



АКАДЕМИК ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ

(к семидесятилетию со дня рождения)

Леонид Витальевич Канторович – выдающийся советский ученый, обогативший математическую и экономическую науки фундаментальными трудами первостепенной значимости. Исследования Л.В.Канторовича в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций и теории множеств оказали существенное влияние на становление и развитие указанных математических дисциплин, послужили основой для формирования новых научных направлений. Леонид Витальевич по праву считается одним из основоположников современного экономико-математического направления – направления, изменившего лицо экономической науки. Ядром его исследований, лежащих на стыке математики и экономики, является созданная им новая научная дисциплина – линейное программирование. Идеи и методы этой дисциплины широко используются для постановки и решения разнообразных экстремальных и вариационных задач не только в экономике, но и в физике, химии, энергетике, геологии, биологии, механике и теории управления. Линейное программирование оказывает существенное влияние также на развитие вычислительной математики и вычислительной техники.

Леонид Витальевич Канторович родился 19 января 1912 года в Ленинграде в семье врача. Творческие способности Л.В.Канторовича проявились необычайно рано. В возрасте 15 лет он начал уже активную научную деятельность в семинарах В.И.Смирнова, Г.М.Фиктенгольца и Б.Н.Делоне. Первые работы Леонида Витальевича относились к дескриптивной теории функций и множеств.

В основном они были выполнены в 1927–1929 гг., когда Л.В.Канторович был студентом второго и третьего курсов Ленинградского государственного университета. Теория функций вещественного переменного и теория множеств занимали тогда одно из центральных мест в математической науке и оказывали существенное влияние на развитие других разделов математики. Леониду Витальевичу удалось решить ряд трудных и принципиальных проблем в этой области.

С момента окончания ЛГУ в 1930 году Л.В.Канторович преподает в высших учебных заведениях Ленинграда, продолжая при этом активную научную деятельность. К этому времени относятся, в частности, его исследования по конструктивной теории функций и приближенным методам анализа, выдвинувшие Леонида Витальевича в число ведущих математиков нашей страны. С 1932 года он работает в должности профессора и утвержден в этом звании в 1934 году. В 1935 году ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации.

Вскоре после выхода в свет основополагающей монографии С.Банаха "Theorie des opérations linéaires" в Ленинградском университете начинает формироваться одна из первых советских школ по функциональному анализу. Уже в 1934 году в цикле работ Л.В.Канторовича получены важные результаты по теории функционалов и операторов в банаховых пространствах, существенно дополняющие классические исследования И.Радона.

В эти же годы Л.В.Канторович выдвигает фундаментальную идею изучения общих функциональных пространств, наделенных структурой условно полной векторной решетки. Необходимость привлечения структуры порядка в функциональном анализе была осознана почти одновременно рядом математиков (Ф.Рисс, Г.Биркгофф, М.Г.Крейн, Г.Фрейденталь). Выделенный Л.В.Канторовичем класс упорядоченных векторных пространств, обладающих порядковой полнотой, имеет ряд принципиально важных специфических свойств, позволивших предложить новые методы исследования функциональных объектов, в том числе классических. Теория таких пространств – их называют пространствами Канторовича или K -пространствами – является теперь одним из основных разделов функционального анализа.

В 1939 году в издательстве Ленинградского университета вышла небольшая брошюра Л.В.Канторовича "Математические методы

организации и планирования производства". Она является историческим документом, зафиксировавшим открытие линейного программирования - нового научного направления, оказавшего большое влияние на развитие экономической науки. В этой работе Леонидом Виталевичем впервые дана математическая постановка производственных задач оптимального планирования и предложены эффективные методы их решения и приемы их экономического анализа. Тем самым идея оптимальности в экономике была поставлена на прочный научный фундамент.

Л.В.Канторович уже тогда понимал значимость сделанного им открытия и необходимость продолжения исследований в следующих направлениях:

- дальнейшее развитие алгоритмов линейного программирования и их конкретизация для отдельных классов задач;
- обобщение предложенных методов с целью изучения более широких классов экстремальных задач с ограничениями, включая нелинейные задачи и задачи в функциональных пространствах; приложение таких методов к экстремальным задачам математики, механики и техники;
- распространение новых методов экономического анализа отдельных производственных задач на общие экономические системы; приложение этих методов к задачам планирования и анализа структуры экономических показателей на уровне отрасли, региона и народного хозяйства в целом.

Некоторые исследования по первым двум направлениям Л.В. Канторовичем были выполнены еще в предвоенные годы. Однако основные усилия он сосредоточил на развитии третьего направления. Уже в 1942 году им был написан первый вариант его капитальной монографии "Экономический расчет наилучшего использования ресурсов". Однако эта работа настолько опережала время, что ее публикация стала возможной лишь в 1959 году, когда пионерские идеи Л.В.Канторовича получают признание и начинают использоваться в экономической практике. В 1965 году исследования Л.В.Канторовича в области экономико-математических методов были удостоены Ленинской премии (совместно с В.С.Немчиновым и В.В.Новожиловым). А в 1975 году указанный цикл работ Л.В.Канторовича отмечен Нобелевской премией по экономике (совместно с Т.Купмансом) за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике.

Л.В.Канторович стоял у истоков формирования современной вычислительной математики. Первые работы по приближенным методам конформных отображений, квадратурным формулам, численным методам решения интегральных уравнений в частных производных были выполнены Леонидом Витальевичем в начале тридцатых годов, т.е. когда вычислительная математика еще не оформилась в самостоятельную научную дисциплину. Важную роль в становлении вычислительной математики сыграла монография Л.В.Канторовича и В.И.Крылова "Приближенные методы высшего анализа" (впервые изданная в 1936 году под названием "Методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных"). Эта книга неоднократно переиздавалась, переведена на английский, немецкий, венгерский, румынский языки и до сих пор широко используется специалистами во всем мире.

Необходимость разработки новых эффективных численных методов анализа прикладных задач особенно остро стала ощущаться в последние предвоенные и военные годы. В 1944 году в Математическом институте им. В.А.Стеклова АН СССР (Ленинградское отделение) Л.В.Канторович формирует отдел приближенных вычислений. Леонид Витальевич понимает, что дальнейшее развитие численных методов необходимо базировать на фундаментальных результатах теоретических разделов математики, и приступает к исследованиям в этом направлении. Л.В.Канторович получает ряд принципиальных результатов как в общей теории приближенных методов, так и в теории метода наискорейшего спуска и метода Ньютона для функциональных уравнений. Основные итоги указанных исследований были подведены им в статье "Функциональный анализ и прикладная математика", удостоенной в 1949 году Государственной премии. В эти годы по инициативе Л.В.Канторовича на математикомеханическом факультете Ленинградского государственного университета организуется, по-видимому, первая в нашей стране специализация по вычислительной математике.

В пятидесятые годы в свет выходит монография Л.В.Канторовича "Экономический расчет наилучшего использования ресурсов", несколько раз переиздается переработанная монография Л.В.Канторовича и В.И.Крылова "Приближенные методы высшего анализа". В эти же годы выходят монографии Леонида Витальевича, написанные им совместно со своими учениками: "Расчет рационального раскроя промышленных материалов" (с В.А.Залгаллером); "Функ-

циональный анализ в полупорядоченных пространствах" (с Б.З.Вулихом и А.Г.Пинскером), "Функциональный анализ в нормированных пространствах" (с Г.П.Акиловым).

В 1957 году ЦК КПСС и Совет Министров СССР принимают решение о создании нового крупного научного центра на Востоке страны - Сибирского отделения Академии наук СССР.

Для успешного решения поставленной задачи в Сибирское отделение привлекаются ведущие советские ученые, развивающие наиболее актуальные и перспективные научные направления. В связи с первостепенной значимостью дальнейшего совершенствования народнохозяйственного планирования на базе использования новых экономико-математических методов и ЭВМ естественно, что Л.В.Канторович был в первой группе ученых, приглашенных для работы в Сибирском отделении. В 1958 г. он избран членом-корреспондентом, а в 1964 г. - действительным членом АН СССР.

С 1958 г. по 1960 г. Л.В.Канторович и В.С.Немчинов возглавляют Лабораторию по применению статистических и математических методов в экономике - самостоятельное научное подразделение СО АН СССР, функционировавшее в то время в Москве (в составе СОПС) и в Ленинграде при Ленинградском отделении Математического института им. В.А.Стеклова. Трудно переоценить ту роль, которую сыграла указанная лаборатория и ее руководители в становлении нового научного направления.

В 1960 г. ленинградская группа лаборатории во главе с ее руководителем переезжает в Новосибирск и вливается в Институт математики СО АН СССР в качестве математико-экономического отделения. Московская группа этой лаборатории послужила одной из основных компонент Центрального экономико-математического института АН СССР.

Еще до переезда в Новосибирск под руководством Л.В.Канторовича в Ленинграде были развернуты исследования по теории и численным методам математического программирования, а также в области теории и приложений моделей оптимального планирования. В частности, разработанные здесь оптимальные тарифы на такси были реализованы в масштабе страны и принесли большой экономический эффект. В эти же годы по инициативе Л.В.Канторовича на математическом и экономическом факультетах ЛГУ началась подготовка специалистов по экономической кибернетике.

С 1960 г. по 1971 г. Л.В.Канторович возглавляет математико-экономическое отделение ИМ СО АН, являясь одновременно за-

местителем директора института и заведующим кафедрой вычислительной математики Новосибирского госуниверситета.

Математико-экономическое отделение ИМ СО АН СССР – одно из первых научных подразделений, где проблемы применения математических методов в экономике стали решаться комплексно. Наряду с развитием теории оптимального планирования и экономических показателей большое внимание здесь уделяется изучению моделей экономической динамики и равновесия, исследованиям в области выпуклого анализа и теории экстремальных задач, разработке численных методов математического программирования, включая их реализацию на ЭВМ, а также апробации и внедрению разработанных моделей и методов в экономическую практику.

