Модели динамики и равновесия

УДК 519.2:519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛОГ МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ ФОН НЕЙМАНА – ГЕЙЛА: ТЕОРЕМА О ХАРАКТЕРИСТИКЕ

И.В.Евстигнеев

Исследуется вероятностная модификация модели фон Неймана – Гейла, предложенная в [1,2]. Основным результатом является теорема о характеристике для конечных траекторий.

Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_N$ – случайный процесс со значениями в измеримом пространстве S (параметры s_t можно трактовать, например, как состояния внешней среды, влияющей на экономику). Для каждого $t=1,\ldots,N$ задано множество $\mathcal{Z}_t$, элементами которого являются пары функций

$$(x(s^{t-1}),\ y(s^t)),$$

где

$$s^t=(s_0, s_1, \ldots, s_t).$$

Значения функций x и y принадлежат n-мерному евклидову пространству R^n.

Здесь и в дальнейшем все рассматриваемые функции от параметров $s_0,\ldots,s_N$ предполагаются измеримыми. Все соотношения между ними (равенства и неравенства) считаются выполненными почти наверное (п.н.).

Предполагается, что $\mathcal{Z}_t$ – выпуклый конус, и если $(x,y)\in\mathcal{Z}_t$, то $(x(s^{t-1}), y(s^t))\geqslant 0$ (неравенство понимается покоординатно). Кроме того, постулируется, что вместе с каждой парой (x,y) множество $\mathcal{Z}_t$ содержит все $(x'(s^{t-1}), y'(s^t))$ такие, что $x'=x$, $y'=y$ (п.н.).

Элементы $\mathcal{Z}_t$ интерпретируются как технологические процессы, осуществимые на интервале времени $(t-1, t)$: $x(s^{t-1})$ – вектор затрат, $y(s^t)$ – вектор выпуска [3].

Последовательность функций $\xi = \{x_0(s^0), x_1(s^1), \ldots, x_N(s^N)\}$ называется траекторией, если $(x_{t-1}, x_t) \in Z_t$, $t = 1, 2, \ldots, N$, и $x_t \in L^n_\infty(t)$, $t = 0, \ldots, N$. Запись $x \in L^n_\infty(t)$ (соответственно $x \in L^n_1(t)$) означает, что x – существенно ограниченная (соответственно интегрируемая) функция от s^t со значениями в R^n. Вектор функция x_0 называется начальным вектором траектории ξ.

Пусть $\psi(s^N, a)$ – неотрицательная функция от s^N и $a \in R^n_+$, $a \geq 0$, измеримая по совокупности своих аргументов. Скажем, что траектория $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N\}$ является рациональной (по отношению к целевой функции ψ), если для любой другой траектории $\{\bar{x}_0, x_1, \ldots, x_N\}$ с тем же начальным вектором справедливо неравенство

$$E\,\frac{\psi(s^N, x_N(s^N))}{\psi(s^N, \bar{x}_N(s^N))} \leq 1. \qquad (1)$$

Предполагается, что выражение в левой части (1) имеет смысл.

В детерминированном случае (S состоит из одной точки) условие (1) принимает форму

$$\frac{\psi(x_N)}{\psi(\bar{x}_N)} \leq 1.$$

Другими словами, $\psi(x_N) \leq \psi(\bar{x}_N)$ и, таким образом, $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N\}$ – траектория, максимизирующая значение ψ в последний момент времени.

При некоторых естественных предположениях будет показано, что траектория рациональна тогда и только тогда, когда она максимизирует

$$E \ln \psi(s^N, x_N(s^N)) \qquad (2)$$

(см. теорему 1). "Только тогда" очевидно: в силу неравенства Йенсена из (1) вытекает [ж)]

$$E \ln \frac{\psi(x_n)}{\psi(\bar{x}_n)} \leq \ln E\,\frac{\psi(x_n)}{\psi(\bar{x}_N)} \leq 0,$$

ж) Здесь и далее мы опускаем аргументы s^t, $t = 0, \ldots, N$, и пишем, например, $\psi(x_N)$ вместо $\psi(s^N, x_N(s^N))$ там, где это не может вызвать недоразумений.

