Выпуск 27(44) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

О РАЗРЕШИМОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ПУЧКАМИ ОПЕРАТОРОВ

Ю.Ш.Абрамов

В работе [1] для одного класса оптимизационных задач, порожденных спектральными задачами, построена теория двойственности. Там же даны общие условия, при которых прямая и двойственная задачи связаны соотношением двойственности. Одно из них есть условие существования оптимальных векторов у двойственной задачи*). Этому вопросу и посвящена настоящая заметка. Здесь показано, что разрешимость двойственной задачи тесно связана с некоторым "алгебраическим" свойством набора симметричных операторов $L_1(\alpha_1), \ldots, L_k(\alpha_k)$, построенного по ограничениям прямой задачи (Λ -совместность задачи). Детализация этого свойства, с одной стороны, приводит к условиям типа условия Слейтера, с другой стороны - к условиям разрешимости системы уравнений $tr(L_i(\alpha_i)B)=0$, $i=1,\ldots,k$. В некоторых случаях возможно непосредственно по ограничениям прямой задачи делать вывод о разрешимости двойственной задачи. Так, например, если операторы $L_i(\alpha_i)$, $i=1,\ldots,k$, имеют нулевой след, то у двойственной задачи существует оптимальный вектор. Иногда удается получить и критерии разрешимости двойственной задачи. Здесь на примере задачи с одним ограничением - равенством - продемонстрирована связь этого вопроса с геометрией числовых областей набора операторов, связанного с задачей. Указана также связь изу-

*) При этих же условиях (см. [1], теорема 7) из разрешимости двойственной задачи следует разрешимость прямой задачи.

чаемого вопроса с вариационными свойствами спектра операторов.

I. Введем сначала некоторые необходимые определения и обозначения (подробнее см. [I–4]). Пусть H – гильбертово пространство над полем K -вещественных или комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$; $H_0 = H \setminus \{0\}$, S – множество всех ограниченных симметричных операторов в H, (c,d) – интервал вещественной оси R. Запись $A>0$ означает, что $A\in S$ и $(Ax,x)>0$, $x\neq 0$.

Непрерывный функционал $\rho: H_0 \to (c,d)$ называется функционалом Релея (ф.Р.), если он удовлетворяет следующим условиям:

α) $\rho(tx)=\rho(x)$, $t\in K\setminus\{0\}$, $x\in H_0$:

существует непрерывно дифференцируемая оператор-функция $L:(c,d)\to S$ такая, что

β) $(L(\rho(x))x,x)=0$;

γ) $(L'(\rho(x))x,x)>0$, $x\in H_0$.

Пучок операторов $L=L(\alpha)$, связанный с ρ согласно β)-γ), будем называть производящим пучком для ρ, а функционал ρ соответственно будем называть ф.Р. пучка L. Пара $\mathcal{R}=\{L,\rho\}$ называется системой Релея (с.Р.) на $(c,d)\times H$.

В частности, функционал $(Ax,x)/(Bx,x)$ при $B>0$ есть ф.Р., а линейный пучок $L(\alpha)=\alpha B-A$ является его порождающим. Другие примеры ф.Р. можно найти в [I–4].

Рассмотрим следующую (прямую) экстремальную задачу:

$$\rho(x)\to \sup,\ x\in V, \tag{I}$$

где множество допустимых векторов V имеет вид

$$V=\{x\in H_0 : \rho_i(x)\le\alpha_i,\ i=1,\dots,m;\ \rho_i(x)=\alpha_i,\ i=m+1,\dots,k\}.$$

Здесь ρ,ρ_i – ф.Р., α_i – постоянные, m и k – целые числа, $0\le m\le k$.

Построим, следуя [I], для задачи (I) двойственную задачу. Пусть L и L_i – производящие пучки для ф.Р. ρ и ρ_i, заданные соответственно на (c,d) и (c_i,d_i), $i=1,\dots,k$. Считаем (см. [I]), что $\mathcal{R}=\{L,\rho\}$ – простая на $[a,b]$ с.Р. и что $\alpha_i\in(c_i,d_i)$, $i=1,\dots,k$.

