Выпуск 28(45) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Выпуклый анализ

УДК 518.9:519.53

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

В.А.Васильев

В работе предлагается внутренняя характеристика класса операторов, аналогичных функции Шепли для регулярных игр на метрическом компакте [1,2]. Центральную роль в построении и исследовании этих операторов играет надлежащая метризация пространства неаддитивных регулярных функций множества, основанная на идеях известных работ Л.В.Канторовича [3] и Л.В. Канторовича - Г.Ш.Рубинштейна [4]. Полученные результаты связаны с проблемой строения ядер регулярных игр [5,6]. В работе используется терминология и обозначения, принятые в [2,7].

1. Приведем необходимые понятия и формулировки основных результатов. Пусть Q - произвольный метрический компакт с метрикой ρ. Борелевскую алгебру Q будем обозначать через Σ, а совокупность всех конечных Σ-измеримых разбиений $e\in\Sigma$ - через $\Xi(e)$. Положим $\Xi=\bigcup_{e\in\Sigma}\Xi(e)$ и для каждой функции $v:\Sigma\to R^1$, $v(\emptyset)=0$, и $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi$, следуя [8], определим полиномиальную разность

$$v(\eta)=\sum_{\omega\subseteq\{1,\dots,m\}}(-1)^{m-|\omega|}\,v\Big(\bigcup_{i\in\omega}e_i\Big)$$

(здесь и далее $|\omega|$ - число элементов ω). Нетрудно показать, что для всех $e\in\Sigma$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi(e)$ справедливо тождество

$$v(e)=\sum_{\omega\subseteq N^\ell} v(\eta^{\omega}), \tag{1.1}$$

где $N^{\eta}=\{1,\dots,m\}$, $\eta^{\omega}=\{e_i\}_{i\in\omega}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I [9]. Будем говорить, что функция v имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если

$$|v|_0 = \sup\{\sum_{\omega\subseteq N^{\eta}} |v(\eta^{\omega})| \,/\, \eta\in\Xi(Q)\} < \infty .$$

Совокупность всех функций ограниченной полиномиальной вариации обозначим через V. Множество V, наделенное операциями поточечного сложения и умножения на скаляр и полуупорядоченностью, порожденной конусом

$$V_+ = \{v / v(\eta)\geqslant 0,\ \eta\in\Xi\},$$

является линейным полуупорядоченным пространством [9]. В частности, для каждого элемента $v\in V$ определены положительная, отрицательная и полная вариации $v_+ = v\vee 0$, $v_- = -v\vee 0$, $|v| = -v\vee v$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [9]. Будем говорить, что функция $v\in V$ регулярная, если для любого $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi$ выполняется равенство

$$|v|(\{e_1,\dots,e_m\}) = \sup\{|v|(\{c_1,\dots,c_m\}) / c_i\subseteq e_i,\ i\in N^{\eta}\},$$

где c_i - замкнутые подмножества Q.

Совокупность всех регулярных функций из V обозначим через rV. Как установлено в упоминавшейся уже работе [9], множество rV, наделенное нормой $|\cdot|_0$ и полуупорядоченностью $u \geqslant_0 v \Leftrightarrow u-v\in rV_+$ ($rV_+ = rV\cap V_+$), является KB - пространством.

Наряду с нормой $|\cdot|_0$ в дальнейшем используется аналог перевозочной нормы Канторовича - Рубинштейна [4], представляющий продолжение последней с пространства аддитивных регулярных функций множества rV' на rV. Введем необходимые обозначения. Для каждой функции $\psi:\Sigma\times\Sigma\to R^1$ и $\eta = \langle e_1,\dots,e_m\}$; $\xi = \langle e_1',\dots,e_{m'}'\}$ положим

$$\psi(\eta,\xi) = \sum_{\omega\subseteq N^{\eta},\,\omega'\subseteq N^{\xi}} (-1)^{m+m'-|\omega|-|\omega'|}\,\psi(\bigcup_{i\in\omega} e_i, \bigcup_{j\in\omega'} e_j').$$

(Как обычно, $\psi(\emptyset,e) = \psi(e,\emptyset) = 0$ для всех $e\in\Sigma$.)