откуда $E\ln\Psi(x_n)\le E\ln\Psi(\bar{x}_N)$(коль скоро указанные математические ожидания существуют).

Пусть $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ – некоторая траектория и $\{P_0, P_1, \dots, P_{N-1}\}$ – неотрицательные вектор-функции, $P_t \in L_1^n(t)$. Будем говорить, что последовательность $\{P_0, P_1, \dots, P_{N-1}\}$ является характеристикой траектории $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, если

$$P_t x_t = 1, \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \tag{3}$$

и

$$E(P_t x'_t / s^{t-1}) \le P_{t-1} x'_{t-1}, \; t = 1, \dots, N-1, \tag{4}$$

для любой траектории $\{x'_t\}$. Условие (4) означает, что случайный процесс $\{P_t x'_t\}$ является супермартингалом относительно семейства $\mathfrak{S}$-алгебр, порожденного процессом $\{s_t\}$.

Определение, введенное выше, обобщает понятие характеристики, известное в детерминированном случае (см., например, [4]). Несколько иная вероятностная модификация этого понятия рассматривалась в [I].

В дальнейшем считается фиксированным $\bar{x}_0 \in L^n_\infty(0)$, $\bar{x}_0 \geqslant 0$ и постулируются требования (А.I)-(А.6), перечисленные ниже.

Основной результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. Функционал $E\ln\Psi(x_N)$ достигает максимума на множестве траекторий $\xi = \{x_0, \dots, x_N\}$ с начальным вектором $x_0 = \bar{x}_0$.

Если траектория ξ максимизирует $E\ln\Psi(x_N)$, то она рациональна и обладает характеристикой $\{P_0, \dots, P_{N-1}\}$, удовлетворяющей дополнительному условию

$$E\left[\frac{\Psi(y)}{\Psi(x_N)} \Big/ s^{N-1}\right] \le P_{N-1} x, \quad (x, y) \in Z_N.$$

Перечислим предположения, при которых устанавливается теорема. Индекс t пробегает значения от I до N.

(А.I) Если $(x(s^{t-1}), y(s^t)) \in Z_t$ и $\lambda(s^{t-1})$ – неотрицательная скалярная функция от s^{t-1}, то $(\lambda(s^{t-1}) x(s^{t-1}), \lambda(s^{t-1}) y(s^t)) \in Z_t$.

(А.2) Существует такая константа K, что для любой пары $(x, y) \in Z_t$ справедливо неравенство $|y(s^t)| \le K \cdot |x(s^{t-1})|$, где $|z|$ означает сумму модулей координат вектора z.

(A.3) Если $(x,y)\in \mathcal{Z}_t,\ x'\geq x,\ 0\leq y'\leq y$, то $(x',y')\in \mathcal{Z}_t$ (свободное расходование).

(A.4) Существует последовательность

$$\mathring{x}_0, \mathring{y}_1, \mathring{x}_1, \mathring{y}_2, \ldots, \mathring{x}_{N-1}, \mathring{y}_N$$

и константа $\delta>0$, обладающие такими свойствами:

$$\bar{x}_0\geq \mathring{x}_0+\delta e,\ \mathring{y}_t\geq \mathring{x}_t+\delta e,\ \mathring{y}_N\geq \delta e, (\mathring{x}_{t-1},\mathring{y}_t)\in \mathcal{Z}_t,\ t=1,2,\ldots,N,$$

где $e=(1,1,\ldots,1)\in R^n$ (условие Слейтера).

(A.5) Если $(x^k(s^{t-1}),y^k(s^t))\in \mathcal{Z}_t$ и $x^k(s^{t-1})\to x(s^{t-1})$, $y^k(s^t)\longrightarrow y(s^t)$ (п.н.), то $(x(s^{t-1}),y(s^t))\in \mathcal{Z}_t$ (замкнутость конусов $\mathcal{Z}_t$ относительно сходимости п.н.).

