутренней точки (т.е. когда $T(f, x) \cap X \times \mathrm{int}(-Y^+) \neq \emptyset$ и $\mathrm{rang}\, A \cap \mathrm{int}(T(C, y)) \neq \emptyset$ соответственно), следствия 4 и 5 получены Рокафелларом [5].

4. Допустим, что существует такое слабо компактное множество функционалов $\mathfrak{A} \subset Y'$, что $y \geq 0$ в том и только в том случае, если $(y, \alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Для простоты предположим, что $f$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x$ [6]. Очевидно, что множество $\{f \leq y\}$ совпадает с множеством $\{\varphi \leq 0\}$, где $\varphi: X \to R$, $\varphi(x) = \sup\{(f(x) - y, \alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(x) = \{\alpha \in \mathfrak{A} : (f(x) - y, \alpha) = \sup\{(f(x) - y, \beta) : \beta \in \mathfrak{A}\}.$$

Согласно [4] субдифференциал $\partial\varphi(x)$ содержится в множестве $\bigcup \partial p_\mu$, где $p_\mu$ – сублинейный функционал,

$$\rho_\mu : h \to \int_{\mathfrak{A}} (f^\circ(x)h, \alpha)\, d\mu(\alpha),$$

а объединение берется по множеству всех конечно-аддитивных положительных мер полной единичной вариации и таких, что

$$\sup\{(f(x)-y, \beta) : \beta \in \mathfrak{A}\} = \nu = \int_{\mathfrak{A}} (f(x)-y, \alpha)\, d\mu(\alpha).$$

Поскольку функция $\alpha \to (f^\circ(x)h, \alpha)$ непрерывна, можно ограничиться регулярными борелевскими мерами на $\mathfrak{A}$, следовательно,

$$\partial\varphi(x) \subset \bigcup\{\partial\rho_\mu : \mu \in C[(\mathfrak{A}^*)]^+,\ \mu(1)=1,\ \operatorname{supp}\mu \subset \mathfrak{A}(x)\} \mathrel{\dot=} \mathcal{M}(x).$$

Допустим, что $\operatorname{int} Y^+ \neq \emptyset$ и $T(f,x) \cap \operatorname{int}[X \times T(-Y^+; f(x)-y)] \neq \emptyset$. Тогда $\operatorname{int} T(-Y^+; f(x)-y)$ тоже не пусто и существует такой функционал $\beta \in Y'$, что $\beta \in \pi_R(T(-Y^+; f(x)-y))$ и $(f^\circ(x)h, \beta) > 0$ для всех $h \in X$. Из полученных соотношений следует, что $\beta > 0$ и $(f(x)-y, \beta) = \nu$, так что можно считать $\beta \in \mathfrak{A}(x)$. Следовательно, $\sup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (f^\circ(x)h, \alpha) \geq 0$ для всех $h \in X$, что равносильно включению $0 \in \mathcal{M}(x)$.

Принимая во внимание изложенное, из следствия 4 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{A}$ и $f$ удовлетворяют приведенным условиям, $\operatorname{int} Y^+ \neq \emptyset$, $\varphi(x) = 0$ и $0 \notin \mathcal{M}(x)$. Тогда конусы $T(f;x)$ и $-X \times Y^+$ находятся в общем положении и имеют место следующие формулы:

$$T(\{f \leq y\}; x) \supset \{h \in X : (Ah, \alpha) \leq 0,\ \alpha \in \mathfrak{A}(x),\ A \in \partial f(x)\};$$

$$\operatorname{int} T(\{f \leq y\}; x) \supset \{h \in X : (Ah, \alpha) < 0,\ \alpha \in \mathfrak{A}(x),\ A \in \partial f(x)\};$$

$$N_\varepsilon(\{f \leq y\}; x) \subset \bigcup(\partial(A \circ f^\circ(x)) : A'[E'^+] \subset C_0[\mathfrak{A}(x_0)]\}.$$

Отметим, что аналогичные формулы для конечномерного $Y$ (в этом случае можно считать, что $\mathfrak{A}$ – конечное множество) получены в [5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Правила подсчета касательных конусов получены в виде некоторых включений, которые могут оказаться строгими. Однако существуют простые достаточные условия, обеспечивающие равенство в этих формулах. Таким условием является субдифференциальная регулярность, введенная Рокафелларом [5].

## ЛИТЕРАТУРА


1. КУСРАЕВ А.Г. Об одном общем методе субдифференцирования.- Докл. АН СССР, 1981, т.257, №4, с.822-826.
2. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Выпуклые операторы в псевдотопологических пространствах.- Оптимизация, 1980, вып. 25(42), с.5-41.
3. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ.- М.: Мир, 1973.
4. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
5. ROCKAFELLAR R.T. Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus. - Proc. London Math. Soc., 1979, 39, N 3, p.331-355.
6. КУСРАЕВ А.Г. Субдифференциалы негладких операторов и необходимые условия экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями. - Оптимизация, 1980, вып.24(41), с.75-117.
7. THIBAULT L. Epidifferential de fonctions vectorielles. - C.r. acad. Sci., Paris, 1980, 290, N 2, p.A87-A90.



Поступила в ред.-изд. отдел
19.07.1981 г.