УДК 513.88

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

С.С.Кутателадзе

Работы Л.В.Канторовича, относящиеся к началу тридцатых годов, чрезвычайно богаты различными пионерскими по тому времени идеями. В настоящей заметке указывается один признак эллипсоида, найденный по сути дела в работе [I]. Л.В.Канторович вводит в [I] следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Банахово пространство X называется квазиконвексным, если для любых точек $\bar{x}, x_1, \dots, x_n \in X$ существует элемент x_0 из линейной оболочки $x_1, \dots, x_n$ такой, что

$$\|x_0 - x_k\| \leq \|\bar{x} - x_k\| \qquad (k := 1, \dots, n) .$$

Иными словами, пространство квазиконвексно, если любое конечное множество пересекающихся шаров этого пространства имеет общую точку в плоскости, проходящей через их центры. Очевидно, что одномерные и двумерные пространства квазиконвексны.

ТЕОРЕМА. Более чем двумерное банахово пространство квазиконвексно в том и только в том случае, если оно гильбертово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует установить только, что в квазиконвексном пространстве X на произвольное конечномерное подпространство X_0 действует проектор с единичной нормой, и сослаться на общеизвестную теперь теорему Какутани, установленную в 1939 году.

Обозначим через ι тождественное вложение X_0 в X. В [I] Л.В.Канторович доказал, что имеется оператор одновременного продолжения

$$E: X_0' \to X', \quad \iota' E = Id_{X_0'}, \quad \|E\| = 1.$$

Рассмотрим изометрические операторы двойного штрихования

$$\pi_X : X \to X'', \quad \pi_{X_0} : X_0 \to X_0''$$

– канонические вложения X и X_0 в соответствующие вторые сопряженные пространства. Отметим, что π_{X_0} в данном случае изоморфизм. Положим

$$P = \pi_{X_0}^{-1} E' \pi_X ; \qquad P : X \to X_0 .$$

Несомненно, что оператор P – искомый. В самом деле, $\|P\| \leq \|\pi_{X_0}^{-1}\| \, \|E\| \, \|\pi_X\| \leq 1$. Кроме того, для $x_0 \in X_0$ и $x_0' \in X_0'$ в силу определений имеем

$$< E' \pi_X x_0 / x_0' > = < \pi_X x_0 / E x_0' > =$$

$$= E x_0'(x_0) = E x_0' (\iota x_0) = \iota' E x_0'(x_0) = x_0'(x_0) = < \pi_{X_0} x_0 / x_0' >.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. О продолжении семейств линейных функционалов.- Докл. АН СССР, 1935, т.I, № 4, с.204-207.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.10.1981 г.