Выпуск 28(45) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ МАКРОМОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А.М.Рубинов

1. При исследовании моделей экономической динамики, учитывающих потребление в явном виде, как правило, используют предложенный еще в 1928 г. Ф.Рамсеем [1] принцип оптимальности, заключающийся в максимизации суммарной полезности. В дискретном времени он сводится к отысканию траектории развития экономики, на которой достигает наибольшего по всем допустимым траекториям значения сумма $\sum u_t(c_t)$, где c_t - потребление в момент t на траектории, u_t - функция полезности.

Одна из существенных трудностей, возникающих при использовании принципа Рамсея, связана с проблемой запланового периода, т.е. с указанием граничного значения в конце промежутка планирования. Это значение может быть определено на основе тех или иных представлений о функционировании экономики в заплановом периоде, т.е. на основе какой-то информации об этом периоде. Обычно указанная трудность снимается рассмотрением бесконечных траекторий, т.е. переходом к бесконечному горизонту планирования. При этом молчаливо предполагается "информационное всемогущество" центра, управляющего экономикой, наличие у него точной информации о всех параметрах экономической системы во все моменты времени.

К проблеме запланового периода близок вопрос о величине горизонта планирования. Если предусмотреть возможность корректировки планов в каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$, то в момент $t = 0$ основной интерес представляет указание состояния траектории именно при $t=1$. Естественно считать, что "истинно" оптимальный план в первый год не зависит от длины планового периода. Это возможно, однако, лишь при бесконечном промежутке планирования, т.е., как и выше, требует "информационного всемогущества" управляющего центра.

Помимо принципа Рамсея при исследовании моделей экономической динамики используют еще один принцип оптимальности, основанной на понятии (внешней) эффективности (см., например,[2]). Он также предполагает рассмотрение бесконечных траекторий. Известная процедура скользящего планирования (см., например,[3]) приводит к траекториям, лишь близким к оптимальным, причем эту близость можно обеспечить только при достаточно больших "горизонтах скольжения".

Итак, отыскание траекторий, удовлетворяющих точно или приближенно известным принципам оптимальности, требует обладания информацией о возможностях экономической системы в достаточно отдаленном будущем. В то же время наличие такой информации представляется весьма сомнительным. Здесь не имеет смысла говорить даже о стохастической ситуации, ибо априорные вероятности тех или иных реализаций,например технологий (возможно, и сами эти реализации), в далеком будущем управляющему центру в базовый год полностью неизвестны. Налицо неопределенность.

В настоящей работе предлагается новый принцип оптимальности, не использующий концепции полезности или внешней эффективности. Он основан на применении постулата о полном использовании потенциальных возможностей экономики и иллюстрируется ниже на примере одно- и двухпродуктовых моделей. Что касается информации, которой обладает управляющий центр, то предполагается следующее:

1) В каждый момент $t=0,1,\ldots$ центр имеет полные и точные сведения об используемых в модели параметрах экономической системы непосредственно в этот момент и в близкие к нему моменты (скажем, $t+1$, $t+2$).

2) Центром принят ряд гипотез общего, методологического, характера о поведении экономики на всем бесконечном промежутке планирования. Грубо говоря, предполагается, что центр уверен в следующем: а) те или иные величины, характеризующие систему, будут, как функции времени, ограничены и отделены от нуля, при этом знания верхних и нижних границ этих величин не требуется;

б) экономика с течением времени изменяется достаточно медленно.

Конкретное выражение этих гипотез может меняться в зависимости от рассматриваемых моделей. Кроме того, в тех или иных моделях могут появиться и другие гипотезы, указывающие на уверенность центра в том, что развитие экономики будет подчиняться некоторым общим закономерностям.

Постулат о полном использовании потенциальных возможностей требует прежде всего дать точное определение этих возможностей. Ниже оно дается для рассматриваемых здесь моделей. Отметим, что этот постулат близок к принципу дифференциальной оптимизации Л.В.Канторовича (см., например, [4]).

Указанный постулат может проявляться двояко: с одной стороны, можно считать, что на его основе управляющий центр должен однозначно вырабатывать решения, причем малейшее отступление от этого постулата приводит к ухудшению показателей экономического развития, принятых центром. С другой стороны, постулат о полном использовании потенциальных возможностей экономики можно воспринимать менее категорично, лишь как некоторую тенденцию. При этом центр, руководствуясь соображениями внемодельного характера, может в данный момент нарушить этот постулат, однако систематические и обширные нарушения его приводят к существенному ухудшению состояния экономики в целом, к построению экономического механизма, не рассчитанного на это состояние. Если иметь в виду весьма грубые макроэкономические модели, то второй подход представляется более оправданным. Действительно, на основе этих моделей, дающих по сути дела лишь качественное описание экономической системы, не имеет смысла делать какие-то вполне определенные количественные выводы, относящиеся к системе. Речь здесь может идти лишь о тенденциях.

Перейдем теперь непосредственно к описанию и исследованию моделей.

2. Здесь рассматривается однопродуктовая модель экономической динамики, обозначаемая ниже символом M_1 . Она описывает экономику, функционирующую в дискретном времени, т.е. информация о ее состояниях поступает лишь в фиксированные моменты времени $t = 0, 1, \ldots$ Через 0 помечено начало базового года, через I,2... - начало некоторого года или конец предшествующего года. Год обозначается символом вида $[t, t+1]$. Под состоянием экономики в модели M_1 понимается двумерный вектор

(K, L), где $K>0, L>0$. Здесь K - объем средств производства, L - затраты рабочей силы в данном состоянии. Объем совокупного общественного продукта P_{t+1}, который может быть произведен в момент $t+1$ при наличии состояния (K,L) в момент t, выражается числом $F_t(K,L)$, где $F_t: R^2_+ \to R_+$ — производственная функция:

$$P_{t+1} = F_t(K,L). \tag{1}$$

Предполагается, что функция F_t положительно однородна первой степени, вогнута, дважды непрерывно дифференцируема, $F_t(1,0) = F_t(0,1) = 0$, $F_t(1,1) \neq 0$, $F_t(K,L) \geq 0$, $(K \geq 0, L \geq 0)$. Затраты рабочей силы в модели M_t задаются экзогенно. Динамика движения фондов в году $[t, t+1]$ описывается равенством

$$K' = \nu_t K + \lambda_{t+1} I_{t+1}. \tag{2}$$

Здесь K' (соответственно K) - фонды в момент $t+1$ (соответственно t), I_{t+1} - капиталовложения, выделенные из совокупного общественного продукта в момент $t+1$, $1-\nu_t$ - коэффициент выбытия фондов в году $[t,t+1]$, $0 \leq \nu_t < 1$, λ_{t+1} - коэффициент создания новых фондов в момент $t+1$, $0 < \lambda_{t+1} \leq 1$. Этот коэффициент показывает, что инвестиции - это еще не фонды. Число $1-\lambda_{t+1}$ указывает долю общего объема капиталовложений, направляемую на поддержание устойчивости, стабильности системы, своеобразную плату за сложность этой системы (см., например, [5]). Оставшаяся часть $\lambda_{t+1} I_{t+1}$ инвестиций I_{t+1} считается преобразованной в момент $t+1$ в производственные фонды.