Для фиксированного $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in R^k$ введем пучок операторов

$$L(\alpha,\lambda)=\hat{L}(\alpha)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i L_i(\alpha_i),\ \alpha\in R,$$

где $\hat{L}$ – каноническое расширение пучка L на R. Для каждого

$x \neq 0$ функция $(L(\alpha,\lambda)x, x)$ имеет единственный вещественный корень $\rho(x,\lambda)$. Таким образом, вектор $\lambda \in R^k$ порождает с.Р. $\mathcal{R}_\lambda = \{L(\cdot,\lambda), \rho(\cdot,\lambda)\}$ на $R \times H$.

Двойственная функция $q(\lambda)$ вводится как наибольшая точка спектра с.Р. $\mathcal{R}_\lambda$. Двойственной к задаче (I) называется задача

$$q(\lambda) \longrightarrow \inf, \lambda \in \Lambda, \qquad (\text{П})$$

где множество допустимых векторов Λ имеет вид

$$\Lambda = \Lambda^{mk} = \{\lambda \in R^k : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

2. Скажем, что набор $\{A_1, \dots, A_k\}$ симметричных операторов в H является Λ -совместным, если для каждого $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ существует $x \in H$ такой, что

$$\lambda_1 (A_1 x, x) + \dots + \lambda_k (A_k x, x) > 0. \qquad (1)$$

Задачу (1) назовем Λ-совместной, если набор операторов $\{L_1(\alpha_1), \dots, L_k(\alpha_k)\}$ является Λ -совместным.

ТЕОРЕМА I. Если прямая задача является Λ -совместной, то двойственная задача имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tau[A]$ верхнюю грань значений квадратичной формы операторов $A \in S$ на единичной сфере пространства H. Для вектора $\lambda \in R^k$ положим

$$\tau(\lambda) = \tau[\lambda_1 L_1(\alpha_1) + \dots + \lambda_k L_k(\alpha_k)].$$

По условию теоремы функция $\tau = \tau(\lambda)$ строго положительна на $\Lambda \setminus \{0\}$ и, кроме того, она непрерывна на R^k. Поэтому существует вектор $\theta \subset \Lambda$ единичной длины $(\|\theta\|_k = 1)$, доставляющей ей минимум на множестве $\Lambda \cap \{\lambda : \|\lambda\|_k = 1\}$, причем $\tau(\theta) > 0$. В силу однородности функции τ

$$\tau(\lambda) \geq \|\lambda\|_k \, \tau(\theta), \lambda \in \Lambda. \qquad (2)$$

Фиксируем $\lambda \in \Lambda$ и выберем последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\|x_n\| = 1, n = 1, 2, \dots$ и

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (L_i(\alpha_i) x_n, x_n) \to \tau(\lambda). \qquad (3)$$

Поскольку $q(\lambda)$ есть верхняя грань $\rho(x,\lambda)$ по всем $x \neq 0$ (теорема I из [I]), то отсюда нетрудно вывести, что оператор $L(q(\lambda), \lambda)$ неотрицателен. В частности,

$$(L(q(\lambda), \lambda) x_n, x_n) =$$

$$=(\hat{L}(q(\lambda))x_n, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (L_i(\alpha_i)x_n, x_n) \geq 0.$$

Поэтому для любого n

$$r[\hat{L}(q(\lambda))] \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (L_i(\alpha_i)x_n, x_n).$$

Из (3) следует, что $r[\hat{L}(q(\lambda))] \geq r(\lambda)$. Отсюда и из (2) получим, что для любого $\lambda \in \Lambda$ справедливо неравенство

$$\|\lambda\|_k \leq r(\theta)^{-1} r[\hat{L}(q(\lambda))]. \qquad (4)$$

Обозначим через q^* нижнюю грань функции q на множестве Λ. Пусть $\{\lambda^n\} \subset \Lambda$, $q(\lambda^n) \to q^*$. В силу неравенства (4) и непрерывности функции из его правой части (заметим, что функция q непрерывна [I]), последовательность $\{\lambda^n\}$ ограничена. Теперь существование у задачи (П) оптимального вектора следует из непрерывности функции q.

Ниже считаем, что правая часть i-го ограничения задачи (I), т.е. α_i, принадлежит множеству единственности с.Р. $\mathcal{R}_i$, $i=1,\dots,k$ (см. [I]).

