Выпуск 27(44) О П Т И М И З А Ц И Я 1981 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 519.8

ИГРА ЛУКАСА НЕ ИМЕЕТ Н-М-РЕШЕНИЯ В H-ДЕЛЕЖАХ

В.А.Васильев

Понятие H-дележей кооперативной игры введено в [1]. Исследование для этого класса дележей традиционных в теории кооперативных игр вопросов существования ядра и Н-М-решения сводится к изучению таких задач в соответствующем семействе игр без побочных платежей (см. [2]). Условия существования и описание ядер этих игр даны в работах [2,3]. Настоящая заметка посвящена второму из упоминавшихся вопросов: существует ли Н-М-решение для каждой игры рассматриваемого класса? Поскольку классические дележи, не являющиеся H-дележами, доминируются последними (см. предложение 1.1 ниже), возникают определенные основания полагать, что H-дележи допускают Н-М-решения (в обычном смысле) для всех кооперативных игр с побочными платежами. В работе показано, что оба эти вопроса имеют отрицательное решение. Интересно, что нужные примеры в том и другом случае дает известная игра Лукаса [4], не имеющая Н-М-решения в классических дележах. В работе предлагается также понятие обобщенного Н-М-решения и устанавливается, что все кооперативные игры с побочными платежами обладают этим решением.

1. Введем необходимые понятия. Через $V=V(N)$ обозначим совокупность всех кооперативных игр с побочными платежами (к.и.) на некотором конечном множестве N. Напомним, что элементы $V(N)$ представляют из себя функции $v: 2^N \to R$, удовлетворяющие условию $v(\emptyset)=0$. Для к.и. $v \in V$ положим

$$P=\{[p_{i,\omega}]_{i\in\omega}^{\omega\subseteq N} \mid p_{i,\omega}\in R_+, \sum_{i\in\omega} p_{i,\omega}=1, i\in\omega\subseteq N\}$$

и зададим функцию $x_v : P \to R^N$ по формуле

$$(x_v(p))_i = \sum_{\omega / i\in\omega} p_{i,\omega}\cdot v_\omega,\ i\in N,$$

где v_ω определяется из (единственного) решения системы уравнений

$$v(S)=\sum_{\omega\subseteq S} v_\omega,\ S\subseteq N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I [I]. Элементы множества $A(v)=\{x_v(p) \mid p\in P\}$ называются H-дележами к.и. v.

В векторном пространстве выделим конус $V_+=\{v\in V \mid v_\omega\geq 0, \omega\subseteq N\}$ вполне положительных функций и для каждого $v\in V$ через v^- обозначим отрицательную вариацию v:

$$v^-(S)=\sum_{\omega\subseteq S} v^-_\omega,\ S\subseteq N,$$

где $v^-_\omega = max\{-v_\omega, 0\}$. Далее, для $v\in V$, $x\in R^N$, S, $T\subseteq N$ положим

$$v_{(1)}(S)=\sum_{i\in S} v(\{i\}),\ \ x(S)=\sum_{i\in S} x_i,$$

$$v_2(S,T)=v(S\cup T)-v(S)-v(T),$$

$$v_H(S)=v(S)-(v^-)_2(S, N\setminus S),$$

$$\bar v_H(S)=v_{(1)}(S)+max\{(v-v_{(1)})_H(S') \mid S'\subseteq S\},$$

$$I(v)=\{x\in R^N \mid x(N)=v(N), x(S)\geq v_{(1)}(S), S\subseteq N\},$$

$$C(v)=\{x\in I(v) \mid x(S)\geq v(S), S\subseteq N\}.$$

Напомним, что последнее множество называется C-ядром к.и. v, а элементы $I(v)$ - индивидуально-рациональными дележами к.и. v.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2 [I]. Индивидуально-рациональными H-дележами к.и. v будем называть элементы множества

