Выпуск 27(44) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 517.5:519.865.3

МОНОТОННОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ОБМЕНА

В.И.Шмырев

Рассмотрение состояния равновесия в экономических моделях обмена в общем случае сводится к задаче о неподвижных точках некоторого многозначного отображения, порождаемого вектором несбалансированного спроса [1]. Наиболее продвинутые результаты в области численных методов нахождения состояний равновесия связаны с процедурами симплициальных разбиений [2-5], в основе которых лежит техника построения невозвращающихся траекторий, предложенная впервые в [6] для нахождения равновесия в биматричных играх и обобщенная впоследствии для различных постановок задач дополнительности [7]. Для простейшей линейной модели обмена в [8] был предложен конечный алгоритм, основанный на сведении исходной задачи к некоторой задаче дополнительности с последующим применением алгоритма [7]. Однако получающаяся при этом задача дополнительности имеет сравнительно большую размерность: порядка произведения числа участников на число продуктов модели.

В настоящей работе рассматриваются две постановки линейной задачи обмена с простейшей системой ограничений для каждого из участников (бюджетное ограничение и условия неотрицательности переменных). Эти постановки отличаются одна от другой тем, что в предположении положительности коэффициентов целевых функций каждый из участников в первой постановке задачи максимизирует свою целевую функцию, а во второй - минимизирует. Задачи обмена с минимизацией целевых функций участников рассматривались, например, в [9]. Но следует отметить, что в случае общей системы ограничений упомянутое различие не является существенным. Например, в случае двусторонних ограничений на переменные (вида $0 \leq x \leq b$) простой заменой переменных ($z = b - x$) мы от одной постановки переходим к другой. В рассматриваемом же случае это не так.

Для того чтобы различать рассматриваемые две постановки задачи обмена, мы в первом случае будем говорить о собственно задаче обмена, а во втором – о задаче кооперации. Для анализа этих задач вводится также некоторое многозначное отображение, неподвижные точки которого совпадают с точками равновесия в рассматриваемой модели. Однако для построения этого отображения использован иной подход, отличный от обычно используемого рассмотрения вектора несбалансированного спроса. Показывается, что получаемое отображение является кусочно-постоянным и обладает определенным свойством монотонности, которое кратко можно охарактеризовать так: в собственно задаче обмена речь идет об аналогах диссипативных отображений, а в задаче кооперации – об аналогах аккретивных отображений. Это говорит о принципиальном качественном различии рассматриваемых двух постановок задачи.

Конкретные алгоритмы для определения неподвижных точек получаемых многозначных кусочно-постоянных отображений в настоящей работе не рассматриваются. Однако положительное решение этого вопроса для кусочно-постоянных монотонных отображений [10] позволяет высказать некоторые гипотезы относительно аналогичных процедур и для рассматриваемых моделей.

I. Вспомогательная задача

Будем рассматривать модель обмена в слудующей постановке.

Каждый участник из множества $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ характеризуется двумя положительными векторами $c^i, d^i \in R^n$, которые при фиксированном векторе цен $p \in R^n_+$ определяют задачу участника

$$\begin{gathered}(c^i, x^i) - max! \\ (p, x^i) = (p, d^i),\ x^i \geq 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Вектор p называется равновесным вектором цен, если все задачи (1) разрешимы и среди их оптимальных векторов найдутся такие $\tilde{x}^i$, $i \in I$, что

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}^i = \sum_{i \in I} d^i. \tag{2}$$

Эта постановка отличается от обычно рассматриваемой заменой условия неотрицательности векторов c^i, d^i более сильным требованием их положительности. Это вызвано тем, что, стремясь показать существо предлагаемого подхода, мы не хотим обременять изложение возможными дополнительными трудностями, связанными со сводимостью модели [II].

Если в приведенном описании модели обмена требование максимизации в задачах (I) заменено требованием минимизации, то в этом случае будем говорить о модели кооперации. Хотя между этими двумя моделями, как будет видно из дальнейшего, имеется принципиальное качественное различие, наши последующие рассмотрения незначительно меняются при переходе от одной модели к другой. Поэтому мы ограничимся рассмотрением одной из них – модели кооперации. Необходимые изменения в изложении для модели обмена будут отмечены в конце работы.

Легко видеть, что равновесный вектор цен p будет лежать внутри R^n_+. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением векторов p из $Int\, R^n_+$, обозначая это множество для краткости через Ω. Не ограничивая общности, будем также считать

$$\sum_{i\in I} d^i_j = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Здесь d^i_j – компоненты векторов d^i. Множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через J.

Свяжем с моделью кооперации следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{i,j} z_{ij} \ln c^i_j - min! \qquad (4)$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in J} z_{ij} = (p, d^i),\ i\in I, \\ &\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j,\quad j\in J, \\ &z_{ij} \geq 0,\ (i,j)\in I\times J. \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь p – некоторый вектор из Ω, p_j – компоненты вектора p, c^i_j – компоненты вектора c^i.

Это транспортная задача параметрического программирования, в которой параметрами являются p_j, $j\in J$. Отметим, что ввиду условия (3) эта задача разрешима при любом $p\in\Omega$.

Для произвольного множества $\mathcal{B}\subset I\times J$ через $\Omega(\mathcal{B})$ будем обозначать множество таких $p\in\Omega$, при которых система линейных уравнений

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = (p, d^i), \ i\in I,$$
$$\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j, \qquad j\in J, \tag{6}$$
$$z_{ij} = 0, \qquad (i,j)\notin \mathcal{B},$$

имеет неотрицательное решение. Если $\mathcal{B}$ – базисное множество задачи (4)-(5), то $\Omega(\mathcal{B})$ – это множество тех $p\in\Omega$, при которых $\mathcal{B}$ является допустимым базисным множеством.