СЛЕДСТВИЕ I. Допустим, что $m=k$ и выполнено следующее условие:

$$\exists x_0 : p_i(x_0) < \alpha_i, \; i=1,\dots,k.$$

Тогда двойственная задача имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя некоторое расширение леммы Роджерса [4], можно доказать, что $(L_i(\alpha_i)x_0, x_0) > 0, i=1,\dots,k$. Отсюда, очевидно, следует, что задача (I) Λ^{kk}-совместна.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Допустим теперь, что задача (I) содержит только ограничения-равенства, т.е. $m=0$. В этом случае $\Lambda = \Lambda^{0k} = R^k$. Ясно, что задача (I) R^k-совместна тогда и только тогда, когда набор операторов $\{L_1(\alpha_1), \dots, L_k(\alpha_k)\}$ является индефинитным, т.е. для каждого $\lambda \in R^k \setminus \{0\}$ оператор $\lambda_1 L_1(\alpha_1) + \dots + \lambda_k L_k(\alpha_k)$ индефинитен (его квадратичная форма меняет знак). Используя результат Дини о характеристике индефинитного набора операторов [5] (см. также обзор [6]), из теоремы I получим следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Допустим, что $m=0$ и пространство H конечномерно. Если существует дефинитный оператор $B \in S$ такой, что

$$tr(L_i(\alpha_i)B) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

то двойственная задача имеет решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим один важный частный случай этого следствия: если

$$tr(L_i(\alpha_i)) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

то двойственная задача разрешима. Таким образом, в некоторых случаях по ограничениям прямой задачи непосредственно можно судить о разрешимости двойственной задачи. Кроме предыдущих двух результатов, можно привести и другие достаточные условия Λ-совместности задачи (I), но на этом мы здесь останавливаться не будем.

3. В предыдущем пункте приведены достаточные условия разрешимости задачи (П). Эти условия связаны лишь с ограничениями задачи (I) и поэтому они универсальны в том смысле, что они обеспечивают разрешимость двойственной задачи при любом целевом ф.Р. прямой задачи. Поэтому, конечно, они не являются необходимыми. В некоторых случаях, однако, удается получить и критерии разрешимости двойственной задачи. Здесь мы рассмотрим в этом направлении лишь один результат, далеко не исчерпывающий все случаи.

Пусть A и $B \in S$. Обозначим через $W(A,B)$ числовую область вектора операторов $\{A, B\}$:

$$W(A, B) = \{((Ax, x), (Bx, x)), \|x\| = 1\}.$$

Хорошо известно, что $W(A,B)$ - выпуклое множество, за исключением единственного случая, когда $K = R$ и $\dim H = 2$ (теорема Тёплица - Хаусдорфа). В последнем случае числовая область имеет выпуклую границу.

Положим

$$R^2_{\pm} = \{u = (u_0, u_1) : u_1 \geq 0\}.$$

В этом пункте считаем, что пространство H конечномерно и задача (I) имеет вид

$$(Ax, x)/(x, x) \to \sup, \quad x \in V, \tag{5}$$

где

$$V = \{x \in H_0 : p_1(x) = \alpha_1\}. \tag{6}$$

В этом случае пучок L линеен: $L(\alpha)=\alpha I-A$.

ЛЕММА I. Следующие условия эквивалентны:

I) $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} q(\lambda)=+\infty$;

2) оператор $L_1(\alpha_1)$ индефинитен;

3) $W(A,L_1(\alpha_1))\cap R^2_\pm \neq \phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2)$\Rightarrow$I). Пусть $(L_1(\alpha_1)x_+,x_+)>0$, $(L_1(\alpha_1)x_-,x_-)<0$. Можно считать векторы $x_\pm$ единичными. Для задачи (5) функция $p(x,\lambda)$ имеет вид.

$$p(x,\lambda)=p(x)+\lambda\frac{(L_1(\alpha_1)x,x)}{(x,x)}, \quad (7)$$

$$p(x)=(Ax,x)/(x,x).$$

Пусть $\lambda>0$, $\lambda\to\infty$. Теперь I) следует из соотношения

$$q(\pm\lambda)\geq p(x_\pm,\pm\lambda)=p(x_\pm)\pm\lambda(L_1(\alpha_1)x_\pm,x_\pm),$$

первая часть которого вытекает из вариационного описания функции q [I].

