УДК 51.330.115

ОЦЕНКИ ФАКТОРОВ И ПРОБЛЕМА ВЫБОРА

В.А.Булавский

Одним из основных положений развитой Л.В.Канторовичем [1,2] теории явилось введение в рассмотрение оценок лимитированных факторов, учитываемых в рамках линейно-программной модели. Эти оценки определяются всей программируемой ситуацией и, в частности, сделанным нами выбором в множестве возможных конечных результатов, т.е. заданием, служащим правой частью линейной программы. В этой статье мы покажем, что идея оценок может быть использована и в некотором смысле обратным способом – для выбора самого задания.

Пусть множество $X \subset R^n$ доступных нам результатов является выпуклым и компактным, Предположим, что с каждой точкой $\bar{x} \in X$ связаны оценки $\bar{y} = G(\bar{x}) \in R^n$, при помощи которых мы сравниваем с $\bar{x}$ другие точки из X : нам кажется точка x предпочтительнее выбранной точки $\bar{x}$, если

$$(\bar{y}, x - \bar{x}) < 0, \qquad (1)$$

где скобки обозначают стандартное скалярное произведение в R^n. Таким образом, способ сравнения x с $\bar{x}$ зависит от текущего нашего состояния $\bar{x}$. Отображение G в дальнейшем будет предполагаться, вообще говоря, точечно-множественным, так что при проверке неравенств (1) следует выбрать некоторый $\bar{y} \in G(\bar{x})$.

ТЕОРЕМА. *Пусть $X \subset R^n$ – непустое выпуклое компактное множество, и при каждом $\bar{x} \in X$ множество $G(\bar{x}) \subset R^n$ также непустое, компактное и выпуклое, а отображение $x \to G(x)$*

полунепрерывно сверху. Тогда существуют $\bar{x} \in X$ и $\bar{y} \in G(\bar{x})$ такие, что $(\bar{y}, x-\bar{x}) \geqslant 0$ при всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y - выпуклая оболочка множества

$$S = \bigcup_{x \in X} G(x).$$

Поскольку множество S компактно [3, с.97], а пространство конечномерно, то Y - выпуклый компакт. Обозначим через M график отображения G, т.е. множество таких пар $[x, y]$, что $x \in X$, $y \in G(x)$. Множество M замкнуто в силу полунепрерывности отображения G и замкнутости всех множеств $G(x)$. Построим отображение $F: Y \to 2^X$, положив $F(y) = \operatorname{Arg\,min}\{(y, x) : x \in X\}$. Ввиду компактности и выпуклости множества X образ $F(y)$ каждого $y \in Y$ является непустым выпуклым компактом. При этом график $N = \{[x, y] : y \in Y, x \in F(y)\}$ замкнут. Согласно теореме фон Неймана [3, с.100], $M \cap N \neq \emptyset$. Если пара $[\bar{x}, \bar{y}]$ принадлежит $M \cap N$, то $\bar{y} \in G(\bar{x})$ и $(\bar{y}, \bar{x}) \leqslant (\bar{y}, x)$ при всех $x \in X$. Теорема доказана.

В общем случае точка $\bar{x}$, гарантируемая доказанной теоремой, не единственная. Однако это будет так, если сделать следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Отображение G строго монотонно, т.е. $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) > 0$, если $x_1 \neq x_2$, $y_1 \in G(x_1)$, $y_2 \in G(x_2)$.

Действительно, пусть существуют две точки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ и векторы оценок $\bar{y}_1 \in G(\bar{x}_1)$, $\bar{y}_2 \in G(\bar{x}_2)$ такие, что

$$(\bar{y}_1, x - \bar{x}_1) \geqslant 0, \quad (\bar{y}_2, x - \bar{x}_2) \geqslant 0, \quad x \in X.$$

Подставив в первое неравенство $x = \bar{x}_2$, а во второе $x = \bar{x}_1$ и сложив, получим неравенство

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2, \bar{x}_1 - \bar{x}_2) \leqslant 0.$$