Отметим сразу же, что справедлив аналог тождества (I.I):

$$\psi(e,e') = \sum_{\omega\subseteq N^{\eta},\,\omega'\subseteq N^{\xi}} \psi(\eta^{\omega},\xi^{\omega'}),\quad \eta\in\Xi(e),\ \xi\in\Xi(e').$$

Обозначим через $r\Psi_+$ совокупность всех функций $\psi:\Sigma\times$

$\times\Sigma \to R^1$, для которых $\psi(\eta,\xi) \geq 0$ при любых $\eta,\xi \in \Xi$ и $\psi(\cdot,e)$, $\psi(e,\cdot) \in zV$ для всех $e \in \Sigma$. Для каждой функции $v \in zV_0 = \{v \in zV \mid v(Q)=0\}$ положим

$$\Psi_v = \{\psi \in z\Psi_+ \mid \psi(Q,e) - \psi(e,Q) = v(e),\ e \in \Sigma\}.$$

Продолжим ρ до метрики $\mathcal{R}$ на $Q^{[N]} = \{\tau \subseteq Q \mid |\tau| < \infty\}$ по формуле*)

$$\mathcal{R}(\tau,\tau') = \begin{cases} \min\{\|g\| \mid g \in E(\tau,\tau')\}, & |\tau| = |\tau'|, \\ \mathcal{D}, & |\tau| \neq |\tau'|, \end{cases}$$

где $E(\tau,\tau')$ – совокупность всех взаимно-однозначных отображений $g:\tau \to \tau'$, $\|g\| = \max\{\rho(t,g(t)) \mid t \in \tau\}$, $\mathcal{D} = diam\, Q$. Далее, зафиксируем некоторую функцию $\mathcal{U}: Q^{[N]} \to R^1$, удовлетворяющую условиям

$$|\mathcal{U}(\tau) - \mathcal{U}(\tau')| \leq \mathcal{R}(\tau,\tau'), \qquad \tau,\tau' \in Q^{[N]},$$

$$\mathcal{U}(\tau) > \sup\{\mathcal{R}(\tau,\tau') \mid \tau' \in Q^{[N]}\}, \qquad \tau \in Q^{[N]}.$$

Переходя к определению нормы $\|\cdot\|_1$, введем следующие сокращения. Пусть $\alpha: Q^{[N]} \to R^1$, $\beta: Q^{[N]} \times Q^{[N]} \to R^1$, $v:\Sigma \to R^1$, $\psi:\Sigma\times\Sigma \to R^1$ – произвольные функции. Рассмотрим $\eta = \{e_1,\dots,e_m\} \in \Xi(Q)$, $\tau = \tau^\eta = \{t_1,\dots,t_m\}$, $t_i \in e_i$, и положим $\tau_\omega \triangleq \{t_i \mid i \in \omega\}$,

$$S_v^\alpha(\eta,\tau) \triangleq \sum_{\omega \subseteq N^\eta} \alpha(\tau_\omega)\cdot v(\eta^\omega),$$

$$S_\psi^\beta(\eta,\tau) \triangleq \sum_{\omega,\omega' \subseteq N^\eta} \beta(\tau_\omega,\tau_{\omega'})\cdot \psi(\eta^\omega,\eta^{\omega'}).$$

Пределы обобщенных последовательностей $\{S_v^\alpha(\eta,\tau)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$, $\{S_\psi^\beta(\eta,\tau)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$, если они существуют и не зависят от выбора τ^η, $\eta \in \Xi(Q)$, будем обозначать через $v(\alpha) = \int_Q \alpha(\tau)v(de)$, $\psi(\beta) = \int_Q\int_Q \beta(\tau,\tau')\psi(de,de')$ соответственно. (Здесь и далее имеется в виду сходимость по направлению $\Xi(Q)$.)

Пусть теперь v – произвольный элемент из zV. Положим

$$\|v\|_1 = \inf\{C_1(\psi) + C_2(w)\}, \tag{I.2}$$

где

$$C_1(\psi) = \int_Q\int_Q \mathcal{R}(\tau,\tau')\psi(de,de'),$$

---

*) Конкретный вид продолжения ρ несущественен; важно лишь, чтобы вводимое ниже множество $P_\mathcal{R}$ было достаточно "ёмким".