I)$\Rightarrow$2). Если $L_1(\alpha_1)\leq 0$, то $p(x,\lambda)\leq p(x)$ для $\lambda\geq 0$. Переходя к верхней грани по x в этом неравенстве и пользуясь вновь вариационной характеристикой для $q(\lambda)$, получим ограниченность сверху функции при $\lambda\geq 0$. Аналогично исключается случай $L_1(\alpha_1)\geq 0$. Эквивалентность условий 2) и 3) очевидна.

Обозначим через $\gamma=\gamma(V)$ оптимальное значение задачи (I).

ЛЕММА 2. Следующие условия эквивалентны:

I) $\exists\lambda^0\in R: q(\lambda)=q(\lambda^0),\ \lambda>\lambda^0$;

2) $L_1(\alpha_1)\leq 0$, причем $\exists t\in R: L(\gamma)+tL_1(\alpha_1)\geq 0$;

3) $W(A,L_1(\alpha_1))\cap R^2_+=\emptyset$, причем множество $W(A,L_1(\alpha_1))$ имеет вещественную угловую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2)$\Rightarrow$3). Из условия 2) легко следует, что $W(A,L_1(\alpha_1))$ принадлежит множеству

$$\{u: u_1\leq 0\}\cap\{u: u_0-tu_1\leq\gamma\}.$$

Пусть x_0 - оптимальный вектор прямой задачи, который существует, так как $\dim H<\infty$. В силу свойства α) ф.Р. можно считать, что $\|x_0\|=1$. Тогда $p(x_0)=\gamma$ и из леммы Роджерса $(L_1(\alpha_1)x_0, x_0)=\gamma$. Поэтому $(\gamma, 0)$ является угловой точкой множества $W(A, L_1(\alpha_1))$. Импликация 3)$\Rightarrow$2) проверяется аналогично.

I)$\Rightarrow$2). Если бы существовал x такой, что $(L_1(\alpha_1)x,x)>0$, то, как и при доказательстве леммы I, мы получили бы противоречие с I). Поэтому $L_1(\alpha_1)\leq 0$. Пусть вновь x_0 - оптимальный вектор задачи (I). Можно показать, что при условиях п.3 задачи (I)-(П) находятся в двойственности:

$$\max_V p(x) = \inf_R q(\lambda). \tag{8}$$

В условиях этого пункта функция q выпуклая. Отсюда на основании (8) заключаем, что $\gamma = q(\lambda^0)$. Поскольку $p(x,\lambda^0)\leq\gamma$ для всех $x\neq 0$, то из (7) $L(\gamma)-\lambda^0 L_1(\alpha_1)\geq 0$. Таким образом, выполнено 2) с $t=-\lambda^0$.

2)$\Rightarrow$I). Положим $\lambda^0=-t$, и пусть $\lambda>\lambda^0$; тогда для всех $x\neq 0$

$$p(x)\leq\gamma+t(L_1(\alpha_1)x,x)/(x,x).$$

Поэтому так как $L_1(\alpha_1)\leq 0$ и $\lambda>\lambda^0$, то

$$p(x,\lambda)=p(x)+\lambda(L_1(\alpha_1)x,x)/(x,x)\leq$$
$$\leq p(x)+\lambda^0(L_1(\alpha_1)x,x)/(x,x)\leq\gamma.$$

Отсюда $q(\lambda)\leq\gamma$ для $\lambda>\lambda^0$. Но в силу неравенства двойственности для всех λ выполнено противоположное неравенство. Отсюда и следует I).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подобный же результат справедлив, очевидно, когда в условиях I)-3) соответственно $\lambda<\lambda^0$, $L_1(\alpha_1)\geq 0$ и $W(A, L_1(\alpha_1))\cap R^2_-\neq 0$.

Из предыдущих результатов, а также из выпуклости функции q задачи (5) следует

ТЕОРЕМА 2. Для задачи (5) следующие условия I)-3) эквивалентны.

I) Двойственная задача имеет решение.

2) Выполнено одно из условий:

2_a) оператор $L_1(\alpha_1)$ не является индефинитным, но существует вещественное число t такое, что $L(\gamma)+tL_1(\alpha_1)\geq 0$.

3) Выполнено одно из условий:

$3_а$) $W(A, L_1(\alpha_1)) \cap R^2_{\pm} \neq \emptyset$;

$3_б$) условие $3_а$) не выполнено, но $W(A, L_1(\alpha_1))$ имеет вещественную угловую точку.