Для завершения описания функционирования модели требуется указать часть совокупного общественного продукта, выделяемую на инвестиции. При этом предполагается, что весь совокупный общественный продукт P_{t+1} в момент $t+1$ (произведенный в году $[t, t+1]$) представим в виде

$$P_{t+1} = I_{t+1} + w_{t+1} \quad (I_{t+1}, w_{t+1} > 0), \tag{3}$$

где I_{t+1} - инвестиции, w_{t+1} - фонд потребления в тот же момент $t+1$ (в году $[t+1, t+2]$).

ЗАМЕЧАНИЕ. В более точной модели следовало бы учесть часть совокупного общественного продукта, расходуемую на совершенствование производства (в рамках модели - производственных функций). Речь идет о затратах на научно-технический прогресс, борьбу с загрязнением окружающей среды и т.п. Здесь можно считать, что эти затраты определяются экзогенно и заранее изъяты из состава совокупного общественного продукта.

Указание слагаемых в (3) представляет собой по сути дела управление в данной модели. В качестве управляемого параметра удобно выбрать так называемую приведенную среднюю заработную плату ω_{t+1}, которая связана с объемом потребления w_{t+1} и численностью рабочей силы L_{t+1} в момент $t+1$ равенством

$$w_{t+1} = \omega_{t+1} L_{t+1} . \tag{4}$$

(Эпитет "приведенная" употреблен, поскольку равенство (4) предполагает, что имеющийся фонд потребления расходуется только работающими, а не всем населением.) Задавая значение ω_{t+1}, центр по известной экзогенно рабочей силе L_{t+1} определяет объем потребления w_{t+1} и инвестиции I_{t+1}.

Набор $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$ можно рассматривать как механизм движения экономической системы в году $[t, t+1]$ в модели M_1. Действие этого механизма описывается соотношениями (I)-(4), которые показывают, как при известном состоянии (K, L) в момент t получается (при известной рабочей силе $L' = L_{t+1}$) состояние (K', L') в момент $t+1$. Иными словами, этот механизм позволяет найти объем фондов K':

$$K' = \nu_t K + \lambda_{t+1} (F_t (K, L) - \omega_{t+1} L'). \tag{5}$$

Отметим следующие обстоятельства:

I) Указанный механизм не зависит от начального состояния, требуется лишь, чтобы выполнялось неравенство $\omega_{t+1} L_{t+1} < F_t(K, L)$, гарантирующее положительность инвестиций.

2) Этот механизм зависит от значения управляемого параметра ω_{t+1}. Можно считать, что, назначая значение этого параметра, центр выбирает некоторый конкретный механизм из семейства ему подобных.

Выбирая в момент t значение ω_{t+1}, центр определяет состояние (K_{t+1}, L_{t+1}) в момент $t+1$. В результате строится последовательность (K_t, L_t), которую будем называть траекторией модели M_1. Начальное состояние (K_0, L_0) этой траектории предполагается заданным.

Укажем информацию, которой обладает в модели M_1 управляющий центр. В момент t ему точно известны следующие сведения:

- состояние (K_t, L_t);
- производственные функции F_t, F_{t+1};
- коэффициенты создания новых фондов $\lambda_t, \lambda_{t+1}, \lambda_{t+2}$;
- коэффициенты выбытия фондов $1-\nu_t$, $1-\nu_{t+1}$;
- приведенная средняя заработная плата ω_t;
- величина затрат рабочей силы L_{t+1}.

Помимо этого считается, что центром принят ряд гипотез. Перечислим их.

a_1) Центр уверен, что для траектории (K_t, L_t) развития экономики справедливы следующие утверждения: объемы фондов K_t и совокупного общественного продукта $P_{t+1} = F_t(K_t, L_t)$, величина затрат рабочей силы L_t, предельные производительности ресурсов $\frac{\partial F_t}{\partial L}(K_t, L_t)$ и $\frac{\partial F_t}{\partial K}(K_t, L_t)$ ограничены и отделены от нуля. (Говорят, что последовательность x_t, где $x_t > 0$, отделена от нуля, если $\inf\limits_t x_t > 0$.)

a_2) Для параметров модели справедливы следующие утверждения: последовательности λ_t, ω_t и $1-\nu_t$ отделены от нуля.

a_3) Производственные функции F_t обладают тем свойством, что при любых $0 < \eta' < \eta'' < +\infty$ выполняется

$$\inf_t \min_{K+L=1,\ \eta' \le K/L \le \eta''} \frac{\partial^2 F_t}{\partial K \partial L}(K, L) > 0.$$

Эта гипотеза означает, что если фондовооруженности $\eta = K/L$ состояний (K, L) отделены от нуля и ограничены и $K+L=1$, то предельная эффективность труда при увеличении фондов $\frac{\partial^2 F_t}{\partial K \partial L}(K, L)$ на этих состояниях не может быть сколь угодно близка к нулю.