$$C_2(w)=\int_Q \mathcal{U}(\tau)|w|(de),$$

а инфимум в (I.2) берется по всем $w\in \tau V$, $\psi\in\tau\Psi_+$ таким, что $w(Q)=v(Q)$, $\psi\in\Psi_{v-w}$. Незначительная модификация рассуждений, приведенных в [2], показывает, что правая часть (I.2) определена корректно и функция $\|\cdot\|_1$ удовлетворяет всем требованиям нормы.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если, как и в [2], интерпретировать $\mathcal{R}(\tau,\tau')$ как расходы, связанные с передачей единицы полезности объединением τ объединению τ', $\mathcal{U}(\tau)$ – как затраты, необходимые для получения извне единицы полезности объединением τ, а величину $v(e)$ дохода коалиции $e\in\Sigma$ в кооперативной игре $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$ – как результат перераспределения полезности между игроками и получения ее извне, то величина $\|v\|_1$ имеет смысл минимальных расходов, связанных с реализацией игры Γ.

Перейдем к описанию интересующего нас класса операторов. Положим $\tau V_+^1=\tau V^1\cap V_+$ и обозначим через $P=P_{\mathcal{R}}$ совокупность всех функций $\rho: Q^{[N]}\to\tau V_+^1$ таких, что $\|\rho(\tau)-\rho(\tau')\|_1\leq \mathcal{R}(\tau,\tau')$, $supp\ \rho(\tau)\subseteq\tau$, $\rho(\tau)(Q)=1$ для всех $\tau,\tau'\in Q^{[N]}$.

Зафиксируем $\rho\in P$, $v\in\tau V$ и для каждой функции $f\in C(Q)$ положим $f_\rho(\tau)=\int_Q f\,d\rho(\tau)$. Тогда теми же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 3.I из [2], можно показать, что отображение $f\mapsto\int_Q f_\rho(\tau)v(de)$ представляет из себя непрерывный линейный функционал на $C(Q)$. Пусть μ_v – отвечающая ему (по теореме Рисса – Маркова) мера из τV^1. Оператор $v\mapsto\mu_v$, $v\in\tau V$, определенный указанным способом, будем обозначать через Φ_ρ.

В дальнейшем предполагается, что функция $\mathcal{U}$ удовлетворяет следующему дополнительному требованию:

$$\sum_{t\in\tau}\mathcal{U}(t)\cdot\rho_{t,\tau}\leq\mathcal{U}(\tau),\quad \rho\in P,\ \tau\in Q^{[N]}, \qquad (I.3)$$

где $\rho_{t,\tau}=\rho(\tau)(\{t\})$. Простейшим примером такой функции является $\mathcal{U}(\tau)=const>0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно показать, что сужение оператора Φ_ρ на подпространство $fV=\{v/\exists R\in Supp\ v(|R|<\infty)\}$, где

$$Supp\ v=\{R\in\Sigma\,|\,v(e\cap R)=v(e),\ e\in\Sigma\},$$

представимо в виде

$$\Phi_\rho(v)=\sum_{\tau\subseteq R_v}v_\tau\cdot\rho(\tau),\quad v\in fV, \qquad (I.4)$$

где $v_\tau = v(\{t_1\}, \ldots, \{t_m\})$ для всех $\tau = \{t_1, \ldots, t_m\}$, а R_v .- наименьший конечный носитель v . Таким образом, $\Phi_\rho(v)$ имеет смысл H -дележа игры $\Gamma = (Q, \Sigma, v)$, при этом доли участия игроков в объединениях $\tau \in Q^{[N]}$ определяются функцией $\rho \in P$, а расходы $\|\Phi_\rho(v)\|_1$, связанные с реализацией дележа $\Phi_\rho(v)$, не превышают $\|v\|_1$ (см. [6], а также [2]). Учитывая сказанное, операторы Φ_ρ можно интерпретировать как несимметрические аналоги функции Шепли для регулярных игр на компакте [2].

В работе доказывается, что семейство линейных операторов $\{\Phi_\rho \mid \rho \in P\}$ полностью характеризуют следующие свойства.