(A.6) Функция $\Psi(s^N,a)$ обладает следующими свойствами:

а) $\Psi(s^N,\lambda a)=\lambda\Psi(s^N,a),\ \lambda\geq 0$;

б) $\Psi(s^N,a')\geq \Psi(s^N,a)$ при $a'\geq a$;

в) $\Psi(s^N,a)$ вогнута и непрерывна по a;

г) существуют константы $h>0$ и H, для которых $h\leq \leq\Psi(s^N,a)\leq H$ при $|a|=1,\ a\geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Как следствие теоремы получается известный для детерминированных моделей результат о том, что траектория, максимизирующая $\Psi(x_N)$, обладает характеристикой [4]. Это вытекает из эквивалентности задач максимизации $\ln\Psi(x_N)$ и $E\Psi(x_N)$. Однако в стохастической модели классы оптимальных траекторий, соответствующих функционалам $E\ln\Psi(x_N)$ и $E\Psi(x_N)$, вообще говоря, различны. Причем "логарифмическая форма" функционала существенна для справедливости утверждения о существовании характеристики. Так, в простейших примерах ($N=2$) легко убедиться в неосуществимости требования (3) для траекторий $\{x_t\}$, оптимальных в смысле $E|x_N|$. (Достаточно показать, например, что x_t могут принимать нулевые значения с положительной вероятностью.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимо отметить, что условие (A.I) не имеет аналогов в детерминированном случае и выделяет довольно узкий подкласс среди всех конусов $\mathcal{Z}_t$. С другой стороны, условия такого типа характерны для вероятностных моделей экономической динамики и проверяются для большинства "конкретных" моделей (Раднер, Жанжак и др., см. обзор в [3]). Типичный пример, когда выполнено (A.I), описывается следующим образом:

$$\mathcal{Z}_t=\{(x(s^{t-1}),y(s^t)):(x(s^{t-1}),y(s^t))\in Q_t(s^t) \quad (\text{п.н.})\},$$

где $Q(s^t)$ – функция от t, s^t, значениями которой являются конусы в $\{z: z\in\mathcal{R}^{2n}, z\geq 0\}$ (ср. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подход к построению стохастического аналога модели фон Неймана – Гейла, отличный от [1,2] и основанный на использовании марковских управлений, был предложен Раднером [6]. В [6] не ставилась цель получить результаты типа теоремы о характеристике, но отмечалась важная роль целевых функционалов вида (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.*) 1-й этап. Для $x\in L^n_\infty(N), x\geq 0$, положим $F(x)=E\ln\Psi(x)$. Функционал $F(x)$ принимает значения в $[-\infty,+\infty]$, вогнут и полунепрерывен сверху относительно сходимости п.н. на любом множестве, ограниченном в $L^n_\infty(N)$. Отсюда следует, что величина $F(x_N)$ достигает своей точной верхней грани $\bar{F}$ на множестве $\Pi(\bar{x}_0)$ траекторий $\xi=\{\bar{x}_0,x_1,\ldots,x_N\}$ с начальным вектором $\bar{x}_0$. В самом деле, рассмотрим вектор-функции

$$\xi^k(s^N)=(\bar{x}_0(s^0),x_1^k(s_1),\ldots,x_N^k(s^N))\in\Pi(\bar{x}_0)$$

(принимающие значения в $R^{(N+1)n}$) такие, что $F(x_N^k)\longrightarrow\bar{F}$. В силу (А.2) $|\xi^k|\leq const$, поэтому вследствие теоремы Комлоша (см. [7] или [3], Д.III) для некоторой последовательности $k_1<k_2<\ldots$ и некоторого $\bar{\xi}(s^N)=(\bar{x}_0(s^0),\ldots,\bar{x}_N(s^N))$

$$\frac{1}{m}\left[\xi^{k_1}(s^N)+\ldots+\xi^{k_m}(s^N)\right]\longrightarrow\bar{\xi}(s^N). \quad (\text{п.н.})$$

При этом $\bar{\xi}\in\Pi(\bar{x}_0)$ (см. (А.5)), и

$$F(\bar{x}_N)\geq\overline{\lim}\,F\left(\frac{x_N^{k_1}+\cdots+x_N^{k_m}}{m}\right)\geq\overline{\lim}\,\frac{1}{m}\left[F(x_N^{k_1})+\cdots+F(x_N^{k_m})\right]=\bar{F}.$$

Следовательно, $F(\bar{x}_m)=\bar{F}$.