Прежде чем сформулировать гипотезу a_4), отметим, что при каждом t для производственной функции F_t выполняются соотношения

$$\lim_{K/L \to 0} \frac{F_t(K,L)}{L} = F_t(0,1) = 0; \tag{6}$$

$$\lim_{K/L \to 0} \frac{F_t(K,L)}{K} = F_t(1,0) = 0. \tag{7}$$

a_4) Производственные функции F_t обладают тем свойством, что предельные соотношения (6) и (7) выполняются равномерно по t.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $F_t(K, L) = \gamma_t K^{\alpha_t} L^{\beta_t}$, $\alpha_t > 0$, $\beta_t > 0$,

$\alpha_t + \beta_t = 1$ - функция Кобба - Дугласа, то гипотезы a_3) и a_4) заведомо справедливы в предположении, что коэффициенты γ_t ограничены и отделены от нуля (это легко следует из a_1)) и, кроме того, коэффициенты α_t и β_t отделены от нуля. Если $F_t(K,L) = \gamma_t (K^{-\delta_t} - L^{-\delta_t})^{-\frac{1}{\delta_t}}$ - CES-функция, то справедливость a_3) и a_4) вытекает из ограниченности и отделенности от нуля коэффициентов γ_t (это опять следует из a_1) и $\delta_t + 1$,

a_5) На траектории (K_t, L_t) выполняются неравенства

$$K_t + \lambda_t \omega_t L \leq K_{t+1} + \lambda_{t+1} \omega_{t+1} L_{t+1}. \qquad (8)$$

Если $\lambda_t = \lambda_{t+1} = 1$, то (8) приобретает вид $K_t + \omega_t L \leq K_{t+1} + \omega_{t+1} L_{t+1}$ и означает, что национальное богатство вдоль траектории не убывает (сумму $K + \omega L$ можно трактовать в рамках модели M_1 как национальное богатство в состоянии (K,L)). Приведем интерпретацию (8) для общего случая. Поскольку состояние экономики в модели M_1 описывается лишь объемом фондов и рабочей силой, то величины, отличные от указанных, в модели не учитываются, их как бы не существует. Это, в частности, относится и к тем инвестициям, которые не обращаются в фонды. В связи с этим рассмотрим следующую конструкцию. Пусть (K',L') - состояние, которое может быть получено в момент $t+1$ из состояния (K,L) в момент t применением механизма $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$. Если бы переход из (K,L) в (K',L') осуществлялся так, что все инвестиции обращались в фонды и при этом нормы накопления $I'/F_t(K,L)$ и потребления $w'/F_t(K,L)$ не изменились (здесь I' - инвестиции, w' - потребление в момент $t+1$), то вместо механизма $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$ пришлось бы рассматривать механизм $(\lambda_{t+1} F_t, \nu_t, 1, \lambda_{t+1}\omega_{t+1})$. Поскольку те же рассуждения должны быть произведены и в исходный момент t , то вместо ω_t следует рассмотреть $\lambda_t \omega_t$. Отсюда вытекает, что наряду с национальным богатством $K + \omega_t L$ в состоянии (K,L) имеет смысл рассматривать величину $K + \lambda_t \omega_t L$, которую можно трактовать как приведенное национальное богатство. Справедливо равенство

$$K' + \lambda_{t+1} \omega_{t+1} L' = \nu_t K + \lambda_{t+1} F_t(K,L),$$

т.е. приведенное национальное богатство в состоянии (K',L'), полученном из (K,L) , совпадает с $\nu_t K + \lambda_{t+1} F_t(K,L)$.

Вернемся к гипотезе a_5). Из сказанного следует, что ее можно интерпретировать следующим образом: приведенное национальное богатство с развитием экономики не убывает.

a_6) Экономический механизм $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$ модели M_1 меняется с течением времени достаточно медленно.

Формальный смысл этой гипотезы уточняется и обсуждается ниже (см. п.4).

Прежде чем сформулировать принцип оптимальности, используемый в модели M_1, опишем вспомогательный аппарат, на который опирается исследование этой модели.

3. Предположим временно, что управляющий центр обладает "полной информацией", т.е. ему известны механизмы $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$ для всех $t \geqslant 0$. Предположим далее, что трудовые ресурсы не ограничены (центр может использовать в момент $t+1$, $t=0,1,\dots$, любую рабочую силу L, лишь бы объем заработной платы $\omega_{t+1} L$ не превышал имеющегося в этот момент фонда потребления w).

Рассмотрим многозначные отображения $\tilde{a}_t$:

$$\tilde{a}_t(K,L)=\{(K',L'): 0 \leq K' \leq \nu_t K + \lambda_{t+1} I,\ 0 \leq L' \leq w/\omega_{t+1},$$

$$I+w \leq F_t(K,L);\ I, w \geqslant 0\},\quad t=1,2,\dots,$$

и модель экономической динамики неймановского типа N_1, определенную последовательностью этих отображений. Траекторией этой модели называется любая последовательность x_t, для которой выполняется $x_{t+1} \in \tilde{a}_t(x_t)$, $t=1,2,\dots$ (Удобно считать, что траектории начинаются при $t=1$.)

Наряду с отображение $\tilde{a}_t$ рассмотрим отображение a_t:

$$a_t(K,L)=\{(K',L'): 0 \leq K' \leq \nu_t K + I,\ 0 \leq L' \leq w/w_t,$$

$$I+w \leq \lambda_{t+1} F_t(K,L),\ I, w \geqslant 0\}.$$

Нетрудно проверить, что отображение a_t суперлинейно*). Пусть α_t – неймановский темп роста этого отображения, $\bar{x}_t=(\bar{K}_t,\bar{L}_t)$ – неймановский равновесный вектор, нормированный условием $\bar{K}_t + \lambda_t \omega_t \bar{L}_t = 1$, $A_t = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{t-1}$, где $\alpha_0 = 1$, $t=1,2,\dots$ Рассмотрим последовательность $\tilde{x}_t = (\tilde{K}_t, \tilde{L}_t)$, где $\tilde{K}_t = A_t \bar{K}_t$, $\tilde{L}_t = A_t \bar{L}_t$, и предположим, что она является

---

*) По поводу суперлинейных отображений и моделей неймановского типа см., например, [6,7].

траекторией модели N_1. Тогда, как нетрудно проверить, эта траектория эффективна (оптимальна), причем она допускает характеристику $l_t = A_t^{-1}(1, \lambda_t \omega_t)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$l_t(\tilde{x}_t) = \tilde{K}_t + \lambda_t \omega_t \tilde{L}_t = \max_{K,L} K + \lambda_t \omega_t L,$$

где максимум вычисляется по всем точкам (K, L), достижимым из точки (K_1, L_1) за t шагов; иными словами, на траектории $\tilde{x}_t$ в каждый момент $t > 1$ достигается наибольшее возможное значение приведенного национального богатства.

Можно показать, что если траектория $x_t = (K_t, L_t)$ модели N_1 допускает характеристику и, кроме того, в каждый момент инвестиции на ней положительны:

$$K_{t+1} - \nu_t K_t > 0, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

то найдется число $u > 0$ такое, что $x_t = u\tilde{x}_t$, $t = 2, 3, \ldots$ Таким образом, если последовательность $\tilde{x}_t$ не является траекторией, то в модели вообще нет оптимальных траекторий, для которых выполнено (9).