$H1$. Монотонность:

$$\Phi(v) \in zV_+^1, \quad v \in zV_+ .$$

$H2$. Сохранение носителей:

$$\Phi(v)(R) = v(R), \quad v \in zV, \ R \in Supp\ v.$$

$H3$. Непрерывность:

$$\|\Phi(v)\|_1 \leq \|v\|_1, \quad v \in zV.$$

Именно, справедлива

ТЕОРЕМА I. Для того чтобы линейный оператор $\Phi: zV \to zV^1$ удовлетворял условиям $H1$-$H3$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi = \Phi_\rho$ для некоторого $\rho \in P$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что $\{\Phi_\rho \mid \rho \in P\}$ - выпуклое, ограниченное и замкнутое (в операторной топологии) множество в $\mathcal{L}(zV, zV^1)$. Его "ёмкость" определяется, очевидно, множеством P . Не останавливаясь на подробном исследовании P , укажем лишь, что в наших предположениях последнее всегда содержит функцию $\rho(\tau)(\{t\}) = 1/|\tau|$, $t \in \tau$, задающую вектор Шепли*) [2] . В случае $Q = [0,1]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ среди элементов P содержатся, например, функции $\rho_{min}(\tau) = \mathcal{E}_{min\,\tau}$, $\rho_{max}(\tau) = \mathcal{E}_{max\,\tau}$, где $min\,\tau$ и $max\,\tau$ - наименьший и наибольший элементы τ .

---

*) Интересно отметить, что относительно стандартной метрики Хаусдорфа эта функция разрывна.

Напомним, что через $fV=\{v \mid \exists R \in Supp\, v\ (|R|<\infty)\}$ обозначается совокупность всех функций v, имеющих конечные носители. В основе доказательства теоремы I лежит следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. Подпространство fV всюду плотно в $(zV, \|\cdot\|_1)$.

2. Здесь устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения (характеризация сужений Φ_ρ на fV, непрерывность операторов Φ_ρ в $(zV, \|\cdot\|_1)$) и приводятся доказательства основных результатов работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для того чтобы линейный оператор $\Phi: fV \to zV^1$ удовлетворял условиям $H1-H3$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi=\Phi_\rho$ для некоторого $\rho \in P$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Для каждого $\tau \in Q^{[N]}$ положим

$$\mathcal{E}_\tau(e)=\begin{cases}1, & \tau \subseteq e,\\ 0, & \tau \not\subseteq e,\end{cases} \quad e \in \Sigma .$$

Ясно, что $\mathcal{E}_\tau \in zV_+$ для всех $\tau \in Q^{[N]}$. Поэтому в силу $H1$, $\Phi(\mathcal{E}_\tau) \in zV^1_+$ для всех $\tau \in Q^{[N]}$. Далее, так как $\tau \in Supp\, \mathcal{E}_\tau$ и $\mathcal{E}_\tau(\tau)=1$, то, ввиду $H2$, $R_{\Phi(\mathcal{E}_\tau)} \subseteq \tau$ и $\Phi(\mathcal{E}_\tau)(\tau)=1$. Учитывая непрерывность оператора Φ и тот факт, что $\|\mathcal{E}_\tau-\mathcal{E}_{\tau'}\|_1 \leq \mathcal{R}(\tau,\tau')$, на основании вышесказанного имеем: функция $\rho: \tau \to \Phi(\mathcal{E}_\tau)$, $\tau \in Q^{[N]}$, принадлежит P. Нетрудно заметить, что семейство $\{\mathcal{E}_\tau \mid \tau \in Q^{[N]}\}$ является алгебраическим базисом fV. При этом для каждого $v \in fV$ справедливо разложение

$$v=\sum_{\tau \subseteq R_v} v_\tau \cdot \mathcal{E}_\tau ,$$

где, как и ранее, $v_\tau=v(\{\{t_1\},\ldots,\{t_m\}\})$, $\tau=\{t_1,\ldots,t_m\}$. Отсюда, в силу линейности Φ, имеем

$$\Phi(v)=\sum_{\tau \subseteq R_v} v_\tau \cdot \rho(\tau),$$

что на основании замечания 2 и дает требуемое равенство $\Phi=\Phi_\rho$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть линейный оператор $\Phi: fV \to zV^1$ представим в виде $\Phi(v)=\sum_{\tau \subseteq R_v} v_\tau \cdot \rho(\tau)$, где ρ - некоторый элемент из P. Свойства монотонности и сохранения носителей вытекают непосредственно из определения Φ. Учитывая неравенство

$$\int_Q \mathcal{U}(\tau)|\Phi(v)|(de) \leq \int_Q \mathcal{U}(\tau)|v|(de), \quad v\in f V,$$