$$A^+(v)=A(v)\cap I(v).$$

Полезным при изучении многих вопросов, касающихся множества $A^+(v)$, является следующее двойственное описание, установленное в [1]:

$$A^+(v)=C(\bar{v}_H). \qquad (1.1)$$

Формулировку основного в этой работе понятия Н-М-решения (решения Неймана - Моргенштерна) удобнее привести в терминах так называемых абстрактных игр (а.и.). Пусть A - некоторое множество, $\prec$ - бинарное отношение на A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Систему $\Gamma=(A,\prec)$ будем называть а.и. Пусть $\Gamma=(A,\prec)$ - некоторая а.и. Пусть $A',A''\subseteq A$. Введем обозначения

$$\mathcal{D}om_{\prec}A'=\{x\in A\,|\,\exists y\in A'(x\prec y)\},$$

$$A'\prec A''\Longleftrightarrow A'\subseteq \mathcal{D}om_{\prec}A''.$$

ОПРЕДЕЛЕЛЕНИЕ 1.4. Множество $A_0\subseteq A$ называется Н-М-решением а.и. $\Gamma=(A,\prec)$, если выполняются следующие условия:

а) $A\setminus A_0\prec A_0$;

б) никакие два различных элемента из A_0 не находятся в отношении $\prec$.

В работе наряду с классическим отношением доминирования $\prec_v$

$$x\prec_v y\Longleftrightarrow \exists S\subseteq N\{[\forall_i\in S(x_i<y_i)]\&[y(S)\leq v(S)]\}$$

рассматривается бинарное отношение $\prec\!\prec_v$

$$x\prec\!\prec_v y\Longleftrightarrow \exists S\subseteq N\{[\forall_i\in S(x_i<y_i)]\&[\exists z\in A(v^S)(y^S\leq z)]\},$$

введенное в [3] (выше использовались обычные сокращения: y^S - сужение $y\in R^N$ на S, v^S - сужение v на 2^S, $y^S\leq z\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow\forall i\in S\ (y_i\leq z_i)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Н-М-решением в H-дележах игры $v\in V$ будем называть Н-М-решение а.и. $(A^+(v),\prec\!\prec_v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Слабым Н-М-решением в H-дележах игры $v\in V$ будем называть Н-М-решение а.и. $(A^+(v),\prec_v)$.

В заключение этого пункта докажем одно важное свойство H-дележей, состоящее в том, что последние в определяемом ниже смысле "лучше" других элементов из $I(v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Для любой к.и. $v\in V$ справедливо соотношение

$$I(v)\setminus A^+(v)\prec_v A^+(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $I(v)=v_{(1)}+I(v-v_{(1)})$,

$A^+(v)=v_{(1)}+A^+(v-v_{(1)})$, можно, не уменьшая общности, считать $v_{(1)}=0$. Пусть y - произвольный элемент из $I(v)\setminus A^+(v)$. Тогда, в силу (I.I), семейство $\mathcal{T}=\{S\subseteq N \mid y(S)<\bar{v}_H(S)\}$ непусто. Рассмотрим какую-нибудь минимальную (по включению) коалицию $S_0\in\mathcal{T}$. Ясно, что $\bar{v}_H(S_0)=v_H(S)$. Действительно, в противном случае найдется $S_0'\subseteq S_0$, для которой $v_H(S_0)<v_H(S_0')$. Отсюда, ввиду неотрицательности y, получаем включение $S_0'\in\mathcal{T}$, что противоречит минимальности S_0. Определим $\tilde{x}=y^{S_0}+\Delta$ так, чтобы $\Delta\in R_+^{S_0}$ и $\tilde{x}(S_0)=\bar{v}_H(S_0)$. В силу выбора S_0 и непосредственно из определения $\tilde{x}$ имеем: $\tilde{x}\in C((\bar{v}_H)^{S_0})$. Учитывая выпуклость $\bar{v}_H$ [I], $\tilde{x}$ можно продолжить до дележа $x\in C(\bar{v}_H)$ (см.[5], а также [2]). Итак, $x\in A^+(v)$, $x_i=\tilde{x}_i>y_i$ $(i\in S)$ и в силу того, что $\bar{v}_H(S_0)=v_H(S_0)\leq v(S_0)$, выполняется неравенство $x(S_0)\leq v(S_0)$. Но это и означает, что $y\prec_v x$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Для некоторых достаточно широких классов к.и. (например, для игр из V_+) доминирование $\prec_v$ в формулировке предложения I.I можно заменить на $\prec\!\prec_v$. Однако без дополнительных предположений такое усиление неверно.