Следующие утверждения равносильны:

I) последовательность $\tilde{x}_t$ является траекторией модели N_1.

2) справедливы неравенства

$$\alpha_t \bar{K}_{t+1} \geqslant \nu_t \bar{K}_t, \quad t = 1, 2, \ldots; \tag{I0}$$

3) справедливы неравенства

$$f_t(\bar{\eta}_t) \geqslant \nu_t \frac{\bar{\eta}_t}{\bar{\eta}_{t+1}} \omega_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{II}$$

Здесь $f_t(\eta) = F_t(\eta, 1)$; $\bar{\eta}_t = \bar{K}_t / \bar{L}_t$ – фондовооруженность состояния $(\bar{K}_t, \bar{L}_t)$.

Траекторию $x_t = (K_t, L_t)$ модели N_1 назовем регулярной, если фондовооруженности $\eta_t = K_t / L_t$ отделены от нуля и ограничены. Предполагая, что последовательность $\tilde{x}_t$ является траекторией и притом регулярной, можно показать при некоторых дополнительных предположениях, которые здесь не приводятся, что для любой траектории (K_t, L_t) модели N_1 выполняется одно и только одно из следующих двух утверждений:

I) $\lim K_t / A_t = \lim L_t / A_t = 0$;

2) существует такая последовательность γ_t, что $0 < \inf \gamma_t \leqslant \sup \gamma_t < +\infty$ и

$$\lim\left(\frac{K_t}{A_t}-\gamma_t\bar{K}_t\right)=0; \qquad \lim\left(\frac{L_t}{A_t}-\gamma_t\bar{L}_t\right)=0.$$

Условимся называть траектории, для которых выполнено утверждение 2), оптимальными по порядку. Нетрудно проверить, что оптимальность по порядку влечет справедливость соотношения

$$\eta_t-\bar{\eta}_t \to 0,$$

где $\eta_t = K_t/L_t$, $\bar{\eta}_t = \bar{K}_t/\bar{L}_t$.

Траектория $\tilde{x}_t = A^t(\bar{K}_t, \bar{L}_t)$ играет особую роль при изучении модели N_1. Она служит как бы эталоном для оптимальных по порядку траекторий. В связи с этим будем называть ее эталонной.

4. Вернемся к исследованию модели M_1. Оно основано на свойствах модели N_1. Напомним, что в M_1 в каждом году $[t, t+1]$ раздельно заданы экономический механизм, описывающий движение экономики, и состояние (K_t, L_t), к которому этот механизм применяется. Под механизмом в M_1 понимается набор $(F_t, \nu_t, \lambda_{t+1}, \omega_{t+1})$. Что касается N_1, то в этой модели под экономическим механизмом уместно понимать набор $(\lambda_{t+1}, F_t, \nu_t, 1, \lambda_t\omega_t)$. Именно с помощью этого набора определены отображения a_t, порождающие эталонную траекторию. Ниже основную роль играет понятие о потенциальных возможностях механизма $(\lambda_{t+1}, F_t, \nu_t, 1, \lambda_t\omega_t)$. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda_t = 1$ при всех t.

Предположим, что моделируемая экономика находится в момент t в некотором состоянии (K, L) и переходит в момент $t+1$ в состояние (K', L'). В модели N_1 так же, как и в M_1, естественно считать, что национальное богатство складывается из средств производства и предметов потребления. Поэтому в момент t его объем совпадает с $K+\omega_t L$, в момент t' – с $K'+\omega_t L'$, причем $K'+\omega_t L' \leq \nu_t K + F_t(K,L)$ и для некоторых (K', L') последнее неравенство переходит в равенство. Отсюда следует, что максимально возможный темп роста национального богатства в условиях действия экономического механизма $(F_t, \nu_t, 1, \omega_t)$ совпадает с числом

$$\max_{K>0,\, L>0} \frac{\nu_t K + F_t(K,L)}{K+\omega_t L}.$$

Можно проверить, что это число равно неймановскому темпу роста α_t отображения a_t, порожденного механизмом $(F_t, \nu_t, 1, \omega_t)$. Уместно считать, что число α_t описывает потенциальные возможности этого механизма. Важно, однако, подчеркнуть, что эти возможности лишь потенциальны. Если взять произвольное состояние (K, L) и применить к нему указанный механизм, то темп роста национального богатства в этом состоянии может оказаться существенно меньшим потенциальных возможностей α_t. В общем случае (λ_t не обязательно равны единице) роль национального богатства играет приведенное национальное богатство. Максимально возможный темп роста этого функционала в условиях действия механизма $(\lambda_{t+1} F_t, \nu_t, 1, \lambda_t \omega_t)$ совпадает с числом

$$\alpha_t = \max_{K>0,\, L>0} \frac{\nu_t K + \lambda_{t+1} F_t(K, L)}{K + \lambda_t \omega_t L} \tag{12}$$

– неймановским темпом роста отображения a_t, порожденного этим механизмом.

В дальнейшем принимается следующий постулат о действиях экономической системы:

– целенаправленно функционирующая, сознательно, планомерно управляемая и оптимизируемая система должна, если это возможно в силу объективных причин, полностью использовать свои потенциальные возможности.

Применительно к модели M_1 этот постулат означает, что состояние системы и соответствующий экономический механизм должны быть согласованы таким образом, чтобы на этом состоянии достигался максимум в (12). Остановимся на этом вопросе подробнее.

Эталонная траектория

$$A_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1),\ A_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2), \ldots, A_t(\bar{K}_t, \bar{L}_t), \ldots$$

модели N_1 обладает следующим замечательным свойством: для того чтобы определить состояние $A_t(\bar{K}_t, \bar{L}_t)$ этой траектории в момент $t > 1$, достаточно знать предшествующее состояние этой траектории и механизм движения экономики в этот момент (в модели N_1), т.е. набор $(\lambda_{t+1} F_t, \nu_t, 1, \lambda_t \omega_t)$. Информация о возможностях системы в будущем оказывается здесь излишней. Единственное условие, выполнение которого надо требовать – это справедливость неравенств (11), гарантирующая возможность построения эталонной траектории. Иными словами, если параметры модели (производственные функции F_τ, коэффициенты λ_τ, ω_τ, ν_τ) при $\tau > t$ изменить с тем, чтобы неравенства (II) по-прежнему выполнялись, то состояние $A_t(\bar{K}_t, \bar{L}_t)$ будет лежать на эталонной траектории новой модели.