Л.В.Канторович в указанные годы ведет большую научно-организационную работу. По его инициативе, в частности, проводится ряд всесоюзных и международных конференций и совещаний по применению математических методов в экономике, на математическом и экономическом факультетах Новосибирского университета организуется подготовка специалистов в области экономической кибернетики.

В 1971 г. Л.В.Канторович переведен на работу в Москву. Здесь он заведует Проблемной лабораторией Института управления народным хозяйством ГКНТ, а также отделом системного моделирования научно-технического прогресса Всесоюзного научно-исследовательского института системных исследований ГКНТ и АН СССР. Академик Л.В.Канторович – член Государственного комитета по науке и технике при Совете Министров СССР.

За все эти годы ряд учеников и последователей Л.В.Канторовича в математике и экономике стали самостоятельными крупными учеными.

Выдающиеся заслуги Л.В.Канторовича высоко оценены партией и правительством. Он награжден двумя орденами Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени, орденом "Знак Почета" и медалями.

Л.В.Канторович является членом ряда зарубежных академий и почетным доктором многих университетов.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ Л.В.КАНТОРОВИЧА

I. Дескриптивная теория функций и теория множеств

Работы Л.В.Канторовича [1,3], доложенные на семинаре 1927/28 гг., посвящены исследованию трансфинитной последовательности классов функций, составляющих так называемую классификацию Янга. В этой классификации в качестве исходного принимается класс непрерывных функций, последующие классы получаются чередованием предельных переходов возрастающих и убывающих последовательностей функций. Классификация Янга является детализацией классификации Бэра. Л.В.Канторовичу принадлежат, в частности, тонкие построения универсальных функций для классов Янга [11,14]. Функция двух переменных называется универсальной для данного класса, если при специализациях одной из переменных получаются все функции этого класса. Универсальные функции Л.В.Канторовича принадлежат тем же классам, что и представляемые ими функции. Для классификации Бэра, как показано Л.В.Канторовичем, это невозможно.

К тому же циклу относится работа [18], посвященная условиям существования непрерывной функции, у которой производные числа Дини совпадают со значениями заданных четырех функций. Полученные Л.В.Канторовичем достаточные и частично необходимые условия существенно дополнили классические результаты Лебега, Данжуа, Янга и А.Безиковича.

Семинар 1928/29 гг. был посвящен теории Λ -множеств и проективных множеств. К его тематике примыкает значительный цикл работ [5-9,17,19,20,60], выполненных преимущественно в соавторстве с Е.М.Ливенсоном. Заключительными работами этого цикла явились два мемуара [17,20] об аналитических операциях и проективных множествах. В этом цикле работ развивается общая теория аналитических операций над множествами, в частности теория δ_3 -операций Хаусдорфа - Колмогорова. Под этим названием понимается операция Φ_N , сопоставляющая счетной системе множеств E_1, E_2, \dots, E_N множество $\Phi_N = \sum_{\nu \in N} E_{n_\nu}, E_{n_2}, \dots, E_{n_k}, \dots$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ — последовательность натуральных чисел, а N — множество последовательностей ν , определяющее операцию. К δ_3 — операциям относится, в частности, A — операция П.С.Александрова, применение которой к замкнутым множествам порождает суслинские A — множества. Авторы устанавливают ряд теорем о зависимости дескриптивных свойств результата операции от класса множеств, из которого черпаются множества E_1, E_2, \dots , а также от дескриптивных свойств множества N , рассматриваемого как множество иррациональных чисел. Рассматривается построение сложных функций и т.д. В качестве приложения построенной теории доказывается, например, что все трансфинитные последовательности так называемых C — множеств, получающихся применением A — операции к множествам, дополнительным к множествам предыдущего класса (за исходный класс берут A — множества), укладываются во второй проективный класс.

II. Конструктивная теория функций

К началу тридцатых годов относятся также первые работы Л.В.Канторовича по конструктивной теории функций. Его внимание в этой области привлекли прежде всего известные многочлены

$$B_n f = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

с помощью которых С.Н.Бернштейн в 1912 г. доказал знаменитую теорему Вейерштрасса. В [1] (см. также [40]) Леонид Витальевич установил, что если функция f регулярна хотя бы на части отрезка $[0, 1]$, то сходимость $B_n f$ к f имеет место в некоторой части комплексной области. Эти исследования Л.В.Канторовича были продолжены С.Н.Бернштейном в нескольких работах 1936–1943 гг.

В [15, 16] Л.В.Канторович заметил, что запись произвольного многочлена P_n степени n в форме

$$P_n x = \sum_{k=0}^n \varphi_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

может оказаться весьма полезной. Полагая

$$\varphi_k^{(n)} = (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt,$$

Леонид Витальевич получает сингулярный интеграл, сходящийся к соответствующей функции $f \in L[0,1]$ почти везде. Используя другой выбор $\varphi_k^{(n)}$, он доказывает известную теорему Бэра о представлении полунепрерывных функций в виде предела монотонной последовательности непрерывных. В более поздней работе [28] при помощи еще одного выбора $\varphi_k^{(n)}$ Л.В.Канторович получает аналитический аппарат для представления произвольной измеримой функции во всех ее точках аппроксимативной непрерывности. Этот аппарат до сих пор широко используется в теории функций.

К рассматриваемому циклу относится также работа [13], где решается задача о том, насколько ухудшается наилучшее приближение непрерывной функции многочленами, если потребовать, чтобы коэффициенты этих многочленов были целыми. Эти исследования были продолжены А.О.Гельфондом в 1955 г.

III. Приближенные методы анализа

Первые работы Л.В.Канторовича по приближенным методам анализа [21,22] были опубликованы в 1933 году.

В [21] предложено несколько методов приближенного решения задачи о конформном отображении круга на односвязную область, ограниченную некоторой кривой. Эти методы основаны на погружении заданной области в однопараметрическое семейство, включающее область, для которой конформное отображение известно. Используя затем разложение по малому параметру, Леонид Витальевич получает явные формулы для приближенного вычисления искомого конформного отображения. Дальнейшему развитию этого подхода и его обобщению на случай многосвязных областей посвящены работы [23,29,30,35,55,59].

В [22] предложен новый вариационный метод приближенного решения двумерных уравнений эллиптического типа, основанный на сведении соответствующей задачи минимизации интеграла

$$I(\alpha) = \iint_D \left[\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx dy$$

на множестве функций двух переменных к минимизации функционала, зависящего от нескольких функций одного переменного. Дальнейшему развитию вариационного метода, а также других приближенных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений посвящены работы [31,36,52,75,78]. В частности, в [31]

предложен известный метод коллокации. Указанные методы до сих пор широко используются в вычислительной практике. К рассматриваемому циклу примыкают также исследования Л.В.Канторовича по сходимости метода Рунге [24, 26, 74, 77].

В теории механических квадратур Л.В.Канторович, мастерски используя очень простую идею об аддитивном выделении особенностей, получает ряд остроумных приемов для вычисления интегралов от недостаточно гладких функций [27]. В более поздней работе [98] выводятся формулы численного интегрирования четных и нечетных функций, которые при n узлах дают точные результаты для полиномов до степени $4n - 2$. Применением обоих приемов - выделением особенностей и использованием полученных формул высокой точности - удается вывести сравнительно простую приближенную формулу для вычисления эллиптических интегралов третьего рода.

Разработанные Леонидом Витальевичем методы явились основой для написания монографии [43] - первой в мировой литературе книги по численным методам высшего анализа, выдержавшей многочисленные переиздания в нашей стране и за рубежом (первое издание вышло в СССР в 1933 г., пятое - в 1962 г.).

IV. Функциональный анализ

Выполненные в 1934 году работы Л.В.Канторовича и Г.М.Фихтенгольца по проблеме представления линейных функционалов и операторов [32, 37] являются первыми исследованиями советских математиков по теории нормированных пространств. В то время функциональный анализ еще только оформлялся в самостоятельное научное направление, и одной из первостепенных задач было накопление фактического материала - осмысливание общих понятий в конкретных ситуациях. Поскольку основой всех построений функционального анализа того времени служили нормированные пространства и линейные операторы в них, большое значение приобретало аналитическое представление линейных функционалов и операторов в конкретных нормированных пространствах. К 1934 г. общая форма линейного функционала была известна для всех классических банаховых пространств, за исключением пространства L_∞ всех ограниченных измеримых функций. Иначе обстояло дело с аналитическим представлением операторов. Результаты И. Радона (общие формы ограниченных и компактных операторов из

пространства C непрерывных функций в себя) были единственными значительными результатами в этом направлении. Полученные Л.В.Канторовичем и Г.М. Фихтенгольцем теоремы об общем виде линейных функционалов и об аналитическом представлении ограниченных операторов, действующих из C в L_∞ , заполнили имевшиеся пробелы в списке известных сопряженных пространств и послужили отправным пунктом для дальнейших исследований по теории линейных операторов. Отметим, что в [32] на основе полученных результатов установлена недополняемость пространства C в L_∞ , что представляет интерес с точки зрения современной геометрической теории банаховых пространств.

К тому же периоду относятся работы Л.В.Канторовича [38, 41, 42] по теории функциональных пространств Гильберта. В [38] устанавливается континуальный аналог равенства Парсеваля. Работы [41, 42] посвящены одной из наиболее актуальных проблем тридцатых годов - развитию математического аппарата, используемого в физике и квантовой механике. Леонид Витальевич ставит задачу "распространения - "обогащения" функционального пространства Гильберта за счет введения "идеальных" функций, которые уже не будут функциями в обычном смысле". Существенно новым по сравнению с исследованиями К.Фридрихса здесь является предложенная Л.В.Канторовичем схема пополнения, основанная на рассмотрении не одного, а целого семейства самосопряженных плотно определенных операторов, а также использование аппарата преобразования Фурье для характеристики пополнений, связанных с операторами дифференцирования.