2. Примером к.и., не имеющей Н-М-решений в H-дележах, как уже отмечалось, может служить известная игра IO лиц, построенная Лукасом [4]. Эта игра, называемая далее игрой Лукаса, имеет следующий вид:

$$N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},$$
$$v(N)=5,\quad v(\{1,3,5,7,9\})=4,$$
$$v(\{1,2\})=v(\{3,4\})=v(\{5,6\})=v(\{7,8\})=v(\{9,10\})=1,$$
$$v(\{3,5,7,9\})=v(\{1,5,7,9\})=v(\{1,3,7,9\})=3,$$
$$v(\{3,5,7\})=v(\{1,5,7\})=v(\{1,3,7\})=2,$$
$$v(\{3,5,9\})=v(\{1,5,9\})=v(\{1,3,9\})=2,$$
$$v(\{1,4,7,9\})=v(\{3,6,7,9\})=v(\{2,5,7,9\})=2,$$
$$v(S)=0 \quad \text{для остальных } S\subseteq N.$$

Ниже нам будем удобно представлять отношения $\prec_v$ и $\prec\!\prec_v$ в виде супремумов "элементарных" отношений $\prec_{v,S}$ и $\prec\!\prec_{v,S}$ соответственно:

где
$$\prec_v = \bigvee_{S \subseteq N} \prec_{v,S}, \quad \prec\prec_v = \bigvee_{S \subseteq N} \prec\prec_{v,S},$$
$$x \prec_{v,S} y \Longleftrightarrow [\forall i \in S (x_i < y_i)] \& [x(S) \le v(S)],$$
$$x \prec\prec_{v,S} y \Longleftrightarrow [\forall i \in S (x_i < y_i)] \& [\exists z \in A(v^S)(y \overset{S}{\le} z)].$$
При этом под супремумом $\bigvee_{k \in K} \prec_k$ семейства бинарных отношений $\{\prec_k\}_{k \in K}$ понимается, как обычно, отношение $\prec$, задаваемое формулой
$$x \prec y \Longleftrightarrow \exists k \in K (x \prec_k y).$$

Опишем H-дележи игры V и отвечающую им структуру доминирования $\prec\prec_V$. Покажем сначала, что
$$\overline{(V^S)}_H (S') = \begin{cases} 0, & S' \ne S, \\ V(S), & S' = S, \end{cases} \qquad (2.I)$$
для всех $S \subseteq N$, кроме трех коалиций:
$$S_1 = \{3, 5, 7, 9\},\ S_3 = \{1, 5, 7, 9\},\ S_5 = \{1, 3, 7, 9\}.$$

Необходимые вычисления имеют рутинный характер и целиком основаны на использовании таблицы для V_ω (см. приложение). Поэтому ограничимся проверкой (2.I) лишь для случая $S = N$.

Положим $N_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N_2 = N \setminus N_1$. Тогда, как вытекает из определения V, для всех $S \subseteq N_2$ имеем $V(S) = 0$. Кроме того, для каждого S, имеющего непустое пересечение с N_1, непусто и одно из множеств $S \cap M_1, S \cap M_2$, где $M_1 = N_1 \setminus \{7\}, M_2 = N_1 \setminus \{9\}$. Отсюда, учитывая, что $V_{M_1} = V_{M_2} = -6$ и $V(S) \le 5$ для всех $S \subseteq N$, получаем
$$V_H(S) = V(S) - (V^-)_2 (S, N \setminus S) \le 0 \quad (S \ne N).$$
Таким образом, $\overline{V}_H (S) = max\{V_H(S') | S' \subseteq S\} = 0$ для $S \ne N$, откуда и вытекает (2.I).