Допустим, теперь, что в каждый момент t известно лишь, что наборы $(\lambda_{\tau+1} F_\tau, \nu_\tau, 1, \lambda_\tau \omega_\tau)$ при $\tau > t$ таковы, что выполнены указанные неравенства, однако точно эти наборы неизвестны. Последнее означает, что в данном случае не имеет смысла говорить о бесконечных траекториях, исходящих из состояния (K_1, L_1) в исходный год $[1,2]$, как об объектах, полностью заданных. Возможно лишь рассматривать эти траектории в процессе их построения подобно тому, как это было сделано выше с эталонной траекторией. Иными словами, в каждый момент t имеет смысл говорить лишь о начальном отрезке $(K_1, L_1), \ldots, (K_t, L_t)$ некоторой бесконечной траектории $(K_1, L_1), \ldots, (K_t, L_t), \ldots, (K_\tau, L_\tau), \ldots$, а не о всей этой траектории целиком. Это не позволяет в данной ситуации употребить в полном объеме понятие оптимальности по порядку. Тем не менее, если указанная траектория строится так, что фондовооруженности $\eta_t = K_t/L_t$ и $\bar{\eta}_t = \bar{K}_t/\bar{L}_t$ не сближаются, то эта траектория, когда она будет построена полностью, окажется не оптимальной по порядку. Если остаться в рамках "конечного времени", то это означает, что при достаточно больших t отношения K_t/A_t и L_t/A_t будут сколь угодно малы, т.е. на данной траектории не удастся выдержать наибольший темп, на который способна экономика. (Этот темп задается эталонной траекторией.)

Возможность рассматривать модель N_1 не как заданную сразу, а в процессе ее построения, и позволяет применить N_1 для изучения модели M_1. Напомним, что в модели M_1 информация в каждый момент t имеется лишь о возможностях экономики в этот и следующий момент, кроме того, известен коэффициент λ_{t+2}, относящийся к моменту $t+2$. Запишем эту информацию в следующем виде: управляющему центру известны состояние (K_t, L_t), механизм движения экономики в году $[t, t+1]$; этот механизм рассматривается в рамках модели N_1, т.е. записывается в виде $(\lambda_{t+1} F_t, \nu_t, 1, \lambda_t \omega_t)$, кроме того, известна "часть механизма" в следующем году, т.е. набор

$$(\lambda_{t+2} F_{t+1}, \nu_{t+1}, 1, \lambda_{t+1} \cdot ?), \tag{13}$$

где знак $?$ стоит вместо неизвестного значения приведенной средней заработной платы ω_{t+1}, которую управляющий центр должен назначить. Помимо этого, центру известна численность рабочей силы L_{t+1} в момент $t+1$. Величина ω_{t+1} играет в M_1 роль управляемого параметра: выбор ее значения указывает состояние (K_{t+1}, L_{t+1}), лежащее на траектории движения экономики в модели M_1, если известно состояние (K_t, L_t).

Теперь посмотрим, что означает выбор приведенной средней заработной платы в процессе построения модели N_1. Если известно значение ω_{t+1}, то тем самым снимается знак вопроса в (I3) и механизм движения экономики в момент $t+1$ полностью определен. По этому механизму может быть определено состояние $A_{t+1}(K_t, L_t)$ эталонной траектории.

Итак, с одной стороны, выбор величины ω_{t+1} определяет состояние (K_{t+1}, L_{t+1}) траектории модели M_1 в момент $t+1$ и тем самым фондовооруженность η_{t+1} этого состояния. С другой стороны, этот выбор позволяет произвести построение модели N_1 в год $[t+1, t+2]$, на основе этого указать состояние эталонной траектории в момент $t+1$ и его фондовооруженность $\bar{\eta}_{t+1}$.

На основании постулата о полном использовании потенциальных возможностей выбор приведенной средней заработной платы ω_{t+1} следует осуществить так, чтобы

$$\eta_{t+1} = \bar{\eta}_{t+1}. \tag{I4}$$

Описываемую ситуацию можно пояснить так: выбор параметра ω_{t+1}, с одной стороны, определяет движение "реальной" экономики, с другой – задает механизм движения экономики и эталонную, в смысле этого механизма, траекторию. Если выбрать его так, чтобы выполнялось (I4), то "реальное" движение совпадает с эталонным, но, и это очень существенно, эталон задается механизмом, определяемым тем же выбором, а не задан заранее.

Итак, постулат о полном использовании потенциальных возможностей экономики позволяет вполне определенным образом выбирать значение управляемого параметра и строить траекторию модели M_1.

Те или иные внемодельные соображения могут повлечь нарушения равенства (I4). Однако, как следует из результатов анализа модели N_1, систематическое и существенное нарушение этого равенства $(\eta_t - \bar{\eta}_t \not\to 0)$ приводит к неоптимальности по порядку. Из гипотез, принятых при построении модели M_1, легко следует, что оптимальность по порядку траектории (K_t, L_t) этой модели (если ее рассматривать в рамках строящейся модели N_1) равносильна тому, что последовательность A_t, характеризующая совокупные потенциальные возможности экономических механизмов, ограничена. Это вполне согласуется с ограниченностью самой траектории (K_t, L_t). (Заметим, что $A_{t+1} \geq A_t \geq 1$, так как в силу a_5) справедливы неравенства $\alpha_t \geq 1$, $t = 1, 2, \ldots$) Если же траектория (K_t, L_t) не оптимальна по порядку, то $A_t \to +\infty$, что плохо согласуется с ограниченностью (K_t, L_t). Выходя за рамки модели M_1, можно отметить, что помимо двух указанных случаев возможен еще один: выбор коэффициентов ω_t может привести к нарушению гипотез, заложенных в основу модели M_1; в частности, если эти коэффициенты неправомерно велики, то система может погибнуть.

Итак, если центр не может в силу внемодельных причин применять целиком постулат о полном использовании потенциальных возможностей (т.е. обеспечивать равенство $\eta_t = \bar{\eta}_t$), то он должен хотя бы руководствоваться этим постулатом как тенденцией (достаточно быстро сближать η_t и $\bar{\eta}_t$, обеспечивая оптимальность по порядку). В противном случае центр придет либо к выходу за рамки модели M_1 (и, возможно, к гибели системы), либо к построению экономических механизмов, рассчитанных на бесконечно большой рост рабочей силы и фондов и тем самым мало приспособленных к ограниченной траектории развития экономики.