2-й этап. Пусть $\bar{\xi}=\{\bar{x}_0,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_N\}$ – траектория, максимизирующая F. Положим $y_0=\bar{x}_0$ и рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$E\ln z_N\to\max, \qquad (5)$$

$$(x_0,y_1)\in\mathcal{Z}_1,\ldots,(x_{N-1},y_N)\in\mathcal{Z}_N, \qquad (6)$$

$$y_t\geq x_t,\ t=0,\ldots,N-1,\ \Psi(y_N)\geq z_N. \qquad (7)$$

Здесь максимум берется по всем $x_t\in L^n_\infty(t)$, $0\leq t\leq N-1$, $y_t\in L^n_\infty(t)$, $1\leq t\leq N$, и $0\leq z_N\leq L^1_\infty(N)$, удовлетворяющим ог-

*) В доказательстве используются соображения, близкие к [3], гл.II, § 4.

раничениям (6), (7). Вследствие (А.3), (А.6б) этот максимум достигается при $x_t = y_t = \bar{x}_t$, $\tau_N = \bar{\tau}_N \equiv \psi(\bar{x}_N)$. Заметим также, что $E\ln \bar{\tau}_N > -\infty$ в силу (А.4).

Применим к задаче (5)-(7) теорему Куна -Таккера (нужный вариант этой теоремы имеется в [8] или в [3], Д.III). Условия (А.4), (А.6) обеспечивают выполнение условия Слейтера для задачи (5)-(7), и, следовательно, существуют такие линейные функционалы $\pi_t \in [L^n_\infty(t)]^*$, $0 \le t \le N-1$, и $\pi_N \in [L^1_\infty(N)]^*$, что $\pi_t \ge 0$, $t = 0, \dots, N$, и

$$\sum_0^{N-1} \langle \pi_t, y_t - x_t \rangle + \langle \pi_N, \psi(y_N) - \tau_N \rangle + E\ln \tau_N \le E\ln \bar{\tau}_N \qquad (8)$$

при ограничениях (6).

3-й этап. В соответствии с теоремой Иосиды - Хьюитта ([9], см. также [3], Д.III) каждый из функционалов π_t можно представить в виде

$$\pi_t = \pi_t^a + \pi_t^s, \quad \pi_t^a \ge 0, \pi_t^s \ge 0,$$

где π_t^a и π_t^s обладают следующими свойствами:

(а) существует интегрируемая функция $\rho_t \ge 0$ такая, что $\pi_t^a(x) = E\rho_t x$;

(б) существуют события $\{\Gamma_t^k\}, k=1,2\dots$, зависящие от s^t, для которых: $\Gamma_t^1 \supseteq \Gamma_t^2 \supseteq \dots$; $P(\Gamma_t^k) \to 0$ при $k \to \infty$; $\pi_t^s(\chi_{\Gamma_t^k} x) = \pi_t^s(x)$ (χ_Γ - функция, равная I на Γ и 0 вне Γ).

Покажем, что в (8) можно заменить π_t на π_t^a. Воспользуемся индукцией. Пусть (8) справедливо с π_i^a вместо π_i при $i = t+1, \dots, N$. Возьмем какую-либо последовательность вещественных чисел $\varepsilon_k > 0$, для которой $\varepsilon_k \to 0$, $P(\Gamma_t^k)\ln\varepsilon_k \to 0$, и положим $x_i^k = \varepsilon_k x_i$ на Γ_t^k и $x_i^k = x_i$ вне Γ_t^k. Аналогичным образом (заменой x_i на y_i и τ_N) определим y_i^k и τ_N^k. В силу (А.I) и предположения индукции

$$\begin{aligned} E\ln \tau_N^k &+ \sum_{i=0}^{t-1} \langle \pi_i, y_i - x_i \rangle + \langle \pi_t^a, y_t - x_t^k \rangle + \\ &+ \langle \pi_t^s, y_t - x_t^k \rangle + \sum_{i=t+1}^{N-1} \langle \pi_i^a, y_i^k - x_i^k \rangle + \\ &+ \langle \pi_N^a, \psi(y_N^k) - \tau_N^k \rangle \le E\ln \bar{\tau}_N, \end{aligned} \qquad (9)$$

причем

$$E\ln \tau_N^k = E\ln \tau_N + P(\Gamma_t^k)\ln\varepsilon_k \to E\ln \tau_N,$$

$$\langle \pi_t^s, y_t - x_t^k \rangle \geq -\langle \pi_t^s, x_t^k \rangle = -\varepsilon_k \langle \pi_t^s, x_t \rangle \to 0,$$

когда $k \to \infty$. Переходя к пределу в (9), получаем, что в (8) можно заменить π_i на π_i^a при $i = t, \ldots, N$. Первый шаг индукции проводится с помощью аналогичного рассуждения.