Через $\mathcal{L}$ обозначим совокупность двойственно-допустимых базисных множеств задачи (4)-(5). Так как эта задача разрешима при любом $p\in\Omega$, то совокупность множеств $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{L}$, образует покрытие множества Ω. Покажем, что это покрытие является в некотором смысле правильным.

Сопоставим каждому базисному множеству $\mathcal{B}$ базисный граф $\Gamma(\mathcal{B})$, задаваемый множеством вершин $V=\{1,2,\dots,m+n\}$ и множеством дуг $U=\{u_{ij}\in V\times V \mid u_{ij}=(i,m+j),(i,j)\in\mathcal{B}\}$. Подмножество $\hat{\mathcal{B}}$ базисного множества $\mathcal{B}$ будем называть накрывающим, если к каждой вершине $k\in V$ примыкает по крайней мере одна из дуг $u_{ij}\in U$ при $(i,j)\in\hat{\mathcal{B}}$, и минимальным накрывающим, если никакая собственная часть множества $\hat{\mathcal{B}}$ не является накрывающим множеством. Выделение в базисном множестве $\mathcal{B}$ накрывающих подмножеств эквивалентно выделению в базисном графе $\Gamma(\mathcal{B})$ накрывающих суграфов. Минимальным накрывающим множествам соответствуют минимальные накрывающие суграфы.

ЛЕММА I. Для любого базисного множества $\mathcal{B}$ задачи (4)-(5) множество $\Omega(\mathcal{B})$ не пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\mathcal{B}}$ – какое-либо минимальное накрывающее подмножество множества $\mathcal{B}$. Ясно, что из $\hat{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ следует $\Omega(\hat{\mathcal{B}})\subset\Omega(\mathcal{B})$ и, следовательно, достаточно показать, что $\Omega(\hat{\mathcal{B}})\neq\emptyset$.

Пусть $G_{\hat{}}$ – минимальный суграф графа $\Gamma(\mathcal{B})$, задаваемый множеством $\hat{\mathcal{B}}$. Каждая компонента связности графа G будет звездным графом, порождаемым некоторой вершиной графа $\Gamma(\mathcal{B})$. Пусть компонента связности порождается вершиной $i_o\in I$. Рассмотрим соответствующие дугам этой компоненты уравнения системы (6). Они таковы:

$$\sum_{j:(i_0,j)\in\hat{\mathcal{B}}} z_{i_0 j}=(p,d^{i_0}), \tag{7}$$

$$z_{i_0 j}=p_j \quad, (i_0,j)\in\hat{\mathcal{B}}. \tag{8}$$

Таким образом, для величин p_j получаем условие

$$\sum_{j:(i_0,j)\in\hat{\mathcal{B}}} p_j=(p,d^{i_0}). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь компоненту связности графа G, порождаемую вершиной $m+j_0,\ j_0\in J$. Этой компоненте соответствуют следующие уравнения системы (6):

$$z_{ij_0}=(p,d^i), (i,j_0)\in\hat{\mathcal{B}}, \tag{10}$$

$$\sum_{i:(i,j_0)\in\hat{\mathcal{B}}} z_{ij_0}=p_{j_0}. \tag{11}$$

Данная подсистема приводит к условию на величины p_j:

$$\sum_{(i,j_0)\in\hat{\mathcal{B}}} (p,d^i)=p_{j_0}. \tag{12}$$

Ясно, что каждое из уравнений системы (6) (не считая условий $z_{ij}=0, (i,j)\notin\mathcal{B}$) попадает в одну и только одну из систем вида (7)-(8) или (10)-(11). Необходимые и достаточные условия разрешимости этих систем задаются равенствами (9) и (12). Рассмотрим совокупность этих условий как систему уравнений относительно величин p_j. Вообще говоря, число неизвестных в этой системе больше числа уравнений. Введем подпространство $\Pi\subset R^n$, порождаемое следующим дополнительным условием: для вершин $m+j,\ j\in J$, принадлежащих одной компоненте связности графа G, соответствующие переменные p_j имеют одно и то же значение. (Ясно, что это требование автоматически выполняется для компонент связности, которые порождены какой-либо из вершин $m+j,\ j\in J$.)

Предполагая $p\in\Pi$, введем новые переменные, обозначив через π_k сумму всех p_j для k-й компоненты связности. Тогда упомянутая выше система однородных уравнений относительно неизвестных p_j перейдет в систему уравнений относительно неизвестных π_k, которая будет иметь вид

$$\pi=\tilde{D}\pi, \tag{13}$$

где π – вектор неизвестных π_k, а матрица $\tilde{D}$, как несложно показать, обладает тем же свойством, что и матрица величин d^i_j:

элементы матрицы $\tilde{D}$ положительны и сумма элементов в каждом столбце равна I. Это означает, что I является максимальным собственным числом матрицы $\tilde{D}$. По теореме Перрона этому собственному числу отвечает положительный собственный вектор $\hat{\pi}$, который и будет решением системы (I3). По вектору $\hat{\pi}$ однозначно определяется соответствующий вектор $\hat{\rho} \in R^n$, который ввиду положительности $\hat{\pi}$ также будет положительным и будет удовлетворять условиям (9) и (I2). Имея $\hat{\rho}$, по формулам (8) и (I0) определим величины $\hat{x}_{ij}$, $(i,j) \in \hat{\mathcal{B}}$, – также положительные.