Сделанные выше выводы основаны на свойствах модели N_1 и ее траекторий, которые справедливы лишь при некоторых предположениях. Можно показать, что гипотезы, заложенные в модель M_1, обеспечивают выполнение этих предположений. Остановимся подробнее на гипотезе a_6) в связи с тем, что она была сформулирована лишь на содержательном уровне, неформально. Формально эту гипотезу можно сформулировать так: при всех t выполняются неравенства (10) или, что то же самое, (11). Действительно, можно показать, что если параметры модели в момент $t+1$ в определенном смысле мало отличаются от соотвествующих параметров в момент t, то эти неравенства выполнены. Более того, с точки зрения модели M_1, эти неравенства можно рассматривать как некоторый показатель медленности изменения: если в момент t (11) нарушено, то про систему заведомо можно сказать, что у нее в целом в этот момент отсутствует медленное изменение.

Гипотезы, заложенные в M_1, позволяют также доказать, что выбор ω_{t+1}, обеспечивающий равенство (I4), всегда возможен.

5. Дадим описание двухпродуктовой модели M_2. Предполагается, что моделируемая экономическая система состоит из двух подразделений и оперирует с двумя продуктами, причем подразделение I выпускает только продукт "средства производства", а подразделение 2 - только продукт "предметы потребления". Рассмотрение средств производства и предметов потребления как однородных продуктов основано на предположении, что возможно (вне модели) соизмерение различных средств производства между собой и различных предметов потребления друг с другом; соизмерение же средств производства с предметами потребления происходит уже эндогенно. Поэтапная реализация процесса соизмерения требует наличия на первом этапе двух единиц измерения - отдельно для каждого подразделения; будем называть их натуральными единицами. Второй этап по сути дела заключается в соизмерении этих единиц; можно считать, что оно сводится к их ценностному выражению. Одна из основных задач, относящихся к модели M_2, заключается в нахождении указанного ценностного выражения, т.е. в соизмерении продуктов.

Модель M_2, подобно модели M_1, описывает экономику, функционирующую в дискретном времени. Состояние экономики в каждый момент $t=0,1,\dots$ задается вектором $x=(K^1,K^2,L^1,L^2)$. Здесь K^i - объем средств производства, задействованных в i-м подразделении, измеряемый в натуральных единицах первого подразделения, L^i - величина затрат труда в подразделении i, измеряемая количеством занятых в этом подразделении $(i=1,2)$.

Функционирование экономики в году $[t,t+1]$ при наличии состояния $(K_t^1,K_t^2,L_t^1,L_t^2)$ в момент t описывается следующей системой соотношений:

$$Q_{t+1}^1=F_t^1(K_t^1,L_t^1),\qquad Q_{t+1}^2=F_t^2(K_t^2,L_t^2); \tag{I5}$$

$$Q_{t+1}^1=\alpha_{t+1}^1+\alpha_{t+2}^2,\qquad Q_{t+1}^2=w_{t+1}^1+w_{t+1}^2; \tag{I6}$$

$$K_{t+1}^1=\nu_t^1K_t^1+\alpha_{t+1}^1,\qquad K_{t+1}^2=\nu_t^2K_t^2+\alpha_{t+1}^2; \tag{I7}$$

$$w_{t+1}^1=\omega_{t+1}^1L_{t+1}^1,\qquad w_{t+1}^2=\omega_{t+1}^2L_{t+1}^2; \tag{I8}$$

$$L_{t+1}^2/L_{t+1}^1=\delta_{t+1}; \tag{I9}$$

$$d^2_{t+1} = b_{t+1}\, w^1_{t+1}. \qquad (20)$$

Здесь $(K^1_{t+1}, K^2_{t+1}, L^1_{t+1}, L^2_{t+1})$ — состояние экономики в момент $t+1$, $Q^i_{t+1}, w^i_{t+1}, d^i_{t+1}$ — выпуск продукта в подразделении i, приведенное потребление в этом подразделении, инвестиции в это подразделение в момент $t+1$, $i=1,2$; $1-\nu^i_t$ — коэффициент выбытия фондов в году $[t, t+1]$ в подразделении i $(0 \leq \nu^i_t < 1)$; ω^i_{t+1} — приведенное удельное потребление в году $[t+1, t+2]$ в подразделении i. Величины $Q^1_{t+1}, K^i_{t+1}, d^i_{t+1}, i=1,2,$ измеряются в единицах первого подразделения, $Q^2_{t+1}, w^i_{t+1}, i=1,2$, — в единицах второго подразделения, ω^i_{t+1} — в единицах второго подразделения на человека. Эпитет "приведенный" по отношению ко всему и удельному потреблениям использован, поскольку равенства (18) предполагают, что предметы потребления предназначены только для работающих, а не для всего населения. Непроизводственное потребление может быть здесь учтено с помощью тех или иных коэффициентов; мы, однако, на этом не останавливаемся.

Производственные функции F^1_t и F^2_t, фигурирующие в (15), обладают теми же свойствами, что и производственные функции в модели M_1. По аналогии с M_1 в модели M_2 можно было бы ввести коэффициент создания новых фондов λ_{t+1}. Это, однако, привело бы лишь к замене функции F^1_t на функцию $\lambda_{t+1} F^1_t$. В дальнейшем удобно считать, что коэффициент λ_{t+1} уже учтен при построении функции F^1_t, и явно его не выписывать.

В модели M_2 рабочая сила L_{t+1} в момент $t+1$ определяется экзогенно. Равенство (19) позволяет при известном коэффициенте δ_{t+1} определить с помощью L_{t+1} рабочую силу L^1_{t+1} и L^2_{t+1} в подразделениях.

Перейдем к равенству (20), дающему условия обмена продуктами между подразделениями. Коэффициент b_{t+1} в этом равенстве представляет собой отношение b^2_{t+1}/b^1_{t+1}, где b^i_{t+1} — ценностное выражение натуральной единицы i-го подразделения в момент $t+1$. Равенство, аналогичное соотношению (20), использовалось К.Марксом в его схемах расширенного воспроизводства. Подобное равенство (основное условие расширенного воспроизводства) применяли В.С.Немчинов [8] и О.Ланге [9] при математической формализации схем К.Маркса.