вытекающее из $H2$ и (I.3), для установления $H3$ достаточно показать, что $\|\Phi(v)\|_1 \leq \|v\|_1$ для всех $v \in f V_0 = \{v\in fV \mid v(Q)=0\}$. Отметим сразу же, что для этих функций инфимум в (I.2) определяется "перевозками", носители которых содержатся в $R_v \times R_v$. Поэтому для каждой функции $v\in f V_0$ существует $\psi \in \Psi_v$, для которой справедливо равенство

$$\|v\|_1 = \sum_{\tau,\tau' \subseteq R_v} \mathcal{R}(\tau,\tau')\cdot \psi_{\tau,\tau'}, \tag{2.I}$$

где $\psi_{\tau,\tau'} = \psi(\{\{t_1\},\dots,\{t_m\}\},\{\{t_1'\},\dots,\{t_{m'}'\}\})$ для всех $\tau=\{t_1,\dots,t_m\}$, $\tau'=\{t_1',\dots,t_{m'}'\}$. Итак, пусть $\psi\in\Psi_v$ определена условием (2.I). Построим аддитивную по каждому аргументу функцию $\bar\psi$ с носителем в $R_v\times R_v$ по формуле

$$\bar\psi = \sum_{\tau,\tau' \mid t\in\tau,\, t'\in\tau'} \psi_{\tau,\tau'}\cdot \psi^{\tau,\tau'}, \tag{2.2}$$

где $\psi^{\tau,\tau'} \in \Psi_{\rho(\tau)-\rho(\tau')}$, причем $\sum_{t\in\tau,\, t'\in\tau'} \rho(t,t')\times \times\psi^{\tau,\tau'}(\{t\},\{t'\}) = \|\rho(\tau)-\rho(\tau')\|_1$. Учитывая равенство

$$\sum_{\tau'\subseteq R_v}\psi_{\tau',\tau} - \sum_{\tau'\subseteq R_v}\psi_{\tau,\tau'} = v_\tau, \qquad \tau\subseteq R_v,$$

справедливое для всех $v\in f V_0$ и $\psi\in\Psi_v$, нетрудно показать, что $\bar\psi\in\Psi_{\Phi(v)}$. Далее, поскольку $\|\rho(\tau)-\rho(\tau')\|_1 \leq \leq \mathcal{R}(\tau,\tau')$, на основании (2.2) имеем

$$\|\Phi(v)\|_1 \leq \sum_{t,t'\in R_v} \rho(t,t')\cdot\bar\psi(\{t\},\{t'\}) \leq \sum_{\tau,\tau'\subseteq R_v} \mathcal{R}(\tau,\tau')\cdot\psi_{\tau,\tau'} = \|v\|_1,$$

что и завершает доказательство предложения I.

Излагаемые ниже доказательства теоремы 2 и предложения 2 проходят (с некоторыми модификациями и уточнениями) по той же схеме, что и для аналогичных утверждений из работы автора [2] (теоремы 4.I, 4.2 соответственно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Покажем, что интересующий нас вопрос редуцируется к задаче о плотности $f V$ в подпространствах $zV^{(n)}$, $n=1,\dots$, однородных полиномиальных функций множества из zV. Положим

$$zV^n = \{v\in zV \mid \forall m \geq n+1\ \forall\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi\,(v(\{e_1,\dots,e_m\})=0)\},$$

$$zV^{(n)} = \{v\in zV^n \mid \forall w\in zV^{n-1}\,(|v|\wedge|w|=\mathbb{O})\}.$$

На основании теоремы об аналитичности (см.[9], теорема 4.2) для каждой функции $v\in zV$ справедливо разложение

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} v(n), \tag{2.3}$$

где $v_{(n)}$ – проекции v относительно $\geq_o$ на компоненты $\tau V^{(n)}$, а сходимость в (2.3) понимается в смысле нормы $\|\cdot\|_o$.

Рассмотрим произвольный элемент $v\in\tau V_o$. Ясно, что для любого представления $v=v_1-v_2$, $v_1,v_2\in\tau V_+$, функция $\psi(e,e')=$ $=1/v_1(Q)\cdot v_1(e')\cdot v_2(e)$ принадлежит Ψ_v. Поэтому для всех $v\in\tau V_o$, $R\in Supp\, v$ справедливо неравенство