Таким образом, нашлись положительные величины $\hat{x}_{ij}$, $(i,j) \in \hat{\mathcal{B}}$, удовлетворяющие системе (6) при $\rho = \hat{\rho} \in \Omega$ и $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}}$. Это означает, что $\hat{\rho} \in \Omega(\hat{\mathcal{B}})$, т.е. $\Omega(\hat{\mathcal{B}}) \neq \phi$, что и требовалось. Лемма доказана.

Для фиксированного базисного множества $\mathcal{B}$ система условий (6) однозначно определяет неизвестные x_{ij} как линейные однородные функции вектора параметров ρ: $x_{ij} = x_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho)$. Обозначим полиэдральный конус, задаваемый системой неравенств

$$x_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho) \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B},$$

через $K(\mathcal{B})$. Тогда $\Omega(\mathcal{B}) = K(\mathcal{B}) \cap \Omega$. Пересечения граней конуса $K(\mathcal{B})$ с множеством Ω будут являться гранями множества $\Omega(\mathcal{B})$.

ЛЕММА 2. Для любого базисного множества $\mathcal{B}$ задачи (4)-(5) множество $\Omega(\mathcal{B})$ телесно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать телесность полиэдрального конуса $K(\mathcal{B})$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что уравнения граничных гиперплоскостей конуса $K(\mathcal{B})$, проходящих через точку $\hat{\rho}$, которая рассматривалась в доказательстве предыдущей леммы, линейно-независимы. Эти уравнения имеют вид:

$$x_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho) = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B}_0, \tag{I4}$$

где $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \setminus \hat{\mathcal{B}}$. Линейная зависимость этих условий означает существование таких множителей λ_{ij}, $(i,j) \in \mathcal{B}_0$, что

$\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}_0} \lambda_{ij}^2 > 0$ и

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}_0} \lambda_{ij} x_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho) \equiv 0. \tag{I5}$$

Покажем, что такое допущение противоречиво.

Рассмотрим систему вида

$$-\alpha_i + \beta_j = 0, \ (i,j) \in \hat{\mathcal{B}}, \qquad (16)$$
$$-\alpha_i + \beta_j = \lambda_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B}_0.$$

Левая часть этой системы имеет такую же структуру, как и система для определения совокупности двойственных переменных (потенциалов) задачи (4)-(5) по данному базисному множеству $\mathcal{B}$. Решение этой системы определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Умножая уравнения приведенной системы на соответствующие им $\lambda_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho)$ и складывая, получим, ввиду (15),

$$0 \equiv -\sum_{i \in I} \alpha_i (\rho, d^i) + \sum_{j \in J} \beta_j \rho_j. \qquad (17)$$

Учитывая структуру правой части системы (16), легко видеть, что потенциалы вершин, лежащих на одной компоненте связности суграфа G, порождаемого множеством $\hat{\mathcal{B}}$, будут иметь одно и то же значение. Введем новые переменные, обозначая через μ_k общее значение потенциалов для вершин k-й компоненты связности. Сгруппируем теперь слагаемые правой части (17) по переменным μ_k. Получим

$$0 \equiv \sum_k \mu_k \Delta_k(\rho). \qquad (18)$$

При этом если k-я компонента связности порождается вершиной $i \in I$, то

$$\Delta_k(\rho) = \sum_{j:(i,j) \in \hat{\mathcal{B}}} \rho_j - (\rho, d^i).$$

Если же порождающей вершиной является вершина $m+j, j \in J$, то

$$\Delta_k(\rho) = \rho_j - \sum_{i:(i,j) \in \hat{\mathcal{B}}} (\rho, d^i).$$

Рассматривая теперь правую часть (18) на подпространстве Π, введенном при доказательстве предыдущей леммы, и переходя к переменным π_k, мы можем переписать (18) в виде

$$0 \equiv \mu (E - \tilde{D}) \pi,$$

где μ – вектор из компонент μ_k. Отсюда получаем

$$\mu = \mu \tilde{D}.$$

Учитывая свойства матрицы $\tilde{D}$ и применяя теорему Перрона, заключаем, что либо $\mu = 0$, либо $\mu > 0$. Но один из потенциалов может быть выбран произвольно, в частности равным нулю. Тем самым $\mu = 0$, что, как легко видеть, возможно лишь при условии $\lambda_{ij} = 0, (i,j)\in\mathcal{B}_o$. Это и требовалось получить. Лемма доказана.

Для введенной транспортной задачи (4)-(5) будем предполагать выполненным условие двойственной невырожденности: для любой совокупности пар вида

$$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_1)$$

имеет место

$$\ln c_{j_1}^{i_1} - \ln c_{j_2}^{i_1} + \ln c_{j_2}^{i_2} - \dots + \ln c_{j_k}^{i_k} - \ln c_{j_1}^{i_k} \neq 0.$$