В середине тридцатых годов в работах Леонида Витальевича [39, 40, 44, 51, 53, 54, 56, 61-63, 65, 66, 68, 70, 72] создается новое важное направление функционального анализа - теория упорядоченных векторных пространств. Л.В.Канторович вводит и подробно изучает класс векторных решеток, в которых всякое ограниченное множество элементов имеет точные границы (такие пространства, как уже отмечалось, вошли в литературу под названием K -пространств). Особенно большое внимание Леонид Витальевич уделяет регулярным K -пространствам. Это такие пространства, где сходимость по упорядочению обладает рядом свойств, сближающих ее с обычной сходимостью в множестве вещественных чисел. Леонид Витальевич строит теорию

операторов в K -пространствах, выделяя в качестве основного класс регулярных операторов, т.е. таких линейных операторов, которые представимы в виде разности двух положительных линейных операторов. Леонид Витальевич доказал, что совокупность регулярных операторов, отображающих одно K -пространство в другое, образует K -пространство. Этот результат представляет далеко идущее обобщение теоремы Ф.Рисса, относящейся к конкретному пространству функционалов.

Параллельно с построением и развитием общей теории K -пространств Л.В.Канторович дает разнообразные приложения этой теории ко многим вопросам функционального анализа, теории функций и теории функциональных уравнений. Поскольку многие классические функциональные пространства, изучавшиеся методами теории нормированных пространств, оказываются одновременно K -пространствами, то привлечение к изучению таких функциональных пространств теории K -пространств позволило Л.В.Канторовичу провести более детальное исследование линейных операторов. В частности, Леонид Витальевич (частично совместно с Б.З.Вулихом) устанавливал общее аналитическое представление линейных операторов различных классов во многих конкретных пространствах. Теоремы Л.В.Канторовича о распространении операторов нашли в его работах применения к теории интеграла, меры, а также к решению положительной проблемы моментов [58]. Из общих соображений Леонидом Витальевичем были получены аналоги теорем Гамбургера, Стильтеса и Хаусдорфа. Теоремы о сходимости последовательностей линейных операторов в K -пространствах Л.В.Канторович применил к теории неопределенного интеграла Лебега и к теории ортогональных рядов.

Для приложений функционального анализа к теории вычислительных методов оказалась чрезвычайно полезной построенная Л.В.Канторовичем теория пространств, нормированных в обобщенном смысле - с помощью некоторого K -пространства. Такие обобщенно-нормированные пространства называют теперь B_K -пространствами. В теорию B_K -пространств включается и теория самих K -пространств (в этом случае в роли нормирующего пространства выступает то же самое K -пространство) и теория нормированных пространств (нормирующее пространство - поле вещественных чисел). Для B_K -пространств Леонид Витальевич получил ряд теорем о методе последовательных приближений. Эти теоре-

мы используются при анализе численных методов решения конечных и бесконечных систем уравнений, в том числе линейных и нелинейных интегральных уравнений.

За указанный цикл работ в области теории упорядоченных векторных пространств Леониду Витальевичу на I Всесоюзном конкурсе работ молодых ученых была присуждена первая премия.

Уже в 1940 году Л.В.Канторович приступает к подготовке итоговой монографии. Однако работа над этой монографией была завершена совместно с Б.З.Вулихом и А.Г.Пинскером лишь к концу сороковых годов [104]. Эта монография представляет собой первое систематическое изложение теории K -пространств и до сих пор служит настольной книгой специалистов в этой области. Некоторым дополнением к [104] является обзорная статья [108].

Дальнейшее развитие математики и расширение сферы ее приложений подтвердили значимость теории K -пространств, которая рассматривается сейчас как один из основных разделов функционального анализа.

Статья [114] посвящена развитию идей С.Л.Соболева, использованных им в фундаментальных трудах по теоремам вложения различных функциональных классов. Отталкиваясь от своих исследований по аналитическому представлению операторов, Л.В.Канторович предлагает новую схему получения теорем вложения. Основой этой схемы является выделение нового важного класса ядер, обеспечивающих компактность соответствующих интегральных операторов. Выделенные ядра, именуемые ядрами Канторовича, широко используются в современной теории операторов.

Развитие идей из [81,89] позволило Л.В.Канторовичу и Г.Ш.Рубинштейну [125,126] предложить новую нормировку конечных мер на метрическом компакте. В получаемом нормированном пространстве сильная сходимость при условии равномерной ограниченности полных вариаций оказывается эквивалентной обычной $*$ -слабой сходимости соответствующих мер, а сопряженным к построенному является пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица. Благодаря этим свойствам указанное функциональное пространство (его называют пространством Канторовича - Рубинштейна) широко используется в приложениях, в частности в математической экономике и теории вероятностей.

В 1959 году выходит монография [138], написанная Л.В.Канторовичем совместно с Г.П.Акиловым. Эта монография оказа-

ла существенное влияние на преподавание функционального анализа в ведущих вузах страны. Наряду с оригинальной трактовкой традиционных разделов функционального анализа в нормированных пространствах, большое внимание в книге уделено приложениям к вычислительной математике. Указанная монография переведена на многие языки. В 1977 году выходит ее второе существенно переработанное и дополненное издание [222].

У. Функциональный анализ и прикладная математика

Л.В.Канторович является пионером применения функционально-аналитических методов в вычислительной математике. Этому направлению посвящены его работы [63, 73, 83, 86-88, 92, 94, 96, 98, 100, 106, 107, 115, 123, 141, 147]. Центральной здесь является статья [94], удостоенная Государственной премии. Для сохранения должной перспективы надо иметь в виду, что само название статьи "Функциональный анализ и прикладная математика" звучало в ту пору (1948) непривычно. Лишь теперь, причем в значительной степени благодаря работам Леонида Витальевича, функциональный анализ стал основным аппаратом в исследованиях по вычислительной математике.

Основной тезис статьи [94] состоит в том, что "идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгоритмов математических задач с таким же успехом, как для теоретического анализа этих задач". С этих позиций в статье рассматривается три вопроса: общая теория приближенных методов решения функциональных уравнений, метод наискорейшего спуска и функционально-аналитический вариант метода Ньютона.

Первая попытка систематизации различных приближенных методов на основе изучения функциональных уравнений была предпринята Л.В.Канторовичем еще в 1937 году в работе [63]. Ядром предложенной в [88] общей теории является принципиально новая идея - изучение связи исследуемого функционального уравнения

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

в банаховых пространствах X и Y с "приближенным" уравнением

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{y} \quad (\bar{x} \in \bar{X}, \bar{y} \in \bar{Y})$$

в более простых, как правило, конечномерных пространствах \bar{X} и \bar{Y} . Доказываются общие теоремы, позволяющие на основании данных о точном решении устанавливать разрешимость приближенного уравнения и сходимость приближенных решений к точному, а также теоремы, позволяющие на основе приближенных решений устанавливать существование точного решения и оценивать его близость к полученным приближениям.

Построенная Леонидом Витальевичем общая теория функциональных уравнений, основанная на вариации исходных функциональных пространств и операторов, используется им для анализа основных методов решения важнейших классов уравнений второго рода (метод редукции для бесконечных линейных уравнений, различные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений). Полученные при этом оценки оказываются, как правило, лучшими, чем ранее известные для соответствующих методов. Возможности этой глубокой теории, по-видимому, еще далеко не исчерпаны.

Общий метод наискорейшего спуска сформулирован в статье [83], результаты которой были доложены автором на семинаре в Математическом институте АН СССР в сентябре 1943 года. Этот метод в его простейшем варианте предназначен для решения линейных уравнений с положительно-определенными операторами в гильбертовых пространствах. В настоящее время выяснены многочисленные связи метода наискорейшего спуска (в особенности его многошагового варианта) с другими методами решения задач линейной алгебры.

Работы Л.В.Канторовича по методу Ньютона [87,99,106] блестяще подтверждают высказывавшиеся им два тезиса. Первый из них заключается в том, что разумно проведенное обобщение позволяет яснее увидеть существо дела и получить, как это ни парадоксально, более точный результат, чем при индивидуальном изучении частной задачи. Второй тезис состоит в том, что наличие хорошего приближения помогает не только локализовать предполагаемое решение, но и установить сам факт его существования. Учитывая вклад Леонида Витальевича в разработку метода Ньютона, его функционально-аналитический вариант принято называть методом Ньютона - Канторовича.

В [106,107] для исследования сходимости метода Ньютона Леонид Витальевич разрабатывает общий метод мажорант, основанный на теории упорядоченных векторных пространств.

VI. Линейное программирование

Открытие линейного программирования - еще одно блестящее подтверждение марксистской трактовки проблемы взаимодействия теории и практики.

В 1938 году к Л.В.Канторовичу обратились сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой рекомендовать численный метод для расчета рационального плана загрузки имеющегося оборудования. Речь шла о комплексном выполнении пяти видов работ на дуцильных станках восьми типов. Вопрос сводился к определению матрицы (h_{ik}) и величины Z из условий

$$h_{ik} > 0, \sum_{k=1}^5 h_{ik} = 1, \sum_{i=1}^8 h_{ik} \cdot d_{ik} = z \rho_k, z \rightarrow \max,$$

где d_{ik} - суммарная производительность станков i -й группы при выполнении работ k -го вида, а ρ_k характеризуют требуемый ассортимент. Из соответствующих результатов классического анализа вытекает, что в искомой матрице (h_{ik}) лишь двенадцать элементов отличны от нуля. Однако перебор всех таких комбинаций сопряжен с непреодолимыми трудностями (требуется решить $C_{12}^{10} \approx 10^9$ систем линейных уравнений с двенадцатью неизвестными). Поэтому эффективные методы решения подобных задач должны базироваться на принципиально новых идеях, позволяющих проводить целенаправленный перебор указанных комбинаций.

Ядром открытия Леонида Витальевича является установленная им объективная связь задачи оптимального планирования с задачей определения соответствующих стоимостных показателей. На этой основе формулируются признаки оптимальности, позволяющие предложить различные схемы направленного перебора допустимых планов и систем стоимостных показателей. В частности, для приведенной задачи фанерного треста соответствующий признак состоит в следующем. Для оптимальности допустимого плана (h_{ik}^*) необходимо и достаточно, чтобы нашлись разрешающие множители λ_k^* , удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_k^* > 0, \sum_{k=1}^5 \lambda_k^* > 0, \lambda_k^* d_{ik} = \max_s \lambda_s^* d_{is} \text{ при } h_{ik}^* > 0.$$

Указанные разрешающие множители λ_k^* объективно оценивают трудоемкость выполненных работ, а величины $\mu_i^* = \max_s \lambda_s^* d_{is}$ можно рассматривать как прокатные оценки соответствующей группы станков.