Что касается S_k $(k = 1, 3, 5)$, то, используя упоминавшуюся таблицу, получаем
$$\overline{(V^{S_k})}_H (S) = \begin{cases} 1, & S = S_k \setminus \{7\}, S_k \setminus \{9\}; \\ 3, & S = S_k; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (2.2)$$
В результате, на основании (2,I), (2.2) имеем

$$A^+(v^S)=\begin{cases} I(v^S),\ S\neq S_k,\ (k=1,3,5); \\ I(v^S)\cap\{x\in R^S \mid x_7\leq 2,\ x_9\leq 2\}, \\ \qquad S=S_k\quad (k=1,3,5). \end{cases} \tag{2.3}$$

Резюмируя сказанное, сформулируем два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.I. Множество индивидуально-рациональных H-дележей игры V совпадает с $I(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Отношения доминирования $\prec\prec_{V,S}$ совпадают с отношениями $\prec_{V,S}$ для всех $S\subseteq N$, кроме S_1, S_3, S_5, для которых они определены в соответствии с формулой

$$x\prec\prec_{V,S_k} y \Longleftrightarrow (x\prec_{V,S_k} y)\ \&\ (y_7\leq 2,\ y_9\leq 2). \tag{2.4}$$

Более неожиданным является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Отношение $\prec\prec_V$ совпадает с $\prec_V$ на $I(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения отношений $\prec\prec_v$ и $\prec_v$ вытекает тот факт, что

$$x\prec\prec_v y \Longrightarrow x\prec_v y.$$

Обратная импликация для $v=V$ следует из утверждения 2.2 и того, что соотношение $x\prec_{V,S_k} y$ $(k\in\{1,3,5\})$ равносильно существованию некоторого $S\subseteq N$, для которого $x\prec\prec_{V,S} y$. Указанная равносильность очевидна, если $y_\tau\leq 2$ $(\tau=7,9)$. Если же $y_\tau>2$ для некоторого $\tau\in\{7,9\}$, то, в силу $V(S_k)=3$ $(k=1,3,5)$, имеем: $y(S_k\setminus\{\tau\})<1$. Но $V(S_k\setminus\setminus\{\tau\})=2$ при всех значениях $k\in\{1,3,5\}$ и $\tau\in\{7,9\}$. Таким образом, в рассматриваемом случае $x\prec_{V,S_k\setminus\{\tau\}} y$, что, в силу совпадения доминирований $\prec\prec_{V,S}$ и $\prec_{V,S}$ по всем коалициям $S\neq S_k$, и означает требуемое: $x\prec\prec_{V,S_k\setminus\{\tau\}} y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. В работах [I,3] показано, что множества $A^+(v)$ составляют, как правило, лишь малую (даже в смысле размерности) часть $I(v)$. В частности, для достаточно широкого класса вполне положительных к.и. $A^+(v)$ совпадает с C-ядром v. Что касается соотношения между $\prec\prec_v$ и $\prec_v$, то последнее, вообще говоря, является нетривиальным расширением $\prec\prec_v$ (см. [3]). Сказанное характеризует определенную "исключительность" игр типа V.

Поскольку $(I(V), \prec_V)$ не имеет Н-М-решения (см.[4]), предложение 2.I и означает справедливость основных утверждений работы.

ТЕОРЕМА 2.I. Игра Лукаса не имеет Н-М-решения в H-дележах.

ТЕОРЕМА 2.2. Игра Лукаса не имеет слабого Н-М-решения в H-дележах.