При выполнении этого условия справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 3. Любые два из множеств $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}\in\mathcal{b}$, не имеют общих внутренних точек:

$$\Omega^\circ(\mathcal{B}_1)\cap\Omega^\circ(\mathcal{B}_2) = \emptyset, \ \mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСЬВО. Соотношение $\rho\in\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{b}$, эквивалентно тому, что $\mathcal{B}$ - оптимальное базисное множество задачи (4)-(5) при данном ρ. Если же $\rho\in\Omega^\circ(\mathcal{B})$, то это означает, что соответствующее оптимальное решение задачи (4)-(5) является невырожденным. Из условия двойственной невырожденности при этом следует единственность оптимального базисного множества задачи (4)-(5) при данном ρ. Тем самым, точка ρ не может принадлежать никакому другому множеству $\Omega(\mathcal{B}')$, $\mathcal{B}'\in\mathcal{b}$, $\mathcal{B}'\neq\mathcal{B}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Множества $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B}\in\mathcal{b}$, примыкают одно к другому правильным образом, т.е. любые два из них либо не имеют общих точек, либо их пересечение является гранью для каждого из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $q\in\Omega$. Пусть $\mathcal{B}$ - какое-либо из множеств семейства $\mathcal{b}$ такое, что $q\in\Omega(\mathcal{B})$. Точке q соответствует некоторое накрывающее множество $\mathcal{B}_q\subset\mathcal{B}$:

$$z_{ij}^{\mathcal{B}}(q) > 0, \ (i,j)\in\mathcal{B}_q. \qquad (19)$$

При этом уравнения

$$z_{ij}^{\mathcal{B}}(\rho) = 0, \ (i,j)\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_q, \qquad (20)$$

будут линейно-независимыми. Действительно, множество $\mathcal{B}_q$ содержит минимальное накрывающее подмножество $\hat{\mathcal{B}}$, которому соответствует, как было показано в лемме 2, система линейно-независимых уравнений (14), для которой система (20) будет являться подсистемой.

Ввиду условия двойственной невырожденности множество $\mathcal{B}_q$ будет одно и то же вне зависимости от выбора множества $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$, $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_q$. Тем самым, размерность грани множества $\Omega(\mathcal{B})$, содержащей точку q, также будет одна и та же для всех множеств $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathcal{b}^q$, содержащих данную точку q. Это и доказывает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы следует, что между гранями множества $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathcal{b}$, и накрывающими подмножествами множества $\mathcal{B}$ имеется взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое системой (20).

Резюмируем вышеизложенное в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Семейство множеств $\Omega(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ является правильным покрытием множества Ω, т.е.

1°) все множества $\Omega(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ телесны;

2°) любые два из этих множеств либо не пересекаются, либо их пересечение является гранью для каждого из них;

3°) объединение всех множеств $\Omega(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathcal{b}$, дает Ω.

§2. Кусочно-постоянное отображение, порождаемое моделью

Ясно, что вектор цен $p \in \Omega$ участвует в описании модели лишь с точностью до положительного множителя. Поэтому естественно было бы ограничиться рассмотрением точек p из внутренности симплекса

$$\sigma = \{p \in R_+^n \mid p = (p_1, \dots, p_n), \sum_j p_j = 1\}.$$

Однако это не всегда удобно при проведении выкладок. Иногда нам удобнее будет рассматривать точки $p \in \Omega$ как представителей соответствующих классов эквивалентности $\acute{p}$ (лучей), порождаемых таким отношением в $\Omega: p' \sim p'' \to p = tp'$, t - положительное число. Множество всех таких лучей обозначим через $\mathcal{P}$. Множества $\Omega(\mathcal{B}) \cap \sigma$ будем обозначать для краткости через $\Omega^\sigma(\mathcal{B})$, а точки $P \cap \sigma$ при $P \in \mathcal{P}$ - через P^σ. Используя введенные обозначения, можно переформулировать утверждение теоремы I: множества $\Omega^\sigma(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ образуют правильное покрытие множества σ°

В дальнейшем будем пользоваться терминологией комбинаторной топологии, рассматривая совокупность множеств $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$, и их всевозможных граней как полиэдральный комплекс ω и именуя элементы этой совокупности клетками. Аналогично, совокупность множеств $\Omega^\sigma(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$, порождает полиэдральный комплекс ω^σ.

Для краткости изложения совокупность всевозможных накрывающих подмножеств $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$, обозначим через $\hat{\mathcal{b}}$. Таким образом, комплекс ω - это совокупность множеств $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \hat{\mathcal{b}}$, а комплекс ω^σ - совокупность множеств $\Omega^\sigma(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \hat{\mathcal{b}}$.

Целью настоящего параграфа является построение кусочно-постоянного многозначного отображения F^σ из σ° в σ°, множество неподвижных точек которого будет совпадать с множеством равновесных векторов p, лежащих в σ°. Участками постоянства отображения F^σ будут являться клетки комплекса ω^σ. Область значений отображения F^σ задается некоторым отображением $\Phi: \mathcal{b} \to \sigma^\circ$, которое строится так.

Каждому множеству $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ соответствует определяемая с точностью до постоянного слагаемого совокупность потенциалов α_i, $i \in I$, и β_j, $j \in J$, удовлетворяющая условиям

$$-\alpha_i + \beta_j = \ln c_j^i, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{21}$$

$$-\alpha_i + \beta_j \leq \ln c_j^i, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}. \tag{22}$$

Тем самым, множеством $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ определяется с точностью до положительного множителя вектор $e^\beta = (e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_n}) \in \Omega$. Порождаемый этим вектором луч $P \in \mathcal{P}$ определяется множеством $\mathcal{B}$ уже однозначно. Будем обозначать его через $P(\mathcal{B})$. Отображение, сопоставляющее каждому $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ соответствующую лучу $P(\mathcal{B})$ точку $P^\sigma(\mathcal{B}) \in \sigma^\circ$, и есть требуемое отображение Φ.