$$\|v\|_1\leq 1/2\cdot diam\, R\cdot|v|_o. \tag{2.4}$$

Итак, учитывая (2.3),(2.4) и тот факт, что τV_o -гиперподпространство τV, плотность $f V$ достаточно установить для подпространств $\tau V_o^{(n)}=\tau V^{(n)}\cap\tau V_o$, $n=1,\ldots$. Пусть $v\in\tau V_o^{(n)}$, $\varepsilon>0$. Выберем разбиение $\eta=\{e_1,\ldots,e_k\}\in\Xi(Q)$ таким образом, чтобы $diam\, e_i\leq\varepsilon/2\|v_o\|$, $i\in N^\ell$, и для всех разбиений $\xi\geq\eta$ выполнялись неравенства

$$\sum_{|\omega|<n}|v|(\xi^\omega)<\varepsilon/2\mathcal{D}. \tag{2.5}$$

Зафиксируем какие-нибудь точки $t_i\in e_i$, $i\in N^\ell$, и построим элемент $v^\ell=\sum_{\omega\in N^\ell}v(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$, где $\tau_\omega=\{t_i\,/\,i\in\omega\}$. Покажем, что $\|v-v^\ell\|_1<\varepsilon$. С этой целью введем функции $v_{\eta,\omega}(e)=$ $=v(\{e\cap e_{i_1},\ldots,e\cap e_{i_k}\})$, где $\{i_1,\ldots,i_k\}=\omega$. В силу (I.I) справедливо равенство $v-v^\ell=\sum_{\omega\in N^\ell}w_\omega$, где $w_\omega=v_{\eta,\omega}-v(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$. Поэтому $\|v-v^\ell\|_1\leq\sum_{\omega\in N^\ell}\|w_\omega\|_1$. На основании (2.4),(2.5) и соотношений

$$(w_\omega)_+\leq_o(v_+)_{\eta,\omega}+v_-(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}, \tag{2.6}$$

$$(w_\omega)_-\leq_o(v_-)_{\eta,\omega}+v_+(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega},$$

справедливо неравенство $\sum_{|\omega|<n}\|w_\omega\|_1<\varepsilon/2$. Для оценки оставшихся слагаемых заметим, что если u – одна из функций $(v_+)_{\eta,\omega}$, $(v_-)_{\eta,\omega}$, $v_+(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$ или $v_-(\eta^\omega)\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$, $|\omega|=n$, и ξ – подразбиение η, то $u(\xi^{\omega'})$ может отличаться от нуля только в том случае, когда $|\omega'|=n$ и каждый элемент разбиения η^ω содержит ровно один элемент разбиения $\xi^{\omega'}$. Далее, ввиду ограничения на диаметр множеств e_i, для всех $\tau=$ $=\{t_i\}_{i\in\omega}$, $\tau'=\{t_i'\}_{i\in\omega}$ таких, что $t_i,t_i'\in e_i$, $i\in\omega$, справедливо неравенство $\mathcal{R}(\tau,\tau')\leq\varepsilon/2|v|_o$. Отсюда, учитывая предыдущее замечание и неравенства

$$\|(v_+)_{\eta,\omega} - v_+(\eta^\omega)\cdot \varepsilon_{\tau_\omega}\|_1 \le \iint\limits_{Q\,Q} \mathcal{R}(\tau,\tau')(v_+)_{\eta,\omega}(de)\cdot \varepsilon_{\tau_\omega}(de'),$$

$$\|(v_-)_{\eta,\omega} - v_-(\eta^\omega)\cdot \varepsilon_{\tau_\omega}\|_1 \le \iint\limits_{Q\,Q} \mathcal{R}(\tau,\tau')(v_-)_{\eta,\omega}(de)\cdot \varepsilon_{\tau_\omega}(de'),$$

имеем: $\|w_\omega\|_1 \le (\varepsilon/2\|v\|_0)\cdot |v|(\eta^\omega)$ для всех n -элементных ω. Таким образом, $\sum\limits_{|\omega|=n} \|w_\omega\|_1 < \varepsilon/2$, что и завершает доказательство теоремы 2.