Основам теории оптимального производственного планирования были посвящены доклады Л.В.Канторовича, с которыми он выступил в Ленинградском университете и в Ленинградском институте инженеров промышленного строительства в мае 1939 г. В том же году была издана брошюра "Математические методы организации и планирования производства", представляющая собой дополненную стенограмму этих докладов. В этой работе на основе метода разрешающих множителей исследуются различные классы планово-производственных задач. Для характеристики широты охвата материала достаточно перечислить наименования разделов: распределение обработки деталей по станкам, организация производства с обеспечением максимального выполнения плана при условии заданного ассортимента, наиболее полное использование механизмов, максимальное использование комплексного сырья, наиболее рациональное использование топлива, наилучшее выполнение плана строительства при различных строительных материалах, наилучшее распределение посевной площади, наилучший план перевозок. Математическому обоснованию предложенных методов посвящены три приложения. В последнем из них на основе геометрической интерпретации задач линейного программирования доказывается существование разрешающих множителей.

Дальнейшему развитию и конкретизации методов линейного программирования посвящены работы [73, 80, 89, 97, 101, 105, 125, 126, 135, 136, 140, 163, 164, 171, 173] и др.

В 1940 году Л.В.Канторович и М.К.Ганурин разрабатывают эффективные методы решения транспортной задачи в сетевой постановке (см. [97]). Бесконечномерный аналог этой задачи изучен в [81], что позволило Л.В.Канторовичу в [89] доказать справедливость известной гипотезы Монжа для широкого класса задач перемещения массы. На этой же основе, как уже отмечалось, в [125, 126] построено и изучено новое функциональное пространство, широко используемое теперь в математической экономике и теории вероятностей.

Вопросам рационального раскрытия посвящены работы Л.В.Канторовича [80, 101], а также написанная им совместно с В.А.Залгаллером монография [105] (второе переработанное и дополненное издание [196]). В последней, в частности, для решения задач линейного раскрытия предложена комбинация методов линейного и динамического программирования.

Особый интерес представляет работа [73], посвященная исследованию бесконечномерных задач выпуклого программирования. Для таких задач устанавливается признак оптимальности и формулируются идеи построения численных методов на основе последовательного улучшения имеющихся приближений.

VII. Вычислительная техника и программирование

Л.В.Канторович внес значительный вклад в развитие вычислительной техники и программирования.

Предложенные им алгоритмические и структурные решения легли в основу ряда оригинальных вычислительных устройств. В середине пятидесятих годов под руководством Леонида Витальевича были разработаны релейные клавишные машины "Вильнюс" и "Бятка", которые сыграли важную роль в автоматизации вычислительных работ на предприятиях и в учреждениях [27]. Интересные идеи, связанные с усовершенствованием различных десятичных вычислительных устройств, предложены в [6* -13*].

В те же годы Л.В.Канторович обращается к вопросам автоматизации программирования, а также других форм интеллектуальной деятельности человека (осуществление выкладок с символами, преобразование программ и т.п.). Сформулированные им принципы (см. [116, 184, 208]) получили дальнейшее развитие в ряде работ советских и зарубежных авторов.

Уже в начале 60-х годов Л.В.Канторович выдвигает идею "усиления" вычислительных возможностей универсальных ЭВМ путем соединения их со специализированными процессорами (приставками), ориентированными на массовые вычисления, характерные для того или иного класса задач. В 1963 г. в Институте математики СО АН СССР под руководством Леонида Витальевича был разработан специализированный процессор [3* -5*, 188] для ускоренного выполнения векторных вычислений - "арифметическая машина". В этой машине был использован предложенный Л.В.Канторовичем роторный принцип реализации массовых арифметических операций. Операции выполнялись с предельной скоростью, ограниченной только быстродействием оперативной памяти. Некоторые архитектурные решения, положенные в основу арифметической машины (прямой доступ к оперативной памяти, конвейерная организация обработки и др.), впоследствии получили широкое распространение в отечественных и зарубежных машинах. Использо-

вание проблемно-ориентированных процессоров считается сейчас одним из наиболее перспективных направлений развития вычислительных систем.

Уш. Оптимальное планирование и оптимальные цены

Л.В.Канторович заложил фундамент современной теории оптимального планирования социалистической экономики. Развернутому изложению основных идей в этой теории посвящена его капитальная монография "Экономический расчет наилучшего использования ресурсов" [128]. Стержнем этой книги является формулировка основной задачи производственного планирования и динамической задачи оптимального планирования. Указанные задачи достаточно просты по формулировке, но в то же время учитывают важнейшие черты планирования в социалистической экономике. Одно из привлекательных качеств состоит в том, что они базируются на схеме линейного программирования и, следовательно, на обширном наборе эффективных вычислительных средств, часть из которых предложил сам Леонид Витальевич.

Динамическую задачу оптимального планирования Л.В.Канторович формулирует следующим образом.

Задан (конечный) набор вещественных чисел $(a_{kit}^s)_{k \in K, i \in I, t \in T}$; $(b_{kit})_{k \in K_0, i \in I_0, t \in T_0}$, где K, I, T - конечные множества индексов, а K_0, I_0, T_0 - их некоторые выделенные подмножества. Требуется найти набор чисел $(x^s)_{s \in S}$, удовлетворяющий условиям

$$(1) \sum_{s \in S} a_{kit}^s x^s \geq b_{kit} \quad (k \in K_0, i \in I_0, t \in T_0);$$

(2) не существует набора $(\tilde{x}^s)_{s \in S}$, удовлетворяющего пространствам (1) и

$$\sum_{s \in S} a_{kit}^s \tilde{x}^s \geq \sum_{s \in S} a_{kit}^s x^s \quad (k \in K \setminus K_0, i \in I \setminus I_0, t \in T \setminus T_0).$$

Содержательно набор чисел $(a_{kit}^s)_{k \in K, i \in I, t \in T}$ интерпретируется как "производственный способ по переработке одних ингредиентов в другие, где положительные числа отвечают выпускам, а отрицательные - затратам соответствующих продуктов (k) в пунктах или районах (i) и в периоды времени (t). Требуется, таким образом, найти такие объемы (x^s) использования всех способов, чтобы не выйти за ограничения по ресурсам ($b_{kit} > 0$) и обеспечить выполнение плановых заданий ($b_{kit} <$

< 0). Условие (2) обычно конкретизируется в зависимости от критерия оптимальности.

Динамическая задача оптимального планирования привлекала большое внимание Леонида Витальевича и в последующие годы. В частности, ее дальнейшему развитию посвящена ключевая работа [139]. В ней указаны основные направления расширения и совершенствования основной схемы динамической модели и намечены также пути использования ее в практике социалистического планирования. В этой работе Леонид Витальевич показал, как в экономическую модель вводятся элементы нелинейности, стохастичности и дискретности и какую роль они играют как в более точном учете экономической реальности, так и при математическом анализе соответствующих моделей. Работа [139], по существу, определяла направление многих экономико-математических работ, которые были выполнены в последующие годы. За рубежом, в частности, большое развитие получило направление, именуемое теорией экономики благосостояния. Все основные элементы этой теории заложены в работах Леонида Витальевича по глобальным оптимизационным моделям планирования социалистической экономики. Леонид Витальевич наметил также направление развития математических методов для моделирования математических процессов социалистической экономики [123] (см. также [134]). Хотя работа [123] была опубликована несколько раньше, чем книга [128], ее можно рассматривать как продолжение последней.

Выдающимся достижением Л.В.Канторовича явилась формулировка оптимальных цен и осознание того факта, что цены и план составляют единую неразделимую систему и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Леонид Витальевич назвал эти цены объективно-обусловленными оценками, специально подчеркивая тот факт, что эти цены отражают совокупность условий, при которых составляется оптимальный план.

В настоящее время является общепринятым, что объективно-обусловленные оценки оптимального плана — это тот ориентир, к которому должны стремиться реальные цены. Другим принципиально важным обстоятельством здесь явилось то, что система объективно-обусловленных оценок включает в себя не только оценки обычных продуктов, но также оценки видов ресурсов, в том числе трудовых, оценки фондов, условий социального характера и оценки времени как фактора производства.

Своей трактовкой объективно-обусловленных оценок Л.В.Канторович заложил основы оптимизационного экономико-математического анализа широкого круга фундаментальных экономических проблем. Здесь следует упомянуть такие проблемы, как проблемы эффективности капитальных вложений, новой техники и других хозяйственных мероприятий, проблемы хозяйственного расчета, экономической оценки природных ресурсов, рационального использования труда. Использование объективно-обусловленных оценок обеспечило существенное продвижение в проблеме выбора показателей оценки деятельности предприятий и других хозяйственных органов.

Следует заметить, что формулировка динамической модели оптимального планирования [123,128,139] создала впечатление у ряда исследователей, что планирование и управление социалистической экономикой может быть полностью осуществлено централизованно с помощью гигантской оптимизационной задачи.

Леонид Витальевич был одним из первых, кто осознал важность декомпозиционных методов и лежащих в их основе локальных решений, с помощью которых в конечном счете формируется оптимальный план для всей экономики в целом.

В своих работах он постоянно указывает на использование принципов декомпозиции, как при решении больших задач линейного программирования, так и при организации реального процесса составления плана. В работе [146] этот вопрос проработан им особо. В этой же работе, а также в ряде последующих работ [170,178] Леонид Витальевич изучает вопрос построения динамической модели оптимального планирования на базе существующей статистической информации, в частности на базе информации межотраслевого баланса. Путь, указанный в этих работах, оказался плодотворным, и в настоящее время в Госплане используются оптимизационные модели, базирующиеся на информации межотраслевого баланса.