Кусочно-постоянное отображение $F^{\sigma}: \mathfrak{S}^{\circ} \to \mathfrak{S}^{\circ}$ определяется по полиэдральному комплексу ω^{σ} и отображению Φ следующим образом: для произвольной клетки $Q^{\sigma} \in \omega^{\sigma}$ образом ее относительно внутренних точек $p \in Int\, Q^{\sigma}$ при отображении F^{σ} по определению считается выпуклая оболочка всех точек $\Phi(\mathcal{B}) \in \mathfrak{S}^{\circ}$, порождаемых теми из множеств $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$, при которых $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}) \supset Q^{\sigma}$:

$$F^{\sigma}: p \in Int\, Q^{\sigma} \to F^{\sigma}(p) = conv\{\Phi(\mathcal{B}) / \mathcal{B} \in \mathcal{L}, \Omega^{\sigma}(\mathcal{B}) \supset Q^{\sigma}\}. \quad (23)$$

Установим связь равновесных векторов цен модели с неподвижными точками введенного отображения F^{σ}. Как отмечалось выше, каждая клетка $Q \in \omega$ порождается некоторым множеством $\hat{\mathcal{B}} \in \hat{\mathcal{L}}: Q = \Omega(\hat{\mathcal{B}})$. С другой стороны, каждому такому $\hat{\mathcal{B}}$ можно сопоставить множество векторов $p \in \Omega$, компоненты которых при подходящих значениях y_i, $i \in I$, удовлетворяют такой системе уравнений и неравенств:

$$c_j^i = y_i p_j\ ,\quad (i,j) \in \hat{\mathcal{B}}, \quad (24)$$

$$c_j^i \geq y_i p_j\ ,\quad (i,j) \notin \hat{\mathcal{B}}. \quad (25)$$

Так как $\hat{\mathcal{B}}$ – накрывающее множество, то переменные y_i из (24)-(25) исключаются и приведенная система условий эквивалентна системе однородных уравнений и неравенств относительно переменных p_j, $j \in J$. Множество положительных решений этой системы обозначим через $\Xi(\hat{\mathcal{B}})$. Легко видеть, что $\Xi(\hat{\mathcal{B}})$ – пересечение однородного полиэдрального конуса с множеством Ω, и его крайними лучами являются лучи $P(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \supset \hat{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$. Это следует из того факта, что при $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ система (24)-(25) с точностью до замены переменных $p_j = e^{\beta_j}$, $y_i = e^{-\alpha_i}$ совпадает с системой (21)-(22).

Из изложенного следует, что для точек p из относительной внутренности клетки $Q^{\sigma} = \Omega^{\sigma}(\hat{\mathcal{B}})$, $\hat{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}$, образом при отображении F^{σ} будет множество $\Xi^{\sigma}(\hat{\mathcal{B}}) = \Xi(\hat{\mathcal{B}}) \cap \mathfrak{S}$.

Взяв теперь неподвижную точку $p \in \mathfrak{S}^{\circ}$ отображения F^{σ}, мы можем по совокупности величин $z_{ij}(p)$, образующих решение транспортной задачи (4)-(5), построить векторы $x^i(p)$ с компонентами $z_{ij}(p)/p_j$. Из условий $p \in \Omega^{\sigma}(\hat{\mathcal{B}})$ и $p \in \Xi^{\sigma}(\hat{\mathcal{B}})$, $\hat{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}_{\sigma}$, которые и означают, что p – неподвижная точка для F^{σ}, получим, что каждый вектор $x^i(p)$ является решением задачи соответствующего участника $i \in I$, и в то же время выполняется условие (2), т.е. p – вектор равновесных цен модели. Аналогично проверяется, что каждый вектор равновесных цен $p \in \in \sigma^*$ является неподвижной точкой отображения F^σ.

Отображение F^σ естественным образом порождает отображение $F: \Omega \to \Omega$. Для этого нужно перейти от клеток комплекса ω^σ к соответствующим клеткам комплекса ω и от точек $p^* \in \sigma^*$ к соответствующим лучам $p \in \mathcal{P}$. В результате можно сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Вектор p тогда и только тогда является вектором равновесных цен модели, когда соответствующая ему точка $p \in \Omega$ является неподвижной точкой отображения F.

§3. Монотонность отображения

В этом параграфе для введенного выше кусочно-постоянного отображения F^σ будет установлено свойство, являющееся естественным обобщением понятия монотонного кусочно-постоянного отображения в евклидовом пространстве [10] на случай нормированного пространства. При рассмотрении операторов в нормированных пространствах аналогичным понятием является понятие аккретивного оператора [11].

Будем говорить, что множества $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{b}$, а также соответствующие им множества $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$, $P(\mathcal{B}_1)$ и $P(\mathcal{B}_2)$ и т.д. являются соседними, если множества $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ отличаются лишь одним элементом. Для множеств $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$ это означает, что они имеют общую $(n-1)$-мерную грань. Установим связь множеств $P(\mathcal{B}_1)$ и $P(\mathcal{B}_2)$.