4-й этап. Итак, построены $p_t \in L_1^r(t)$, $0 \leq t \leq N$, и $p_N \in L_1^1(N)$ такие, что $p_t \geq 0$, $t = 0, \ldots, N$, и

$$E \ln r_N + \sum_0^{N-1} E p_t (y_t - x_t) + E p_N (\psi(y_N) - r_N) \leq E \ln \bar{r}_N \tag{10}$$

при ограничениях (6). Покажем, что функции $p_0, \ldots, p_{N-1}$ обладают свойствами, описанными в теореме I. Прежде всего, из (10) следует

$$E p_t y - E p_{t-1} x \leq E p_t \bar{x}_t - E p_{t-1} \bar{x}_{t-1} \tag{11}$$

для всех существенно ограниченных функций $(x, y) \in Z_t$, $1 \leq t < N$. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в левой части (10)

$$x_i = \bar{x}_i, \ i \neq t-1; \ y_i = \bar{x}_i, \ i \neq t,$$

$$r_N = \bar{r}_N, \ x_{t-1} = x, \ y_t = y.$$

Аналогично,

$$E p_N \psi(y) - E p_{N-1} x \leq E p_N \psi(\bar{x}_N) - E p_{N-1} \bar{x}_{N-1}; \tag{12}$$

$$E \ln r_N - E p_N r_N \leq E \ln \bar{r}_N - E p_N \bar{r}_N. \tag{13}$$

Поскольку Z_t - конусы, неравенства (11) и (12) останутся справедливыми, если (x, y) умножить на любую положительную константу. Отсюда

$$E p_t y - E p_{t-1} x \leq 0; \ E p_N \psi(y) - E p_{N-1} x \leq 0. \tag{14}$$

Далее, пользуясь этими неравенствами, а также (11) и (12), находим

$$E p_N \psi(\bar{x}_N) = E p_{N-1} \bar{x}_{N-1} = \ldots = E p_0 \bar{x}_0. \tag{15}$$

Теперь, учитывая, что (14) сохраняется при умножении (x, y) на любую функцию $\lambda \in L_\infty^1(t-1)$, $\lambda \geq 0$, имеем $E p_t y \cdot \lambda \leq E p_{t-1} x \cdot \lambda$. В силу элементарных свойств условных математических ожиданий $E p_{t-1} x \cdot \lambda \geq E p_t y \cdot \lambda = E[E(p_t y \cdot \lambda \mid s^{t-1})] = E[\lambda \cdot E(p_t y \mid s^{t-1})]$. Таким образом (аналогичные рассуждения применимы и ко второму неравенству в (14), заключаем:

$$E[p_t y \mid s^{t-1}] \leq p_{t-1} x \quad [E(p_N \psi(y) \mid s^{N-1}) \leq p_{N-1} x] \tag{16}$$

для $(x,y)\in \mathcal{Z}_t$ $[(x,y)\in \mathcal{Z}_N]$. Отсюда и из (I5):

$$E(p_t\bar{x}_t \mid s^{t-1})=p_{t-1}\bar{x}_{t-1};\ E(p_N\psi(\bar{x}_N)\mid s^{N-1})=p_{N-1}\bar{x}_{N-1}. \quad (I7)$$