В это же время внимание Л.В.Канторовича привлекают экономические модели, которые могут быть подвергнуты достаточно полному математическому анализу в силу их малой размерности. Малоразмерные (однопродуктовые и двухпродуктовые) модели довольно интенсивно исследовались за рубежом. Накоплен обширный арсенал средств анализа таких моделей. Однако Л.В.Канторович и в эту область внес свой оригинальный вклад. В работе [124] он сформулировал такую однопродуктовую модель, в которой учи-

тывается срок создания основных производственных фондов. Это позволяет исследовать проблему амортизации и эффективности капитальных вложений и ряд других вопросов, которые актуальны именно для социалистической экономики. К анализу однопродуктовых моделей Л.В.Канторович обращается еще не раз. В работах [170,172,174,205,206] рассматриваются различные способы введения и учета технического прогресса. В частности, тщательно исследован вопрос о влиянии темпов технического прогресса на норматив эффективности капитальных вложений. Предложен способ оценки численной величины норматива исходя из имеющихся статистических данных.

IX. Экономические проблемы социалистической экономики

Л.В.Канторович внес выдающийся вклад в развитие экономической науки. С его именем связан естественно-научный подход к исследованию широкого круга проблем социалистической экономики. Проблема ценообразования — одна из коренных, затрагивающая, по существу, все сферы функционирования общества. Тезис К.Маркса о том, что цены в социалистическом обществе должны соответствовать общественно-необходимым затратам труда, получил дальнейшее развитие в трудах Л.В.Канторовича. Леонид Витальевич дал определение понятию оптимума, оптимального развития [139,146], уточнив, в частности, что следует понимать под максимальным удовлетворением потребностей членов общества. Из его положения о неразрывности плана и цен вытекает зависимость общественно-необходимых затрат труда от целей социалистического общества. В [128,133,146] он указывает конкретные условия, при которых объективно-обусловленные оценки оптимального плана совпадают с полными (прямыми и сопряженными) затратами труда.

К проблеме ценообразования Леонид Витальевич неоднократно возвращается в своих работах. Он анализирует концепции ценообразования под углом зрения теории оптимального планирования [146,179,186,107], указывает пути совершенствования действующих методик ценообразования. И везде Леонид Витальевич подчеркивает, что система экономических показателей должна быть единой, построена по единому принципу. В связи с этим зна-

читательную часть своих работ в этой области Л.В.Канторович посвящает разработке и анализу конкретных экономических показателей. В [146,186,207] показывается, как необходимо рассчитывать уровни оптовых цен по отраслям народного хозяйства, в [120,125,145,170,187,190] вскрывается сущность понятия "показатели эффективности капиталовложений", показывается его роль в экономических расчетах принятия решений, предлагается методика определения величины коэффициента.

В работах [143,147,153,163] Л.В.Канторович вскрывает сущность понятия амортизации. С помощью остроумной математической мысли он указывает, как определить численную величину коэффициента амортизационных отчислений в тех или иных условиях.

Специальный интерес проявляет Леонид Витальевич к проблемам транспорта. В работах [182,199,212,213] он исследует проблему эффективной работы транспорта с экономической точки зрения, показывает, каковы должны быть транспортные тарифы в зависимости от вида транспорта, груза, расстояний и т.д.

В работах [142,198] и др. показывается, как оптимизационная техника может быть использована для исследования ряда проблем сельскохозяйственного производства: размещения сельскохозяйственных культур, специализации, выравнивания экономических условий хозяйствования и др.

В течение ряда лет и особенно в последние годы Л.В.Канторовича интересуют проблемы эффективности технического прогресса, в частности эффективности внедрения в производство новой техники. Работы [144,173,179,182,214] специально посвящены этому вопросу.

Л.В.Канторович большое внимание уделяет внедрению разработанных им методов в экономическую практику. В этой связи в первую очередь следует отметить цикл работ [80,101,105,196], посвященных методам рационального раскроя материалов, начатый Леонидом Витальевичем еще в 1942 году. В 1948-50 годах эти методы были внедрены на Ленинградском вагоностроительном заводе им.Егорова, на Кировском заводе и распространены впоследствии на другие предприятия.

Широкому распространению методов рационального раскроя способствовал ряд проведенных по инициативе Л.В.Канторовича всесоюзных совещаний с участием Госнаба СССР.

С 1964 года Леонид Витальевич руководит работой по внедрению методов расчета оптимальной загрузки прокатных станов

страны. Функционирующая в настоящее время в Госнабе СССР автоматизированная система управления "АСУ-Металл" включает в себя в качестве основного блока оптимизационный алгоритм загрузки.

Являясь членом Государственного комитета по науке и технике при СМ СССР, Леонид Витальевич осуществляет большую организационную работу, направленную на совершенствование методов планирования и управления народным хозяйством. Л.В.Канторович возглавляет Совет ГКНТ СССР по использованию оптимизационных расчетов, является членом разнообразных ведомственных советов и комиссий (по ценообразованию, транспорту и др.). В целом вклад Л.В.Канторовича в исследование проблемы эффективности социалистического производства, в частности эффективности капитальных вложений, исключительно велик. В настоящее время учеными-экономистами истинное значение работ Л.В.Канторовича в этой области еще только осознается. Что же касается хозяйственной практики, то здесь предстоит еще много сделать, чтобы идеи и методы Леонида Витальевича стали стандартными инструментом в планировании и управлении.

С.С.Кутателадзе

В.Л.Макаров

Г.Ш.Рубинштейн

СПИСОК РАБОТ Л.В.КАНТОРОВИЧА

1929

- I. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M.W.H.Young. - Fund. Math., 13, p.178-185.
2. Sur le théorème de M.Vitali. - C.r. Soc.Sci. Varsovie, 22, p.142-148.
3. Об универсальных функциях. - Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 2, вып.I, с.3-21.
4. Sur un problème de M. Steinhaus. - Fund. Math., 14, p.266-270.
5. Sur les ensembles, projectifs de la deuxième classe. - C.r. Acad. Sci. (Paris), 189, p.1233.

1930

6. Sur le fonctions de M.Hausdorff. - C.r. Acad.Sci. (Paris), 190, с.332 (совм. с Е.М.Ливенсоном).
7. Sur les ensembles projectifs de M.Luzin. - C.r. Acad.Sci. (Paris), 190, p.1113.
8. Sur le fonctions du type (U) . -C.r. Acad.Sci. (Paris), 190, p.1267.
9. О проективных множествах. - Доклад на I Всесоюзн. мат. съезде. Научный бюллетень съезда. Харьков, с.26-27.
10. О полиномах С.Н.Берштейна. - Доклад на I Всесоюзн. съезде. Научный бюллетень съезда, №2. Харьков, с.27-28.
- II. Sur les suites des fonctions presque partout continues. - Fund. Math., 16, p.25-28.

1931

12. О сходимости последовательности полиномов С.Н.Берштейна за пределами основного интервала. - Изв. АН СССР, №2, с.II03-III5.
13. Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами. - Изв. АН СССР, №9, с.II63-II68.

1932

14. Un exemple d'une fonction semicontinues, universelle pour les fonction continues.- Fund.Math., 18, p.178-181.
15. О некоторых разложениях по полиномам в форме С.Н.Бернштейна, 1. - ДАН, №20, с.563-568.
16. О некоторых разложениях по полиномам в форме С.Н.Бернштейна, 2. - ДАН, №21, с.595-600.
17. Memoir on the analytical operations and projective sets.- Fund. Math. , 18, с.214-279 (совм. с Е.М.Ливенсоном).
18. Об обобщенных производных. - Mat. сб., 39, №4, с.158-170.
19. Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés.- С.г. Sci., Varsovie, 25, 1-7.

1933

20. Memoir on the analytical operations and projective sets.- Fund. Math., 20, p.54-97.
21. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение. - Изв. АН СССР, №2, с.229-235.
22. Один прямой метод решения задач о минимуме двойного интеграла. - Изв. АН СССР, №5, с.647-652.
23. О конформном отображении. - Mat. сб., 40, №3, с.294-325.
24. Вариационное исчисление. - Л.: КУБУЧ (совм. с В.И.Смирновым и В.И.Крыловым).

1934

25. Применение интеграла Стильтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании. - Тр. Ленингр. строят. ин-та, I, вып. I, с.17-34.
26. Об общих методах улучшения сходимости при приближенном решении граничных задач математической физики. - Тр. Ленингр. строят. ин-та, I, вып. 2, с.65-72.
27. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и некоторых других применениях метода выделения особенностей. - Mat. сб., 41, №2, с.235-245.
28. La représentation explicite d'une fonction mesurable, arbitraire dans la forme de la limite d'une suite des polynomes.- Mat. сб., 41, №3, с.503-510.

29. Некоторые исправления к моей статье "О конформном отображении". - *Мат. сб.*, 41, №1, с.179-182.
30. О конформном отображении многосвязных областей. - *ДАН*, 2, №8, с.441-445.
31. Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных. - *ДАН*, 4, №9, с.532-536.
32. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.- *Studia Math.*, 69-98 (совм. с Г.М.Фихтенгольцем).
33. О продолжении семейства линейных функционалов.- *ДАН*, I, №4, с.204-210.
34. Об одном обобщении интеграла Стильтьеса. - *ДАН*, 4, с.417-421.
35. О конформном отображении областей. - *Тр. II Всесоюзн. мат. съезда. Л.*, т.2, с.173.
36. О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных.- *Тр. II Всесоюзн. мат. съезда. Л.*, т.2, с.398.
37. Некоторые теоремы о линейных функционалах.- *ДАН*, 3, №5, с.307-317 (совм. с Г.М.Фихтенгольцем).
38. Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen (Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art). - *Compos. Math.*, 2, №3, p.405-416.
39. О полупорядоченных линейных пространствах и их применениях к теории линейных операций. - *ДАН*, 4, №1-2, с.II-I4.
40. Sur un espace des fonctions a variation bornées et la différentiation d'une serie terme à terme.- *C.r. Acad. Sci. (Paris)*, 201, p.1457-1460.
41. О некоторых общих методах расширения пространства Гильберта. - *ДАН*, №3-4, с.II5-II8.
42. Некоторые частные методы расширения пространства. - *ДАН*, 4, №4-5, с.I63-I67.