Базисные графы $\Gamma(\mathcal{B}_1)$ и $\Gamma(\mathcal{B}_2)$, отвечающие соседним множествам $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{b}$, будут иметь общий накрывающий субграф G, порождаемый множеством $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ и состоящий из двух компонент связности. Разбиению графа на две компоненты соответствует разбиение множества вершин V на непересекающиеся подмножества X и $\bar{X}$. Пусть для определенности $\mathcal{B}_2 = \{(i_2, j_2)\} \cup \mathcal{B}_1 \setminus \{(i_1, j_1)\}$, и через X обозначена та часть V, в которой находится вершина i_1. Определим двойственные переменные задачи (4)-(5) α_i, $i \in I$, и β_j, $j \in J$, соответствующие базисным множествам $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, фиксируя при этом $\alpha_{i_1}=0$. Легко видеть, что при этом будем иметь

$$\beta_j^{\mathcal{B}_1}=\beta_j^{\mathcal{B}_2},\ (m+j)\in X,$$
$$\beta_{j_1}^{\mathcal{B}_1}=\ln c_{j_1}^{i_1}$$

и, ввиду условия двойственной невырожденности,

$$\beta_{j_2}^{\mathcal{B}_2}<\ln c_{j_1}^{i_1}.$$

Таким образом,

$$\beta_{j_1}^{\mathcal{B}_1}=\beta_{j_1}^{\mathcal{B}_2}+\Delta,\ \Delta>0.$$

Ясно, что это влечет

$$\beta_{j_1}^{\mathcal{B}_1}=\beta_j^{\mathcal{B}_2}+\Delta,\ (m+j)\in\bar{X}. \tag{26}$$

Отсюда следует, что $i_2\notin X$. Иначе, повторяя те же рассуждения, но взяв за исходное множество $\mathcal{B}_2$ и вершину i_2, мы получили бы, аналогично (26), $\beta_j^{\mathcal{B}_2}=\beta_j^{\mathcal{B}_1}+\Delta',\ \Delta'>0$, для $(m+j)\in\bar{X}$, что противоречит (26).

Таким образом, $(m+j_2)\in X$. Обозначим через J_1 непустое собственное подмножество множества J, определяемое равенством

$$J_1=\{j\in J\,|\,(m+j)\in X\}.$$

Из (26) получаем, что векторы $\rho=e^{\beta}$, порождаемые $\beta^{\mathcal{B}_1}$ и $\beta^{\mathcal{B}_2}$, связаны следующим образом:

$$\rho_j^{\mathcal{B}_1}=\rho_j^{\mathcal{B}_2},\ \ j\in J_1, \tag{27}$$
$$\rho_j^{\mathcal{B}_1}=t\rho_j^{\mathcal{B}_2},\ j\in J\setminus J_1,$$

где $t>1$.

Равенства (27) и устанавливают связь между лучами $P(\mathcal{B}_1)$ и $P(\mathcal{B}_2)$ или, что то же самое, связь между точками $P^e(\mathcal{B}_1)$ и $P^e(\mathcal{B}_2)$. Покажем, что эта связь вполне определенным образом соответствует типу гиперплоскости, разделяющей множества $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$. Для этого, считая $z_{ij}=0$ при $(i,j)\notin\mathcal{B}_1$, просуммируем уравнения системы (5), соответствующие вершинам из X, умножая при этом уравнения $\sum_{j\in J}z_{ij}=(\rho,d^i)$ на -I. Легко видеть, что в результате получим

$$-z_{i_1j_1}=\sum_{j\in J_1}\rho_j-\sum_{i\in I\cap X}(\rho,d^i).$$

Запишем правую часть этого равенства кратко в виде (h,ρ), $h\in R^n$. Так как для $\rho\in\Omega(\mathcal{B}_1)$ должно выполняться $z_{i_1j_1}(\rho)\geq 0$, то

$$(h,\rho)\le 0,\ \rho\in\Omega(\mathcal{B}_1),$$
$$(h,\rho)\ge 0,\ \rho\in\Omega(\mathcal{B}_2).$$

При этом для компонент h_j вектора h будем иметь

$$h_j>0\ ,\ j\in J_1, \qquad (28)$$
$$h_j<0\ ,\ j\in J\sim J_1.$$

Сопоставляя (27) и (28), видим, что задание непустого собственного подмножества $J_1\subset J$ однозначно определяет как характер перехода из точки $P^0(\mathcal{B}_1)$ в точку $P^0(\mathcal{B}_2)$, так и тип нормали гиперплоскости, разделяющей множества $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$. Такая взаимосвязь расположений образов и праобразов характерна для монотонных отображений в пространстве со скалярным произведением. Напомним, что для монотонного отображения φ при любых x^1, x^2 выполняется

$$(\varphi(x^1)-\varphi(x^2),\ x^1-x^2)\ge 0,$$

и это свойство является определяющим для класса монотонных отображений. Для нормированных пространств обобщением понятия монотонного оператора является понятие аккретивного оператора [12]: требуется, чтобы нормаль гиперплоскости, разделяющей праобразы, являлась нормалью гиперплоскости, опорной к сфере пространства в точке, определяемой разностью образов. Покажем, что введенное отображение F^{σ} является в определенном смысле аккретивным. Для этого введем в множестве $\mathcal{G}^0$ определенным образом операции сложения и умножения на вещественный скаляр, а также норму, превращая его тем самым в линейное нормированное пространство.