Выведем из (I3) равенство:

$$p_N=\frac{1}{\bar{r}_N}\ . \quad (I8)$$

Заметим сперва, что $p_N>0$. Действительно, если $p_N=0$ на множестве Γ положительной вероятности, то при достаточно больших M неравенство (I3) не выполняется для $r_N=1+M\chi_\Gamma$. Далее, подставив в (I3)

$$r_N=(p_N+\varepsilon)^{-1},\ 0<\varepsilon<1,$$

находим

$$E\Big[\ln\frac{1}{p_N+\varepsilon}-\frac{p_N}{p_N+\varepsilon}\Big]\leq E[\ln\bar{r}_N-p_N\bar{r}_N]. \quad (I9)$$

Имеем

$$\ln\frac{1}{p_N+\varepsilon}\geqslant\ln\frac{1}{p_N+1}\geqslant -p_N,$$

$$\frac{p_N}{p_N+\varepsilon}\leqslant 1,$$

и, значит, выражение под знаком математического ожидания в левой части (I9) оценивается снизу интегрируемой величиной $-p_N-1$. Поэтому, воспользовавшись леммой Фату и положительностью p_N, получаем

$$E\Big[\ln\frac{1}{p_N}-1\Big]\leq E[\ln\bar{r}_N-p_N\bar{r}_N].$$

Это соотношение вместе с элементарным неравенством

$$\ln\frac{1}{p}-1\geqslant\ln r-pr,\ p>0,\ r>0,$$

дает

$$\ln\frac{1}{p_N}-1=\ln\bar{r}_N-p_N\bar{r}_N.$$

Последнее возможно лишь при выполнении (I8).

Теперь в силу (I7)

$$p_{N-1}\bar{x}_{N-1}=E\Big[\frac{\psi(\bar{x}_N)}{\bar{r}_N}\Big| s^{N-1}\Big]=1,$$

и, стало быть,

$$p_0\bar{x}_0=p_1\bar{x}_1=\ldots=p_{N-1}\bar{x}_{N-1}=1.$$

Свойство

$$E\Big[\frac{\psi(y)}{\psi(\bar{x}_N)}\Big| s^{N-1}\Big]\leq p_{N-1}x \quad (20)$$

для существенно ограниченных $(x,y)\in \mathcal{Z}_N$ немедленно следует из (I6) и (I8). Для произвольных $(x,y)\in \mathcal{Z}_N$ граничное условие (20) устанавливается предельным переходом от

$$(x^M, y^M) = \chi_{\{|x|\le M\}}(x,y)\in \mathcal{Z}_N$$

при $M \to \infty$.

Итак, показано, что траектория $\{\bar{x}_t\}$, максимизирующая $E\ln\Psi(x_N)$, обладает характеристикой со свойством (20). Отсюда следует рациональность $\{\bar{x}_t\}$. В самом деле, для $\{x_t\}\in$ $\in \Pi(\bar{x}_0)$

$$E\frac{\Psi(x_N)}{\Psi(\bar{x}_N)} \le E p_{N-1} x_{N-1} \le \ldots \le E p_1 x_1 \le E p_0 \bar{x}_0 = 1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. EVSTIGNEEV I.V., KABANOV Yu.M. A stochastic modification of the von Neumann - Gale model of an expanding economy: a turnpike theorem.- Report No 359, Institute of Computer Science PAN, Warszawa, 1979.

2. ЕВСТИГНЕЕВ И.В., КАБАНОВ Ю.М. О вероятностной модификации модели фон Неймана - Гейла. - Успехи мат. наук, I980, т. 35, № 4, с. I85-I86.

3. АРКИН В.И., ЕВСТИГНЕЕВ И.В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. - М.: Наука, I979.

4. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, I973.

5. KUZNECOV S.E. Weakly optimal programs in models with changing technology. - In: Mathematical Models in Economics. Amsterdam - London - N.Y. - Warszawa, PWN - North Holland, 1974, p. 259-269.

6. RADNER R. Balanced stochastic growth at the maximum rate.- Z.Nationalökonomie, 1971, Suppl. No 1, p.39-52.

7. KOMLOS J. A generalization of a problem of Steinhaus.- Acta math. Acad. sci. Hung., 1967, v.18, p.217-229.

8. ГУРВИЦ Л. Программирование в линейных пространствах. - В кн.: Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, I962, с.65-I55.

9. YOSIDA K., HEWITT E. Finitely additive measures. - Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v.72, p.46-66.

Поступила в ред.-изд. отдел
22.05.1980 г.