1936

43. Методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Л.-М.(совм. с В.И.Крыловым).
К общей теории операций в полупорядоченных пространствах.- *ДАН*, №7, с.271-274.

45. Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида. - ДАН, II, №1, с. 7-10.
46. Sur les propriétés des espaces semiordonnés linéaires.- C.r. Acad. Sci. (Paris), 202, p.813.
- 47: Les formes générales des opérations linéaires que transforment quelques espaces classiques dans un espace semiordonné linéaire arbitraire.- C.r. Acad. Sci. (Paris), 202, p.1351.
48. Основы теории функций вещественного переменного, значения которых принадлежат линейному полуупорядоченному пространству. - ДАН, т.2, №9, с.359-363.
49. О некоторых классах линейных операций. - ДАН, 3(12), №1, с.9-13.
50. Общие формы некоторых классов линейных операций. - ДАН,3, №3, с.101-106.
51. Об одном классе функциональных уравнений. - ДАН, 4(13), №5, с.211-216.

1937

52. О применении одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к задаче о кручении призматических стержней. - Тр. Ленингр. строят. ин-та, вып.4, с.III-122 (совм. с П.В.Фрумкиным).
53. Lineare halbgeordnete Räume . - Mat. сб. 2(44), вып.1, с.121-158.
54. О полуупорядоченных пространствах. - Изв. АН СССР, сер. мат., №1, с.91-110.
55. Эффективные методы в теории конформных отображений. -Изв. АН СССР, сер. мат., №1, с.79-90.
56. О последовательности линейных операций. - ДАН, 14, №5, с.255-259.
57. Некоторые теоремы о сходимости почти везде. - ДАН, 14, №9, с.537-540.
58. К проблеме моментов для конечного интервала. - ДАН, 14, №9, с.531-536.
59. Конформное отображение круга на односвязную область. - Сб. трудов НИИМ ЛГУ, вып.2, с.5-17.
60. Sur quelques théorèmes sur les ensembles projectifs.- C.r. Acad. Sci. (Paris), 204, p. 466-468 (совм. с Е.М.Ливенсоном).

61. Sur la représentation des opérations linéaires.- Compos. Math., 5, p.119-165 (совм. с Б.З.Вулихом).
62. Sur un theoreme de M. Dunford.- Compos. Math., 5, 430-432 (совм. с Б.З.Вулихом).
63. О функциональных уравнениях. - Тр. ЛГУ, 3, вып.7, с.17-33.

1938

64. Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ. - В кн.: Математика и естествознание за 20 лет, М.-Л.: Изд-во АН СССР, с.20-29 (совм. с Г.М.Фихтенгольцем).
65. Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires.- C.r. Acad.Sci. (Paris),206, p.883.
66. Sur les fonctionelles partiellement additives dans les espaces semiordonnés linéaires.- C.r. Acad. Sci. (Paris), 207 (совм. с А.Г.Пинскером).

1939

67. The method of successive approximations for functional equations.- Acta Math.,71,p.63-97.
68. К теории интегралов Стильтьеса - Римана. - Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., №37, вып.6, с.52-68.
69. Математические методы организации и планирования производства. - Л.: Изд-во ЛГУ,
70. Sur les formes générales des fonctionelles partiellement additives. -C.r. Acad. Sci. (Paris), 208 (совм. с А.Г. Пинскером).

1940

71. Определенные интегралы и ряды Фурье. - Л.: Изд-во ЛГУ.
72. Linear operations in semiordered spaces, I. - Mat. сб-к, 49, с.209-284.
73. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. - ДАН, т. 28, вып. 3, с.212-215.

1941

74. О сходимости вариационных процессов. - ДАН, 30, с.107-III.
75. О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. - ДАН, 30, с.579-582.
76. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л.:Гостехиздат (совместно с В.И.Крыловым).
77. Некоторые замечания о методе Рунге. - Труды ВИТУ ВМС, вып.3, с.3-16.

1942

78. Применение идеи метода Галёркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Прикладн. математика и механика, вып. 6, с.31-40.
79. Рецензия на "Курс анализа" В.В.Немыцкого и др. - Изв. АН, сер. мат., 5, №4-5, с.381-383 (совм. с И.П.Натансоном).
80. Методы рационального раскрытия металла. - Произв. техн. бюллетень НК боеприпасов, №7-8, с.21-29.
81. О перемещении масс. - ДАН, 37, №1, с.227-230.
82. Некоторые соображения по расстановке минных полей в связи с подсчетом вероятностей поражения. - Труды ВВМКУ, вып.6.

1945

83. Об одном эффективном методе решения задач об экстремуме квадратичных функционалов. - ДАН, 48, № 7, с.483-487.

1946

84. Методика расчета живучести системы объектов. - Тезисы докладов научно-техн. конференции ВИТУ ВМС,
85. Теория вероятностей. - Л.

1947

86. О методе наискорейшего спуска. - ДАН, 56, №3, с.233-236.

1948

87. О методе Ньютона для функциональных уравнений. - ДАН, 59, №7, с.1237-1240.

88. К общей теории приближенных методов анализа. - ДАН, 60, №3, с.957-960.
89. Об одной задаче Монжа. - УМН, 3, вып.2, с.225-226.
90. О некоторых приемах вычислений сумм произведений, использующих двоичные разложения. - УМН, вып.4, с.160-162 (совм. с М.К.Гавуриным).
91. Об одном алгоритме для приближенного решения интегральных уравнений. - Сб. научно-исследоват. работ ВТУЗов, вып.9, с.3-10.
92. Функциональный анализ и прикладная математика. - Вестн. Ленингр. гос. ун-та, №6, с.3-18.
93. Приближенные методы анализа. - В кн.: Математика за 30 лет. М.-Л., 759-851 (совм. с В.И.Крыловым).
94. Функциональный анализ и прикладная математика. - УМН, 3, вып. 6, с.91-185.
95. Г.М.Фихтенгольц. - УМН, 3, вып.5, с.174-181 (совм. с В.И.Смирновым и И.Н.Натансоном).

1949

96. Труды Математического института им. Стеклова (редактор и предисловие. - М.-Л.: Изд-во АН СССР.
97. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. - В кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.-Л., с.110-138 (совм. с М.К.Гавуриным).
98. Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций. - Труды Мат. ин-та, 28, с.3-25.
99. О методе Ньютона. - Труды Мат. ин-та, 28, с.104-144.
100. Об интегрировании уравнений $x'' = f(x)$. - Труды Мат. ин-та, 28, с.148-151.
101. Подбор поставок, обеспечивающий максимальный выпуск продукции при заданном ассортименте. - Лесная промышленность, №7, с.15-17, №8, с.17-19.

1950

102. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л.: Гостехиздат (совм. с В.И.Крыловым).
103. Таблицы функций Бесселя целых номеров. - М.-Л.: Гостехиздат (редактор).

104. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат (совм. с Б.З.Вулихом и А.Г.Пинскером).

1951

105. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. - Л.: Лениздат (совм. с В.А.Залгаллером).
106. Принцип мажорант и метод Ньютона. - ДАН, 76, №1, с.17-20.
107. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. - ДАН, 80, №6, с.849-852.
108. Линейные полуупорядоченные группы. - УМН, 6, вып.3(43), с.31-98 (совм. с Б.З.Вулихом и А.Г.Пинскером).

1952

109. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л., Гостехиздат, (совм. с В.И.Крыловым).

1953

110. A Felsőbbé analízis közéleti modernizációja. - Budapest.
111. Введение в функциональный анализ. Рецензия на курс Л.А. Люстерника и В.И.Соболева. - М.: Советская книга.

1956

112. Näherungsmethoden der höheren Analysis. - Berlin.
113. Methode de aproximatie ale analizei superioare. - Bucuresty.
114. Об интегральных операторах. - УМН, II, с.3-29.
115. Приближенное решение функциональных уравнений. - УМН, II, с.99-116.
116. Перспективы развития и использования электронных счетных машин. - В кн.: Математика, изд-во АН СССР, т.2, с.382-390.
117. Функциональный анализ и вычислительная математика. - Тр. III Всесоюзн. съезда математиков, т.2. - Изд-во АН СССР, с.43 (совм. с С.Л.Соболевым и Л.А.Люстерником).
118. О математической символике, удобной при вычислениях на машинах. - Тр. III Всесоюзн. съезда математиков, т.2. Изд. АН СССР (совм. с Л.Т.Петровой).

119. И.П.Натансон (к 50-летию). - УМН, 9, вып.4, с.193-195 (совм. с Д.К.Фаддеевым).
120. Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций. - М., Гостехиздат (совм. с В.И. Крыловым и К.Е.Черниним).

1957

121. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах. - ДАН, 113, №4, с.738-741.
122. О проведении численных и аналитических вычислений на машинах. Доклад на сессии АН АрмССР. - Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 10, №2, с.3-16.
123. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. - Вестн. Ленингр. гос. ун-та, сер. математика, механика и астрономия, 2, с.68-103.
124. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач. - ДАН, 115, №3, с.441-444.
125. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. - ДАН, 115, №6, 1058-1061 (совм. с Г.Ш. Рубинштейном).

1958

126. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестн. Ленингр. гос. ун-та, 7, №2, с.52-59 (совм. с Г.Ш.Рубинштейном).
127. Игр теория. - БСЭ, изд.2, т.51 (совм. с И.Л.Канторович).
128. Линейное программирование. - БСЭ, изд. 2, т.51 (совм. с Г.Ш.Рубинштейном).
129. Операций исследование. - БСЭ, изд. 2, т.51 (совм. с А.А. Ивановым).
130. Линейное программирование. - МСЭ, изд. 4, т.4 (совм. с Г.Ш.Рубинштейном).
131. Операций исследование. - МСЭ, изд. 4, т.6 (совм. с А.А. Ивановым).
132. Возможности применения математических методов в вопросах производственного планирования. - В кн.: Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий. - Л.:Машгиз, 338-355.