Считаем в дальнейшем, что в модели M_2 в каждый момент времени t сначала задается экзогенно коэффициент b_t^1, а затем уже эндогенно определяется коэффициент b_t^2. Отсюда следует, в частности, что вопрос о соизмерении продуктов в разные моменты времени является по отношению к M_2 экзогенным, внемодельным, а вопрос о соизмерении продуктов в один и тот же момент времени решается в рамках модели. Предполагая, что коэффициенты γ_t^1 учитывают не только долю невыбывших фондов, но и одновременно пересчет ценностного выражения этих фондов, можно считать, что экзогенно назначаемый коэффициент b_t^1 при всех t совпадает с единицей, и тем самым $b_{t+1} = b_{t+1}^2$, где b_{t+1} - величина, фигурирующая в (20).

Обозначим ценностное выражение вновь произведенного продукта в подразделении i в момент $t+1$, через P_{t+1}^i ; заметим, что P_{t+1}^1 численно совпадает с Q_{t+1}^1 ; ценностное же выражение фондов и инвестиций будем обозначать теми же символами, что и их выражение в натуральных единицах. (Численно оба эти выражения совпадают.) Перепишем соотношения (I5)-(I8) в ценностном выражении. Имеем

$$
\begin{aligned}
&P_{t+1}^1 = F_t^1(K_t^1, L_t^1), && P_{t+1}^2 = b_{t+1} F_t(K_t^2, L_t^2);\\
&P_{t+1}^1 = d_{t+1}^1 + d_{t+1}^2, && P_{t+1}^2 = b_{t+1} w_{t+1}^1 + b_{t+1} w_{t+1}^2;\\
&K_{t+1}^1 = \nu_t^1 K_t^1 + d_{t+1}^1, && K_{t+1}^2 = \nu_t^2 K_t^2 + d_{t+1}^2;\\
&b_{t+1} w_{t+1}^1 = b_{t+1}\,\omega_{t+1}^1 L_{t+1}^1, && b_{t+1} w_{t+1}^2 = b_{t+1}\,\omega_{t+1}^2 L_{t+1}^2.
\end{aligned}
$$

Используя формулу (20), перепишем полученные равенства следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&P_{t+1}^1 = F_t^1(K_t^1, L_t^1), && P_{t+1}^2 = b_{t+1} F_t(K_t^2, L_t^2);\\
&P_{t+1}^1 = d_{t+1}^1 + b_{t+1}\,\omega_{t+1}^1 L_{t+1}^1, && P_{t+1}^2 = d_{t+1}^2 + b_{t+1}\,\omega_{t+1}^2 L_{t+1}^2;\\
&K_{t+1}^1 = \nu_t^1 K_t^1 + d_{t+1}^1, && K_{t+1}^2 = \nu_t^2 K_t^2 + d_{t+1}^2.
\end{aligned}
$$

Соотношения, стоящие в каждом из полученных столбцов, определяют однопродуктовые модели типа M_1. Левый столбец дает модель, описывающую первое подразделение (модель M_1^1), правый - второе (модель M_1^2). При этом следует иметь в виду, что при известном параметре δ_{t+1} величины затрат рабочей силы в подразделениях полностью определены. Заметим еще, что величины $b_{t+1}\,\omega_{t+1}^i$ можно трактовать как приведенную среднюю заработную плату в подразделении i .

В качестве управляемых параметров в модели M_2 выступают величины b_{t+1} , δ_{t+1} , ω^1_{t+1} и ω^2_{t+1} . При этом удобно считать, что параметр b_{t+1} назначается в момент $t-1$, остальные параметры с индексом $t+1$ – в момент t . (Предполагается, что при $t=0$ центр знает начальное состояние $(K^1_0, K^2_0, L^1_0, L^2_0)$ и коэффициент b_1 .) С помощью моделей M^1_1 и M^2_1 управление экономической системой в момент t (в году $[t, t+1]$) можно описать следующим образом. Прежде всего управляющий центр выбирает значение параметра δ_{t+1} и с его помощью определяет величины затрат рабочей силы в каждом подразделении. Затем он рассматривает соотношения, определяющие модели M^1_1 и M^2_1 с неизвестной пока приведенной заработной платой $b_{t+1}\,\omega^1_{t+1}$ и $b_{t+1}\,\omega^2_{t+1}$ соответственно. Дальнейшее управление моделью сводится к управлению подразделениями, т.е. к выбору коэффициентов ω^1_{t+1} и ω^2_{t+1} (величина b_{t+1} центру уже известна!). При этом, однако, данные коэффициенты не могут выбираться независимо. Поясним это. Состояние $(K^1_t, K^2_t, L^1_t, L^2_t)$ модели M_2 в момент t порождает состояние (K^i_t, L^i_t) моделей M^i_1 в этот момент. Выбирая ω^i_{t+1} , центр указывает точки (K^i_{t+1}, L^i_{t+1}), лежащие на траекториях этих моделей. Однако составленный из этих точек вектор $(K^1_{t+1}, K^2_{t+1}, L^1_{t+1}, L^2_{t+1})$ не обязан лежать на траектории модели M_2 . Это произойдет лишь в том случае, когда будет выполняться соотношение (20) или какое-либо эквивалентное ему в данном контексте, например $b_{t+1}\,\omega^1_{t+1}\,L^1_{t+1} + b_{t+1}\,\omega^2_{t+1}\,L^2_{t+1} = P^2_{t+1}$, которое можно рассматривать как ограничение на выбор ω^1_{t+1} и ω^2_{t+1} .

Назначив значения параметров δ_{t+1}, ω^1_{t+1}, ω^2_{t+1}, центр указывает значение коэффициента b_{t+2} . Процесс управления в момент t завершается.

Сказанное позволяет считать, что управление в модели M_2 состоит из двух этапов: I) декомпозиции модели на две однопродуктовые части; 2) выбор управляемых параметров в каждой из этих частей с учетом связи между этими параметрами.

Укажем информацию, которой обладает в модели M_2 управляющий центр. Как и в однопродуктовом случае, она состоит из двух частей: сведений, точно известных центру, и гипотез о предполагаемом поведении экономики в будущем. Основное предположение об этой информации заключается в следующем: на ее основе, выбирая значения управляемых параметров, центр может строить модели M_1^1 и M_1^2, причем относительно этих моделей он обладает всей информацией, требуемой в однопродуктовом случае. Кроме того, предполагается, что соизмеряющие коэффициенты b_t отделены от нуля и ограничены. На основе этих предположений нетрудно привести полные списки всех сведений, точно известных центру в момент t, и всех гипотез, которых центр придерживается.