Ввиду строгой монотонности отображения G это означает, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Мы получаем следующий аппарат для формализации процедуры выбора цели. Пусть в пространстве R^n задано полунепрерывное сверху строго монотонное точечно-множественное отображение G, у которого образ $G(x)$ любой точки $x \in R^n$ является непустым выпуклым компактом. Для каждого выпуклого компакта $X \subset R^n$ назовем точку $\bar{x} \in X$ **предпочтительной**, если существует $\bar{y} \in G(\bar{x})$, для которого $(\bar{y}, \bar{x}) = \min\{(\bar{y}, x) : x \in X\}$. Как показывает доказанная теорема, предпочтительная точка существует и единственна.

Можно было бы попытаться найти некоторое отношение предпочтения, расширив бинарное отношение $\succ$, задаваемое условием

$$x_1 \succ x_2 \iff \exists y \in G(x_1): (y, x_1) < (y, x_2).$$

Это отношение согласовано с введенным понятием предпочтительной точки: если $x_1 \succ x_2$, то x_1 является предпочтительной точкой отрезка, соединяющего x_1 и x_2, и, наоборот, x_2 не может быть предпочтительной точкой ни в одном множестве, содержащем x_1. Однако отношение $\succ$, вообще говоря, не являет ся транзитивным. Простой, подтверждающий это пример дает точечно-точечное отображение, определяемое формулой

$$y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = Gx.$$

Это отображение строго монотонное, так как $(Gx_1 - Gx_2, x_1 - x_2) = (G(x_1 - x_2), (x_1 - x_2)) = |x_1 - x_2|^2$. В то же время при $n > 8$ точки $x_k = (\sin \frac{2k\pi}{n}, \cos \frac{2k\pi}{n})$ дают цепочку отношений

$$x_0 \succ x_1 \succ \cdots \succ x_n = x_0.$$

Покажем, что рассмотренный аппарат выбора предпочтительной точки в выпуклом замкнутом множестве обобщает традиционный способ, использующий выпуклую функцию полезности. Действительно, если $u(x)$ - строго выпуклая функция на R^n, то в качестве G можно взять субдифференциальное отображение этой функции:

$$G(x) = \{y \in R^n: u(x) \geq u(\bar{x}) + (y, x - \bar{x}) \ \forall x \in R^n\}.$$

Если X - выпуклый компакт в R^n и

$$\bar{x} = \arg\min \{u(x): x \in X\},$$

то существует субградиент $\bar{y} \in G(\bar{x})$, для которого

$$(\bar{y}, \bar{x}) = \min \{(\bar{y}, x): x \in X\}.$$

Это теорема линеаризации для выпуклых задач. Таким образом, $\bar{x}$ - предпочтительная точка множества X при выбранном отображении G.

Наконец, приведем пример использования введенного способа выбора. Пусть множество планов деятельности образует выпуклое компактное множество Z в R^m. Например, это может быть множество решений некоторой системы технологических ограничений и ограничений на сырьевые ресурсы. Интересующие нас характеристики плана $z \in \mathcal{Z}$ являются линейными функционалами c_1, $c_2, \ldots, c_n$ над R^m. Мы их объединим в матрицу C размера $n \times m$. Тогда вектор $x = Cz$ дает нам существенное описание плана z. Если мы выбрали некоторое отображение $G: R^n \to 2^{R^n}$ с перечисленными выше свойствами, то можно поставить задачу: найти план $\bar{z} \in \mathcal{Z}$, при котором точка $\bar{x} = C\bar{z}$ является предпочтительной среди всех точек множества $X = \{Cz : z \in \mathcal{Z}\}$. Как было показано, такой план всегда существует и притом единственный.

Заметим, что если критерий качества один, т.е. $x = cz$ - скаляры, то монотонность отображения G означает, что мы просто минимизируем линейную функцию cz на множестве $\mathcal{Z}$. Очевидно, наложив подходящие условия, подобное же применение можно сделать и для нелинейных критериев качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд. отдел
14.12.1981 г.