- I33. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах (на китайск. языке) (совм. с Б.З.Буликом и А.Г.Пинскером).
- I34. *Approximate methods of higher analysis.* - Гронинген.
- I35. *On the translocation of the masses.* - *Manag. Sci.*, 5, №1, p. 1-4.

1959

- I36. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - Изд-во АН СССР.
- I37. Линейные неравенства и смежные вопросы. - М.: ИЛ (редактор и предисловие).
- I38. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Физматгиз (совм. с Г.П.Акиловым).
- I39. Математические методы организации и планирования производства. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Соцэкгиз, с.251-329.
- I40. Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Соцэкгиз, с.310-353.
- I41. Приближенные и численные методы. - В кн.: Математика в СССР за 40 лет. М.: Физматгиз, с.809-856 (совм. с М.К. Гавуриным).
- I42. О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений. - В кн.: Экономическая эффективность капитальных вложений и новой техники. Соцэкгиз, с.227-237.
- I43. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. - ДАН, I29, №4, с.732-735 (совм. с Л.И.Горьковым).
- I44. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог). - УМН, I4, вып.5, с.123-128 (совм. с И.П.Натансоном).
- I45. Математические методы организации и планирования производства (на китайск. языке). - Пекин.
- I46. Выступление на сессии АН СССР. - Вестн. АН СССР, №4, с.59-61.
- I47. Работы по приближенному анализу (редактор и предисловие). - Тр. Мат. ин-та АН СССР, 53.

- I48. О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений. Доклад на Всесоюзной научно-технической конференции. - В кн.: Экономическая эффективность капитальных вложений и новой техники. М.:Соцэкгиз.
- I49. Оптимальное планирование и экономические показатели. Доклад на Всесоюзном совещании по применению статистических и математических методов в экономике, Москва.
- I50. Об одной системе программирования. - Тр. конференции по вычислительной технике, т.2 (совместно с М.А.Яковлевой и Л.Т.Петровой).

1960

- I51. Об исчислении производственных затрат. - Вопросы экономики, №1, с.122-134.
- I52. *Mathematical methods for organisation and planning of production.*- *Manag. Sci.*

1961

- I53. Проблемы математической экономики. - Тезисы доклада на IV Всесоюзн. мат. съезде. Л., с.13-14.

1962

- I54. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений. - Сиб. мат. журн., 3, №3, с.701-709.

1964

- I55. Динамическая модель перспективного планирования. - В кн.: Планирование и экономико-математические методы. М.: Наука, с.323-345.
- I56. Математические модели оптимального планирования. - Тр. математико-эконом. конференции в Будапеште.
- I57. Перспективы применения математического оптимального планирования в с/х производстве. - В кн.: Применения математики в экономике с/х. М.:Экономика.

1965

- I58. Оптимальные модели перспективного планирования. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях, т.3. М.:Мысль, с.7-87 (совм. с В.Л.Макаровым).
- I59. Амортизационные платежи при оптимальном использовании оборудования. - ДАН, I62, №5, с.III5-III8 (совм. с И.В. Романовским).
- I60. На основе математических методов. - Экономика строительства, №3, с.I2-I6.
- I6I. Возможность использования математического оптимального планирования в анализе эффективности новой техники. - Тр. совещания ЕИСХОМ по эффективности с/х техники. М., с.27-32 (совм. с В.А.Булавским).

1966

- I62. Амортизационные исчисления и оценки эффективности новой техники в системе оптимального планирования. - Тр. Ленингр. инж.-эконом. ин-та, 58, с.3-12.
- I63. Структура амортизационных исчислений при стационарной нагрузке машинного парка. - ДАН, I66, №2, с.309-312 (совм. с И.В.Романовским).
- I64. Модель оптимальной замены оборудования в условиях стационарной неравномерной нагрузки. - Тезисы Международн. мат. конгресса, секция I3, с.2I.
- I65. Математические модели оптимального планирования. - В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск, с.I09-II6.
- I66 Развитие математических методов экономического анализа. - Вестн. АН СССР, №I0, с.9-I5.
- I67. Математическая подготовка экономистов. - Высшая школа (совм. с А.Г.Пинскером).
- I68. Математические методы в решении хозяйственных задач. - Зоммунист, №I0, с.64-74.
- I69. Арон Григорьевич Пинскер (к 60-летию до дня рождения). - УМН, 2I, №6, с.I69-I70 (совм. с Д.А.Владимировым, Б.З. Вулихом).

1967

170. Об исчислении нормы эффективности на базе однопродуктовой модели развития хозяйства. - Оптимальное планирование, №8, с.37-51.
171. Экстремальные состояния и экстремальные управления. - Вестн. ДУ, сер. математика, механика и астрономия, 7, №2, с.30-37 (совм. с Г.П.Акиловым и Г.Ш.Рубинштейном).
172. Однопродуктовая динамическая модель при наличии мгновенной превращаемости фондов. - ДАН, 174, №3, с.18-21 (совм. с И.Г.Глобенко).
173. Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и технической политике. - Вопросы экономики, №10, с. 102-115.
174. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства. - Экономика и мат. методы, №5, с. 696-710 (совм. с А.Л.Вайнштейном).
175. Динамическая модель экономики. - ДАН, 170, №5, с.997-998 (совм. с И.Г.Глобенко).
176. Тарифы на пассажирский транспорт. - В кн.: Совещание по тарифам на пассажирский транспорт. М.
177. Математика и экономика. - В кн.: Наука и человечество, М. (совм. с А.Б.Горстко).
178. Вопросы разработки и использования крупноагрегированной модели оптимального перспективного планирования. - Оптимальное планирование, №8, с.23-35 (совм. с В.Л.Макаровым).
179. Цены и технический прогресс. - В кн.: Совещания по ценообразованию. М.

1968

180. Математическое оптимальное программирование в экономике. - М.: Знание (совм. с А.Б.Горстко).
181. Еще об исчислении нормы эффективности. - Экономика и мат. методы (совм. с А.Л.Вайнштейном).
182. Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику. - В кн. Совершенствование ценообразования и научно-технический прогресс. М., с.46-50.

183. Сергей Львович Соболев (к 60-летию со дня рождения). - УМН, 23, №5, с.177-186 (совм. с А.В.Бипадзе и М.А.Лаврентьевым).
184. Перспективы работы в области автоматизации программирования на базе крупноблочной системы. - Тр. Мат. ин-та АН СССР, 96, с.5-15.
185. Социология и экономика. - Информац. бюллетень соц.ассоц., №8, с.45-55.
186. О путях дальнейшего совершенствования ценообразования. - В кн.: Итоги реформы цен и перспективы ценообразования. М., с.35-40.

1969

187. Цена времени. - Коммунист, №10, 82-94 (совм. с В.Н.Богачевым).
188. О возможности повышения производительности универсальной ЦВМ при решении экономико-математических задач. - Экономика и мат. методы, 5, №2, с.276-279 (совм. с Я.И.Фетом).

1970

189. О дифференциальных и функциональных уравнениях экономической динамики. - Сиб. мат. журн., II, №5, с.1046-1059 (совм. с В.Л.Макаровым).
190. Об эффективности капиталовложений. - Экономика и мат. методы, 4, №6, с.811-826 (совм. с В.Н.Богачевым и В.Л.Макаровым).
191. Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. - Изв. АН СССР, сер. физика земли (совм. с В.И.Кейлис-Бороком).
192. Методы оптимизации и математические модели экономики. - УМН, 25, №5, с.107-109.

1971

193. Статистические вопросы оценки поверхностных эффектов, связанных с сейсмичностью. - Вычислительная сейсмология, вып. 5, с.80-128 (совм. с Г.М.Молчан, Е.В.Вилькович, В.И.Кейлис-Бороком).
194. Значение электронной вычислительной техники и ценообразование. - В кн.: Международные совещания по прим. ЭВМ в ценообразовании. М., изд. НИИ цен.

195. Управляющие параметры в экономической системе. - Тезисы докладов У Всесоюзн. совещания по проблемам управления. М.(совм. с В.Л.Макаровым).
196. Рациональный раскрой промышленных материалов.- М.:Наука, (совм. с В.А.Залгаллером).
197. Модели экономического роста. - Доклад на международн. конф. по моделям народн. хозяйства.Новосибирск, изд. ИМ СО АН СССР, с.3-29.
198. Экономические показатели с/х предприятий. - Тр. Международн. симпозиума. М.
199. О ценах, тарифах и эффективности экономики. - Экономика и организация пром. производства, №1, 25-30.
200. Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации. - Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве, I изд. ИЭиОПШ СО АН, с.5-40.

1972

201. Математические проблемы оптимального планирования и управления. - Доклад на I Всесоюзн. конф. по оптимальному планир. и управлению. М. (совм. с Е.Г.Гольштейном, В.Л. В.Л.Макаровым и И.В.Романовским).
202. О математическом обеспечении АСУ - "Металл". - Приборы и системы управления, №12, с.8-10.
203. Оптимальные решения в экономике. - М.: Наука. (совм. с А.Б.Горстко).
204. Пути развития вычислительных средств для решения больших задач оптимального планирования и управления. - Оптимизация, вып.6(23), с.5-7.

1973

205. Модели роста и их использование в долгосрочном планировании и прогнозировании. - Доклад на Международн. симпозиуме по долгосрочн. планированию и прогнозированию.М.(совм. с В.Л.Макаровым), М., с.164-181.
206. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического

прогресса. - ДАН, 211, №6, с.1280-1283 (совм. с В.И. Хяновым).

1974

207. Значение электронно-вычислительной техники в деле совершенствования ценообразования. - Тр. Международн. совещания по применению вычислит. техники в ценообразовании, с.127-136.
208. Комплексный подход к реализации массовых вычислений. - Оптимизация, 13(30), с.5-II (совм. с Л.Т.Петровой и Я.И.Фетом).
209. Оптимальное планирование: нерешенные задачи. - Экономика и организация промыш. производства, №5, с.3-9.
210. Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике. - Записки научн. семинаров ЛОМИ, 48, с.5-II.
211. Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике. - В кн.: Численные методы и автоматическое программирование. Л.: Наука, с.5-12.
212. Проблема учета транспортного фактора при размещении производства. - Вопросы экономики, №3, с.79-90.
213. Роль транспортного фактора при размещении производства. - (жел.-дорожн. перевозки). - Перевод на англ. язык (совм. с А.И.Журавель).
214. Экономические проблемы научно-технического прогресса. - Экономика и мат. методы, т.10, №3, с.432-448.