6. Исследование модели M_2 можно провести с помощью модели неймановского типа N_2, роль которой аналогична роли модели N_1 в однопродуктовом случае. Эта модель здесь не приводится. Сформулируем для M_2 постулат о полном использовании потенциальных возможностей экономики. Рассмотрим эту модель в году $[t, t+1]$, предполагая, что все относящиеся к этому году значения управляемых параметров известны; в частности, считаем известными коэффициенты b_t и b_{t+1}. Пусть $x_t = (K_t^1, K_t^2, L_t^1, L_t^2)$ – состояние экономики в момент t, которое в данном году переходит в состояние $x_{t+1} = (K_{t+1}^1, K_{t+1}^2, L_{t+1}^1, L_{t+1}^2)$. Национальное богатство в моменты t и $t+1$ выражается числами $K_t^1 + K_t^2 + b_t\omega_t^1 L_t^1 + b_t\omega_t^2 L_t^2$ и $K_{t+1}^1 + K_{t+1}^2 + b_{t+1}\omega_{t+1}^1 L_{t+1}^1 + b_{t+1}\omega_{t+1}^2 L_{t+1}^2 = \nu_t^1 K_t^1 + \nu_t^2 K_t^2 + F_t^1(K_t^1, L_t^1) + b_{t+1} F_t^2(K_t^2, L_t^2)$. Отсюда следует, что наибольший возможный темп роста национального богатства в году $[t, t+1]$ совпадает с числом

$$\alpha_t = \max_{\substack{K_t^1, K_t^2\\ L_t^1, L_t^2}} \frac{\nu_t^1 K_t^1 + \nu_t^2 K_t^2 + F_t^1(K_t^1, L_t^1) + b_{t+1} F_t^2(K_t^2, L_t^2)}{K_t^1 + K_t^2 + b_t\omega_t^1 L_t^1 + b_t\omega_t^2 L_t^2}.$$

Уместно считать, что, как и в однопродуктовом случае, число α_t описывает потенциальные возможности экономики, точнее некоторого экономического механизма, связанного с моделью N_2. Будем предполагать, что управляющий центр руководствуется постулатом о полном использовании потенциальных возможностей: экономическая система должна, если это возможно в силу объективных причин, полностью использовать свои потенциальные возможности. В рамках модели M_2 это означает, что управляемые параметры в каждый момент должны выбираться так, чтобы на траектории развития экономики был реализован наибольший возможный при данных параметрах темп роста национального богатства α_t.

Можно показать при некоторых ограничениях технического характера, что этот постулат, если он последовательно, во все моменты, полностью реализуется, позволяет и притом единственным образом указать выбор управляемых параметров в модели M_2 при $t=1,2,\ldots$, если только известен соизмеряющий коэффициент b_1 при $t=1$. В частности, этот постулат диктует при данном b_1 вполне определенный выбор соизмеряющих коэффициентов b_t, $t>1$. Эти коэффициенты выбираются индуктивно. Если при некотором t число b_t известно, то число b_{t+1} находится из уравнения

$$\max_{K,L\geq 0}\frac{\nu_t^1 K+F_t^1(K,L)}{K+b_t\omega_t^1 L}=\max_{K,L\geq 0}\frac{\nu_t^2 K+b_{t+1}F_t^2(K,L)}{K+b_t\omega_t^2 L}.$$

Общее значение указанных максимумов совпадает с числом α_t. Это означает, что соизмеряющий коэффициент b_{t+1} выбирается таким образом, чтобы обеспечить равенство потенциальных возможностей каждого из подразделений между собой и равенство указанных потенциальных возможностей с потенциальными возможностями всей экономики.

Как и в однопродуктовом случае, в силу тех или иных причин внемодельного характера, управляющий центр может и не суметь применить постулат о полном использовании потенциальных возможностей.

В данной ситуации он должен руководствоваться этим постулатом как тенденцией, с тем чтобы обеспечить хотя бы "оптимальное по порядку" развитие экономики. Можно показать, что "оптимальность по порядку" всей системы в целом можно обеспечить, если соизмеряющие коэффициенты b_t выбирать так, чтобы потенциальные возможности обеих подразделений с течением времени мало (в определенном смысле) отличались друг от друга, а развитие подразделений происходило оптимальным по порядку образом в рамках однопродуктовых моделей M_1^1 и M_1^2, строящихся при данном выборе b_t.

7. Постулат о полном использовании потенциальных возможностей экономики может быть, по-видимому, использован для исследования ряда моделей, более общих чем M_1 и M_2. Представляет интерес применить его, в частности, к моделям, учитывающим различие фондов по сроку службы. (Эти модели активно изучаются

Л.В.Канторовичем и его сотрудниками [4,10,11]. Их дискретный вариант описан в работе В.Д.Матвеенко [12].)

Следует подчеркнуть, что применение этого постулата основано на использовании аппарата моделей экономической динамики неймановского типа, в частности на теоремах о характеристике оптимальных траекторий, теоремах о магистрали, а также на понятии траекторий, допускающих согласование (см.[6], в стационарном случае - это траектории, растущие средним темпом α , где α - неймановский темп роста модели Неймана - Гейла). Автору представляется, что указанный аппарат может оказаться весьма полезным при исследовании различных экономических явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. RAMSEY F. A mathematical theory of saving. - Econ. J., 1928, v.38, p.543-559.
2. MALINVOUD E. Capital accumulation and effecient allocation of resources. - Econometrica, 1953, v.21,p.233-268.
3. GOLDMAN S.M. Optimal growth and continual planning revision.- Rev.Econ.Stud., 1968, v.35,N2, p.145-154.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И., ХОВАНСКИЙ А.Г. Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей. - Сборник трудов ВНИИСИ, 1978, № 9, с.5-25.
5. ПЕТРАКОВ Н.Я., РОТАРЬ В.И. Об одном подходе к проблеме стабилизации экономического роста. - Экономика и мат. методы, 1978, т.14, вып. 6, 1064-1081.
6. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
7. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
8. НЕМЧИНОВ В.С. Избранные произведения. Т.3. - М.: Наука, 1967.
9. ЛАНГЕ О. Введение в экономическую кибернетику. - М.: Прогресс, 1968.
10. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГОРЬКОВ Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой эконо-

мической модели. – Докл. АН СССР, 1959, т.129, № 4, с.732-735.
11. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса. – Докл. АН СССР, 1973, т.211, № 6, с.1280-1283.
12. МАТВЕЕНКО В.Д. Дискретная модель с фондами, различающимися по срокам службы. – Оптимизация, 1981, вып. 26(43), с.90-102.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.10.1981 г.