Определим в множестве $\mathcal{P}$ операцию сложения, понимая под суммой $P_1\oplus P_2$ двух элементов $P_1, P_2\in\mathcal{P}$ луч $P\in\mathcal{P}$, порождаемый вектором ρ с компонентами

$$\rho_j=\rho_j^1\rho_j^2\ ,\ j\in J,$$

где ρ_j^1, ρ_j^2 – компоненты каких-либо представителей $\rho^1\in P_1$ и $\rho^2\in P_2$. Под произведением $t\odot P$ элемента $P\in\mathcal{P}$ на вещественное число t будем понимать луч $Q\in\mathcal{P}$, порождаемый вектором q, компоненты которого получаются возведением в степень t компонент какого-либо представителя $\rho\in P$:

$$q_j = p_j^t, \; j \in J.$$

Несложно проверить, что введенные таким образом операции над классами $P \in \mathcal{P}$ не зависят от выбора конкретных представителей этих классов. В результате множество $\mathcal{P}$ превращается в линейное множество. Роль нулевого элемента в этом множестве играет класс, содержащий точку $p=(1,1,\dots,1)\in R^n$. Несложно проверить также, что любой функционал $f(P)$ вида

$$f(P) = \sum_j \alpha_j \ln p_j \, , \tag{29}$$

где $p=(p_1,\dots,p_n)\in P$, а α_j – вещественные числа, сумма которых равна нулю, является линейным функционалом в множестве $\mathcal{P}$.

Рассмотрим линейные функционалы вида

$$\mu_{ij}(P) = \ln \frac{p_i}{p_j} \tag{30}$$

и введем норму

$$\|P\| = \max_{i,j\in J} \mu_{ij}(P),$$

превращая тем самым линейное множество $\mathcal{P}$ в нормированное пространство, которое мы будем обозначать через Σ. Легко видеть, что все аксиомы нормированного пространства выполняются.

Рассмотрим единичную сферу S в пространстве Σ:

$$S = \{P \in \mathcal{P} \mid \|P\| \le 1\}.$$

Это выпуклый многогранник в $\mathcal{P}$. Нас будут интересовать крайние точки этого многогранника.

ЛЕММА 5. Крайние точки множества S описываются системами вида

$$\mu_{ij}(P) = 1, \; (i,j)\in J_1 \times (J \setminus J_1), \tag{31}$$

где J_1 – непустое собственное подмножество множества J.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решением системы (31) будет элемент $P\in\mathcal{P}$, порождаемый точкой $p\in\Omega$ с координатами

$$\begin{aligned} p_j &= e, \quad j\in J_1, \\ p_j &= 1, \quad j \in J \setminus J_1, \end{aligned} \tag{32}$$

и, тем самым, $\mu_{ij}(P) \le 1$, $i,j\in J$. Кроме того, ранг системы

(3I) равен $n-1$. Это следует из таких рассуждений. Каждому функционалу μ_{ij} можно сопоставить вектор транспортного типа $A^{ij}=(-e_i+e_j)\in R^n$. Ясно, что линейная зависимость функционалов μ_{ij} эквивалентна линейной зависимости соответствующих векторов A^{ij}. Сопоставим системе (3I) граф с множеством вершин $\{1,2,\dots,n\}$ и множеством дуг $u_{ij}=(i,j)$, $i\in J_1$, $j\in J\setminus J_1$. Ясно, что этот граф содержит накрывающее дерево. Число дуг на этом дереве будет $n-1$ и соответствующие векторы A^{ij} будут линейно-независимы.

Таким образом, любая система вида (3I) задает некоторую крайнюю точку сферы S. Верно и обратное, т.е. если P - крайняя точка сферы S, то она должна задаваться некоторой системой вида (3I). Действительно, пусть P - крайняя точка S и

$$\mu_{ij}(P)=1,\ (i,j)\in U,$$
$$\mu_{ij}(P)<1,\ (i,j)\notin U,$$

где $U\subset J\times J$. Нужно показать, что $U=J_1\times(J\setminus J_1)$, где J_1 - некоторое непустое собственное подмножество множества J. Прежде всего, из $\mu_{ij}=-\mu_{ji}$ следует, что $U=J_1\times K$ и J_1, K - непустые собственные подмножества J, $J_1\cap K=\emptyset$. Вводя, как и выше, граф с множеством вершин J и множеством дуг U, легко видеть, что матрица из векторов A^{ij}, $(i,j)\in U$, тогда и только тогда будет иметь ранг $n-1$, когда полученный граф содержит накрывающее дерево, что эквивалентно равенству $K=J\setminus J_1$. Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению отображения F. Рассматривая два соседних множества $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\in\mathcal{L}$ и сопоставляя (27) и (3I), мы можем переписать формулы (27) в виде

$$P(\mathcal{B}_2)=P(\mathcal{B}_1)\oplus\tau\circ G. \qquad (33)$$

Здесь G - вершина сферы S, определяемая системой (3I), и при этом J_1 - то же самое, что и в (27), а параметр $\tau>0$ связан с t из (27) равенством $t=e^{\tau}$. Таким образом, направление перехода из $P(\mathcal{B}_1)$ в $P(\mathcal{B}_2)$ задается вершиной сферы S, однозначно определяемой множеством $\hat{\mathcal{B}}=\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2$. Покажем, что это направление в некотором смысле "перпендикулярно" общей грани множеств $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_2)$.

Множества $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$ разделяются гиперплоскостью $H\subset R^n$ с уравнением $(h,p)=0$, причем компоненты h_j

вектора h удовлетворяют (28). Множество $H \cap \Omega$, как совокупность лучей из Ω, является подмножеством в Σ, которое мы обозначим через H^{σ}. Аналогично, полупространство $H_{-} \subset R^{n}$, задаваемое неравенством $(h, \rho) \leq 0$, порождает соответствующее множество $H^{\sigma}_{-} \subset \Sigma$.