В силу предложения 2 и теоремы о плотности fV в zV_0, для доказателства теоремы I достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого $\rho \in P$ оператор Φ_ρ непрерывен в пространстве $(zV, \|\cdot\|_1)$, причем $\|\Phi_\rho(v)\|_1 \le \|v\|_1$ для всех $v \in zV$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы 2 и предложения I имеем $\|v^\ell - v\|_1 \to 0$, $\|\Phi_\rho(v^\ell)\|_1 \le \|v^\ell\|_1$, где v^ℓ определяется так же, как и в доказательстве теоремы 2. Поэтому для наших целей достаточно установить сходимость

$$\|\Phi_\rho(v^\ell) - \Phi_\rho(v)\|_1 \to 0.$$

Итак, пусть $v \in zV$, $\rho \in P$, $w = \Phi_\rho(v)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\eta = \{e_1, \dots, e_m\} \in \Xi(Q)$ так, чтобы $diam\ e_i \le \varepsilon/4m\|v\|_0$, $i \in N^\ell$, и для всех $\eta' \ge \eta$ выполнялись неравенства $\|w - w^{\ell'}\|_1 < \varepsilon/2$, где $w^{\ell'} = \sum_{i \in N^{\ell'}} w(e_i')\cdot \varepsilon_{t_i'}$, $\eta' = \{e_1', \dots, e_{m'}'\} \in \Xi(Q)$, $t_i' \in e_i'$, $i \in N^{\ell'}$. В силу определения оператора Φ_ρ, существует разбиение $\xi \ge \eta$ такое, что для всех $\eta' \ge \xi$ справедливы оценки

$$\|w^\ell - w^{\ell'}\|_1 < \varepsilon/4,$$

$$\Big|w(e_i) - \sum_{t' \in \eta'(e_i)} \sum_{\omega \subseteq N^{\ell'} | t' \in \tau_\omega'} v(\eta'^\omega) \times \tag{2.7}$$
$$\times \rho_{t',\tau_\omega'}\Big| < \varepsilon/4mK, \quad i \in N^\ell,$$

где $\eta'(e_i) = \{t' \in \tau^{\ell'} \mid t' \in e_i\}$, $K = max\{\mathcal{U}(t_i) \mid i \in N^\ell\}$. Тогда, учитывая выбор η', имеем

$$\|\Phi_\rho(v^{\ell'}) - w\|_1 \le \|\Phi_\rho(v^{\ell'}) - w^\ell\|_1 + \|w^\ell - w^{\ell'}\|_1 +$$
$$+ \|w^{\ell'} - w\|_1 < \varepsilon/2 + \|w^\ell - w^{\ell'}\|_1 +$$
$$+ \sum_{i \in N^\ell} \Big\| \sum_{t' \in \eta'(e_i)} a_{t'}\cdot \varepsilon_{t'} - w(e_i)\cdot \varepsilon_{t_i} \Big\|_1, \tag{2.8}$$

где $a_{t'} = \sum_{\omega \in N^{\ell} | t' \in \tau'_\omega} v(\eta^{\omega}) \cdot p_{t', \tau'_\omega}$; $t' \in \eta'(e_i)$.

Используя неравенство (2.4), оценки (2.7) и ограничения на диаметр e_i , $i \in N^{\ell}$, получаем

$$\| \sum_{t' \in \eta'(e_i)} a_{t'} \cdot \varepsilon_{t'} - w(e_i) \cdot \varepsilon_{t_i} \| \leq$$

$$\leq \varepsilon / 4m \|v\|_0 \cdot (\sum_{t' \in \eta'(e_i)} |a_{t'}| + \varepsilon/4m .$$

Далее, нетрудно проверить, что $\| \Phi_p (v) \|_0 \leq \|v\|_0$. Поэтому, учитывая оценки (2.7), определение $a_{t'}$ и неравенства (2.8), имеем требуемые соотношения:

$$\| \Phi_p (v^{\ell'}) - w \|_1 < \varepsilon , \quad \eta' \geq \xi .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. АУМАН Р., ШЕПЛИ Л. Значения для неатомических игр. - М.: Мир, 1977.
2. ВАСИЛЬЕВ В.А. Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации. - Оптимизация, 1975, вып. 17(34), с.5-27.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. - Докл. АН СССР, 1942, т.37, № 7-8, с.227-229.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ. Серия математика, механика, астрономия, 1958, вып. 7, №2, с.52-59.
5. ВАСИЛЬЕВ В.А. Строение ядер вполне положительных регулярных игр. - Тезисы докладов У Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980, с.43-45.
6. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном классе дележей в кооперативных играх. - Докл. АН СССР, 1981, т.256, №2, с.265-268.
7. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.:Физматгиз, 1961.
8. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. - Оптимизация, 1973, вып.9(26), с.157-164.
9. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном пространстве неаддитивных функций множеств. - Оптимизация, 1975, вып.16(33), с.99-120.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.II.1981 г.