1975

215. Математические методы - экономике. - Литературн. газета, 22 октября, №43, с.13.

1976

216. Алгебра экономики. - Газ."Неделя", 10 апреля, №9(833).
217. Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы. - Лекция в Шведской академии наук в связи с присуждением Нобелевской премии за 1975 год. - Экономика и

организация промыш. производства, №3, с.124-134.

1977

218. Математика и экономика - взаимопроникновение наук. - Вестн. ЛГУ, сер. математика, механика, астрономия, №13, вып. 3, с.31-38.
219. Научно-технический прогресс и экономическая наука. - Политическое самообразование, №6, с.110-119.
220. Оптимизационные методы в экономике: результаты, трудности, перспективы. - Кибернетика, №2, с.68-72 (совм. с И.В. Романовским).
221. Развитие математической экономики в СО АН СССР. - Изв. СО АН СССР, №6. Сер. общ. наук, вып.2, с.14-25.
222. Функциональный анализ. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука (совм. с Г.П.Акиловым).
223. Рациональное использование ресурсов и ценообразование. - В кн.: Теоретические проблемы ценообразования в условиях развитого социализма. М.: Прейскурантиздат, с.46-58.
224. Проблемы применения оптимизационных методов в промышленности. - Изд. Федерации Шведск. индустрия. Стокгольм (совм. с Т.Купмансом). - На англ. языке.
225. Математические методы в управлении экономикой. - В кн.: Наука и человечество. М.: Знание (совм. с И.В.Романовским), с.278-287.
226. Задачи науки в области транспорта. - Газ. "Тудок", апрель.

1978

227. Принцип дифференциальной оптимизации в применении к одно-продуктовой модели экономики. - Сиб. мат. журн., №5, с. 1053-1064 (совм. с В.И.Хляновым и А.Г.Хованским).
228. Транспорт и система народного хозяйства. - Изв. АН СССР, сер. эконом., №6 (совм. с Н.В.Паенсоном), с.57-71.
229. Транспорт ставит проблемы. - Советская Россия, октябрь (совм. с М.П.Загладимовым).
230. Математические методы в экономике. - Сиб. мат. журн. (совм. с В.Л.Макаровым).
231. Об улучшении использования изобретений в народном хозяйстве. - В кн.: Управление и новая техника. М.:Эконо-

- мика.
232. Экономико-математические методы, состояние и применение в СССР и ГДР. - Вычислительная техника и обработка информации, №1 (на немецк. языке).
 233. Теоретические аспекты исследования стратегии. - Материалы конф. МПСА, т.1.
 234. Некоторые вопросы системного анализа взаимосвязи транспортного и топливно-энергетического комплексов. - Тр. семинара по системному моделированию соц.-эконом. процессов. Воронеж.
 235. Модельный анализ динамики экономических показателей в условиях научно-технического прогресса. - Доклад на рабочем совещании в Вене (совм. с А.Г.Кругликовым и В.И. Шияновым).
 236. Об использовании оптимизационных расчетов в АСУ отраслями народного хозяйства. - Экономика и мат. методы, №5 (совм. с Н.И.Чешенко, Ю.М.Зориным, Г.И.Шепелевым), 821-834.
 237. Выступление по докладу Матидзуки "Система цен и разрешающие множители Канторовича". - Материалы XI Советско-японского симпозиума ученых-экономистов. Ч.2.М., 288-290.
 238. Об использовании оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства. - Материалы теорет. конф. "Системный анализ и управление НТП". М.-Обнинск (совм. с Ю.М.Зориним и Г.И.Шепелевым), с.23-31.

1979

239. Глобальная оценка вклада науки и техники в экономику. - Управление НТП. Достижения и перспективы. М., в.4, с.30-38.
240. Ценообразование и технический прогресс. - В кн.: 60 лет планового ценообразования в СССР. М., с.32-43.
241. Значение и перспективы оптимизации в экономике. - Экономика и организация промышл. производства.
242. Критерий оптимальности. - В кн.: Дискуссии по критерию оптимальности в экономике.
243. Математические методы в управлении экономикой. - В кн.: Наука и человечество. Берлин (совм. с И.В.Романовским). - На немецк. языке.

244. Математика в современной школе. - Математика в школе, 14 (совм. с С.Л.Соболевым), с.6-11.
245. Экономика предсказаний землетрясений. - Доклады симпозиума по предсказанию землетрясений. Париж: ЮНЕСКО (совм. с В.И.Кейлис-Бороком).
246. С.Л.Соболев (к 70-летию со дня рождения).-УМН,1 (с соавт.).
247. Эффективность капиталовложений в транспорте.Выступление по докладам. - В кн.: Методика эффективности капиталовложений. М., с.88-91.
248. Укрупненный расчет вклада науки и техники в национальный доход СССР. - Тр. ВНИИСИ, вып.9, №56-64.
249. Интервью ТАСС в связи с постановлением от 12 июля 1979 г.
250. Б.З.Вулих (некролог). - УМН (с соавторами), т.34, №4, 133-137.
251. Методы оптимизации в управлении. - В кн.: Наука стран социализма. М. (совм. с И.В.Романовским).

1980

252. Математическое моделирование научно-технического прогресса. - Тр. конференции ИЭИП, Варшава.
253. Транспорт в системе народного хозяйства. - В кн.: Развитие транспортного комплекса. М.:Наука, с.5-49.
254. Некоторые вопросы экономических взаимосвязей транспорта и топливно-энергетического комплекса. - Системное моделирование экономических процессов. Воронеж, с.15-27.
255. Математико-экономическое моделирование научно-технического процесса. - Тр. IX Международн. конф. ИЭИП "Методы оптимизации", Берлин. - На англ. языке.
256. Принципы формирования закупочных цен на с/х продукцию. - В кн.: Закупочные цены на аграрную продукцию. М.

1981

257. Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства. - Тр. НИИ цен, с.31-35.
258. Функциональный анализ. - 2-е изд. Т.1-2. М.: Мир. - На франц. языке (совм. с Г.П.Акиловым).
259. Математическая модель ценообразования. - УМН, №5, с.203-204 (совм. с В.Л.Макаровым).

260. М.А.Красносельский (к 60-летию со дня рождения). - УМН, 36, с.215-219 (совм. с Н.Н.Боголюбовым).
261. Функциональный анализ. - М.: Мир. - На итал. яз. (совм. с Г.П.Акиловым).
262. Развитие экономико-математических методов и их использование. - Экономика и мат. методы, 17, с.811-813.
263. Выступление на конференции в Лобне. - Вопросы экономики, №9, с.150-153.
264. Цены и экономическая оценка. Выступление на Советско-американском симпозиуме. - Вопросы экономики, №9, с.154-158.
265. Математические модели ценообразования. - Доклад на Международ. конф. в Афинах (совм. с В.Л.Макаровым).
266. Цены и экономическая оценка ресурсов. - Доклад на симпозиуме "Государство и формирование цен в СССР и США". Алма-Ата. - Вопросы экономики, №9, с.155.

СПИСОК АВТОРСКИХ СВИДЕТЕЛЬСТВ И ПАТЕНТОВ НА ИЗОБРЕТЕНИЯ

- 1* . Функциональный преобразователь. Авторское свидетельство СССР №98671 от 03.10.50. - Бюлл. изобр., 1954, №7 (совм. с М.К.Гавуриным и В.Л.Эпштейном).
- 2* . Релейная клавишная машина для автоматического выполнения арифметических операций. Авторское свидетельство СССР И123762 от 29.03.56. - Бюлл. изобр., 1959, №21 (совм. с Ю.П.Петровым и Н.Н.Посновым).
- 3* . Вычислительная система, состоящая из универсальной цифровой вычислительной машины. Авторское свидетельство СССР № 172567 от 02.11.63. - Бюлл. изобр., 1965, № 13 (совм. с Я.И.Фетом).
- 4* . Сумматор для одновременного сложения нескольких двоичных слагаемых. Авторское свидетельство СССР от 15.03.65. - Бюлл. изобр., 1966, № 21 (совм. с Я.И.Фетом и И.В.Иловайским).
- 5* . Арифметическое устройство цифровой вычислительной машины. Авторское свидетельство СССР № 209032 от 10.05.65. - Бюлл.

- изобр., 1968, № 4 (совм. с Я.И.Фетом и И.В.Иловайским).
- 6*. Цифровое вычислительное устройство. Авторское свидетельство СССР № 300115 от 18.03.69 (совм. с В.П.Толстым и Я.И.Фетом).
- 7*. Устройство для умножения. Авторское свидетельство СССР № 409222 от 09.02.71. - Бюлл. изобр., 1973, №48 (совм. с В.П. Толстым и Я.И.Фетом).
- 8*. Электромеханическое запоминающее устройство. Авторское свидетельство СССР от 18.03.71. - Бюлл. изобр., 1974, № 17 (совм. с Б.И.Куликовым и Я.И.Фетом).
- 9*. *Rechenwerk* . Патент ГДР № 92143 от 20.10.71 (совм. с В.П.Толстым и Я.И.Фетом).
- 10*. *Digital serial arithmetic unit* . Патент США № 3758767 от 19.10.71 (совм. с В.П.Толстым и Я.И.Фетом).
- 11*. *An arithmetic unit* . Патент Великобритании № 1357598 от 09.11.71 (совм. с В.П.Толстым и Я.И.Фетом).
- 12*. *Divisions-Vorrichtung für ein serielles Vier-Species-Rechenwerk* . Патент ФРГ № 2150853 от 12.10.71 (совм. с В.П. Толстым и Я.И.Фетом).
- 13*. *Unita aritmetica* . Патент Италии № 937082 от 15.10.71 (совм. с В.П.Толстым и Я.И.Фетом).