ЛЕММА 6. Для любого $\dot{P}^{\circ} \in H^{\sigma}_{-}$ ближайший элемент в H^{σ} (в метрике пространства Σ) находится среди элементов вида $P = P^{\circ} \oplus \gamma \circ G$, где $\gamma > 0$, а G – вершина сферы из формулы (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как заменой переменных $\rho_j' = P_j / P_j^{\circ}$ всегда можно свести рассмотрение к случаю, когда P° является нулевым элементом в Σ, то, не умаляя общности, ограничимся рассмотрением только этого случая. Ясно также, что достаточно рассмотреть случай $\gamma = 1$. Таким образом, требуется показать, что из $G \in H^{\sigma}$ следует $S \subset H^{\sigma}_{-}$.

Луч $G \in \mathcal{P}$ порождается точкой $\rho \in \Omega$ с координатами (32). Поэтому условие $G \in H^{\sigma}$ дает

$$e \sum_{i \in J_1} h_i + \sum_{j \in J \setminus J_1} h_j = 0. \tag{34}$$

Множество S, как совокупность лучей из Ω, задается системой неравенств

$$P_i / \rho_j \leq e, \quad i, j \in J. \tag{35}$$

Для доказательства включения $S \subset H^{\sigma}_{-}$ нужно показать, что неравенство $(h, \rho) \leq 0$, задающее множество $H_{-} \subset R^{n}$, является следствием тех условий системы (35), которые выполняются как равенства для точек ρ луча $G \subset R^{n}$, т.е. следствием совокупности неравенств

$$\rho_i - e\rho_j \leq 0, \quad (i, j) \in J_1 \times (J \setminus J_1).$$

Легко видеть, что требуемое утверждение равносильно существованию решений у системы уравнений и неравенств

$$\sum_{j \in J \setminus J_1} \delta_{ij} = h_i, \quad i \in J_1,$$
$$-e \sum_{i \in J_1} \delta_{ij} = h_j, \quad j \in J \setminus J_1,$$
$$\delta_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in J_1 \times (J \setminus J_1).$$

Это система ограничений транспортной задачи. Условие (34) представляет собой известное необходимое и достаточное условие ее совместности. Лемма доказана.

Таким образом, доказано следующее свойство кусочно-постоянного отображения F^{σ}: для любых двух соседних клеток $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_2)$ образы их внутренних точек при отображении F^{σ}, т.е. точки $P(\mathcal{B}_1)$ и $P(\mathcal{B}_2)$ из Σ, располагаются на "перпендикуляре" (в смысле леммы 6) к границе между клетками, и при этом направление $P(\mathcal{B}_2)\ominus P(\mathcal{B}_1)$ является направлением перехода через границу от $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_1)$ к $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_2)$. В этом и состоит свойство, которое естественно называть локальной монотонностью.

В заключение остановимся кратко на собственно задаче обмена, сформулированной в начале §I. Замена задачи минимизации для каждого участника задачей максимизации повлечет за собой замену требования минимизации требованием максимизации целевой функции во вспомогательной транспортной задаче (4)-(5). Это вызовет смену знака у величины τ в (33) на противоположный. В результате для порождаемого задачей обмена кусочно-постоянного отображения F^{σ} мы получим свойство, аналогичное приведенному выше для случая задачи кооперации, с той лишь разницей, что для соседних $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}$ направление $P(\mathcal{B}_2)\ominus$ $\ominus P(\mathcal{B}_1)$ будет направлением перехода от $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_2)$ к $\Omega^{\sigma}(\mathcal{B}_1)$.

Чтобы различать полученные два типа локальной монотонности, нам представляется естественным в случае задачи кооперации говорить о локально-возрастающем отображении, а в случае задачи обмена – о локально-убывающем отображении в нормированном пространстве.

Таким образом, все вышеизложенное можно резюмировать в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Кусочно-постоянное отображение F^{σ}, порождаемое задачей обмена, является локально-убывающим отображением, а порождаемое задачей кооперации – локально-возрастающим в нормированном пространстве Σ.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ДЕБРЁ Ж. Четыре аспекта математической теории экономического равновесия. – Успехи мат. наук, 1977, т.32, вып. 1(193), с.131-144.
2. SCARF H. The approximation of points of a continuous mapping.- SIAM J. Appl. Math., 1967, v.15, No 5, p.1328-1343.
3. SCARF H., HANSEN T. The computation of economic equilibria.- New Haven: Yale Univ. Press, 1973.
4. EAVES B.C. Homotopies for computation of fixed points.- Math. Progr., 1972, No 1, p. 1-22.
5. EAVES B.C. Properly labeled simplexes. – In: Studies in Optimization. MAA Studies in Mathematics, 10, G.B.Dantzig and B.C.Eaves, eds, Prentice-Hall, 1974.
6. LEMKE C.E., HOWSON J.T. Equilibrium points of bimatrix games. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1964, v.12, No 2, p.413-423.
7. LEMKE C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. – Manag. Sci., 1965, v.11, No 7, p.681-689.
8. EAVES B.C. A finite algorithm for the linear exchange model.- J. Math. Econ., 1976, v.3, no 2, p.197-203.
9. ГАВУРИН М.К. Алгоритмы построения равновесных цен в одной простой модели. – Вестник ЛГУ, 1977, № 7, вып. 2 с.32-43.
10. ШМЫРЕВ В.И. Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n. – ДАН, 1981, т.259, № 2, с. 299-301.
11. GALE D. The linear exchange model.- J. Math. Econom., 1976, v.3, No 2, p.205-209.
12. ВАЙНБЕРГ М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.04.1981 г.