3. Проанализируем более подробно структуру доминирования игры Лукаса. Следуя [4], положим

$$A = I(V),$$
$$B = \{x \in I(V) \mid x_{2l-1} + x_{2l} = 1,\ l = 1,2,3,4,5\},$$
$$E_1 = \{x \in B \mid x_3 = x_5 = 1,\ x_1 < 1,\ x(\{7,9\}) < 1\},$$
$$E_3 = \{x \in B \mid x_1 = x_5 = 1,\ x_3 < 1,\ x(\{7,9\}) < 1\},$$
$$E_5 = \{x \in B \mid x_1 = x_3 = 1,\ x_5 < 1,\ x(\{7,9\}) < 1\},$$
$$E = E_1 \cup E_3 \cup E_5,$$
$$C = C(V),$$
$$F = \Big[\bigcup_{\omega \subseteq \{1,3,5\} \mid |\omega| = 2} \{x \in B \mid x_i = 1 (i \in \omega), x(\{7,9\}) \geq 1\} \cup$$
$$\cup \bigcup_{(\tau,t) \in \{(7,9),(9,7)\}} \{x \in B \mid x_\tau = 1, x_t < 1, x(\omega \cup \{t\}) \geq 2 (\omega \subseteq$$
$$\subseteq \{1,3,5\}, |\omega| = 2)\} \cup \{x \in B \mid x_7 = x_9 = 1\} \cup \{x \in B \mid x_1 = x_3 = x_5 = 1\} \Big] \setminus C$$

(здесь $|\omega|$ - число элементов в ω).

Как показано в [4], множества $A \setminus B$, $B \setminus (C \cup E \cup F)$, C, E, F образуют разбиение $I(V)$. При этом $\mathcal{D}om_{\prec_V} C \supseteq [A \setminus B] \cup [B \setminus (C \cup E \cup F)]$. Покажем, что $\mathcal{D}om_{\prec_V} C$ в свою очередь доминирует $A \setminus (C \cup \mathcal{D}om_{\prec_V} C)$. Действительно, в силу вышесказанного, $A \setminus (C \cup \mathcal{D}om_{\prec_V} C) \subseteq E \cup F$. Таким образом, достаточно показать, что $E \cup F \prec_V A \setminus B$. Пусть x - произвольный элемент из $E \cup F$. Поскольку, как нетрудно проверить, $C = \{y \in B \mid y(N_1) \geq 4\}$, из построения E и F вытекает неравенство $x(N_1) < 4$. Положим

$$\delta = 4 - x(N_1),$$

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i + \delta/5, & i \in N_1, \\ 1, & i = 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $x \prec_{v, N_1} \tilde{x}$. Кроме того, так как $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_1$, то $\tilde{x} \in A \setminus B$, что и завершает доказательство включения $E \cup F \subseteq \mathcal{D}om_{\prec_v}(A \setminus B)$.

Рассмотрение структуры доминирования игры V мотивирует следующее обобщение понятия Н-М-решения а.и. Γ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Множество $A_0 \subseteq A$ будем называть (обобщенным) Н-М-решением порядка m а.и. $\Gamma = (A, \prec)$, если существует разбиение $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ множества A такое, что

а) $A_{\ell+1} \prec \bigcup\limits_{k=0}^{\ell} A_k, \quad \ell = 0, 1, \ldots, m-1;$

б) никакие два различных элемента A_0 не находятся в отношении $\prec$.

Введенное понятие отражает идею последовательного выметания доминируемых дележей: если игра Γ имеет обычное Н-М-решение, такое выметание можно осуществить за один шаг; если Γ имеет лишь Н-М-решения порядка не ниже $m > 1$ - полное выметание требует не менее m шагов.