Рассмотрим еще более частную ситуацию, чем в п.3. Вновь для простоты предположим, что пространство H конечномерно. Пусть E - подпространство H и P - проектор (ортогональный) на него. Пусть, далее, в задаче (5) $p_1(x)=(Px,x)/ /(x,x)$ и $\alpha_1=0$. Очевидно, что в этом случае задача (5) примет следующую классическую форму:

$$(Ax,x)/(x,x) \longrightarrow \sup, \qquad (9)$$
$$Px=0, \; x\neq 0.$$

Поскольку здесь $L_1(\alpha_1)=-P\leq 0$, то из предыдущей теоремы вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для задачи (9) следующие условия эквивалентны:

I) двойственная задача имеет решение;

2) существует вещественное число t такое, что $L(\gamma)-tP\geq 0$;

3) числовая область $W(A,P)$ имеет вещественную угловую точку.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если задача, двойственная к задаче (9), имеет решение, то оптимальное значение γ прямой задачи является собственным значением оператора A, причем всякий оптимальный вектор задачи (9) есть собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 - оптимальный вектор задачи (9). Тогда $Px_0=0$ и $(L(\gamma)x_0,x_0)=0$. Поэтому для любого t

$$(L(\gamma)x_0,x_0)-t(Px_0,x_0)=0. \qquad (10)$$

В силу условия 2) и следствия 3 оператор $L(\gamma)-tP\geq 0$ для некоторого $t\in R$ Теперь из (10) следует, что

$L(\gamma)x_0 - tPx_0 = 0$. Поскольку $Px_0 = 0$, то $\gamma x_0 - Ax_0 = 0$.

Пусть $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_N$ – собственные значения оператора A (N – размерность H) и $x_1, x_2, \dots, x_N$ – ортонормированная система соответствующих им собственных векторов.

Заметим, что если $\dim E = n-1$, то согласно неравенству Вейля

$$\gamma(E) \geq \theta_n. \tag{11}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Если E – линейная оболочка $x_1, \dots, x_{n-1}$, то задача, двойственная к задаче (9), имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Q проектор на $E^{\perp}$. Имеем

$$(L(\gamma)x, x) = (L(\gamma)Px, Px) + 2Re(L(\gamma)Px, Qx) + (L(\gamma)Qx, Qx). \tag{12}$$

Поскольку операторы P и Q коммутируют с $L(\gamma)$ и $PQ = 0$, то второе слагаемое в правой части (12) равно нулю. Поскольку γ – оптимальное значение задачи (9), то $(L(\gamma)Qx, Qx) \geq 0$. Таким образом,

$$(L(\gamma)x, x) \geq (L(\gamma)Px, Px) = \gamma(Px, Px) - (APx, Px) \geq (\gamma(Px, Px) - \theta_1(Px, Px).$$

Поскольку $P^2 = P$, то выполнено условие 2) следствия 3, где $t = \gamma - \theta_1$. Поэтому двойственная задача имеет решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из предыдущих двух следствий видно, что если пространство E порождено первыми $n-1$ собственными векторами оператора A, то (11) равенство. Это есть ни что иное как вариационный принцип Релея. На этом пути могут быть доказаны вариационные принципы для собственных значений систем Релея (ср. с [2-4]). Отметим также, что результаты последних двух пунктов имеют свои естественные аналоги и в бесконечномерной ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. АБРАМОВ Ю.Ш. Двойственность в экстремальных задачах, порожденных спектральными задачами для пучков операторов. – Докл. АН СССР, 1980, т.255, № 4, с.777-780.
2. АБРАМОВ Ю.Ш. К теории нелинейных задач на собственные зна-

чения. - Докл. АН СССР, 1973, т.212, № 1, с. 11-14.
3. АБРАМОВ Ю.Ш. Вариационные свойства собственных значений некоторых задач, нелинейных относительно параметра. - Изв. АН АрмССР, 1974, т.11, № 1, с.23-39.
4. ROGERS E.H. A minimax theory for overdamped systems.- Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, v.16, p.89-96.
5. DINES L.L. On linear combinations of quadratic forms.- Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v.49, p.388-393.
6. UHLIG F. A recurring theorem about pair of quidratic forms and extensions: a survey.- Linear Algebra and its Appls., 1979, v.25, p.219-237.

Поступила в ред.-изд.отдел
27.01.1981 г.