В начале этого пункта фактически установлено, что игра Лукаса $(I(V), \prec_V)$ имеет Н-М-решение порядка 2. Искомое разбиение имеет вид $\{C, \mathcal{D}om_{\prec_V} C, I(V) \setminus (C \cup \mathcal{D}om_{\prec_V} C)\}$. Ниже показывается, что обобщенным Н-М-решением обладают все классические к.и.

ТЕОРЕМА 3.I. *Каждая к.и. $\Gamma = (I(v), \prec_v)$ обладает обобщенным Н-М-решением порядка $m \leq 2^{|N|} - |N| - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем некоторым образом все коалиции $S \subseteq N$, удовлетворяющие неравенствам $2 \leq |S| \leq |N| - 1$. В соответствии с полученной последовательностью $S_1, S_2, \ldots, S_M$ $(M = 2^{|N|} - |N| - 1)$ определим разбиение $\{A_0, A_1, \ldots, A_M\}$ множества $I(v)$ по следующим формулам:

$$A_M = \mathcal{D}om_{\prec_{v, S_M}} I(v),$$

$$A_{\ell-1}=\{x\in I(v)\setminus\bigcup_{k=\ell}^{M}A_k \mid \exists y\in I(v)\setminus\bigcup_{k=\ell}^{M}A_k(x\prec_{v,S_{\ell-1}}y)\},$$

$$A_0 = I(v)\setminus\bigcup_{k=1}^{M}A_k.$$

Положим $I_\ell=I(v)\setminus\bigcup_{k=\ell}^{M}A_k$ и покажем, что $A_\ell\prec_v I_\ell$ для всех $\ell=1,\dots,M$. С этой целью отметим, что множества A_ℓ, как это вытекает из их построения, открыты относительно $I_{\ell+1}$ $(I_{M+1}\triangleq I(v))$. Отсюда и из компактности $I(v)$ вытекает компактность множеств I_ℓ $(\ell=1,\dots,M)$. Поэтому если $A_\ell\neq\emptyset$, то для любого $x\in A_\ell$ множество $I_\ell(x)=\{y\in I_{\ell+1} \mid \min_{i\in S_\ell}(y_i-x_i)=\max_{y'\in I_{\ell+1}}\min_{i\in S_\ell}(y'_i-x_i)\}$ непусто. Ясно, что $x\in \mathrm{dom}_{\prec_v} I_\ell(x)$. Кроме того, $I_\ell(x)\subseteq I_\ell$, так как иначе найдутся $\tilde{x}\in I_{\ell+1}$ и $y\in I_\ell(x)$, для которых $\min_{i\in S_\ell}(\tilde{x}_i-x_i)>\min_{i\in S_\ell}(y_i-x_i)$, что противоречит определению $I_\ell(x)$. Итак, $A_\ell\prec_v I_\ell$. Отметим также, что из приведенных выше рассуждений вытекает непустота всех множеств I_ℓ $(\ell=1,\dots,M)$. В частности, $A_0=I_1\neq\emptyset$. Что касается внутренней устойчивости множества A_0, то она вытекает непосредственно из определения отношения доминирования $\prec_v$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. Анализ доказательства теоремы 3.I показывает, что она справедлива и для всех игр вида $\Gamma=(A^+(v),\prec\prec_v)$. Более того, теми же рассуждениями можно показать, что обобщенным Н-М-решением обладают все кооперативные игры без побочных платежей такие, что $U(S)$ замкнуто и ограничено сверху для всех $S\subseteq N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Интересно отметить, что в отличие от обычных Н-М-решений (см.[6]) пересечение всех обобщенных Н-М-решений игры v совпадает с ее ядром. Дело в том, что каков бы ни был немаксимальный элемент $x\in I(v)$, существует обобщенное Н-М-решение v, не содержащее x (см. доказательство теоремы 3.I).

В заключение отметим лишь два вопроса, выходящие за рамки этой статьи и представляющие, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

I. Всякая ли к.и. $\Gamma=(I(v),\prec_v)$ имеет обобщенное Н-М-решение порядка не выше 2?

2. В каких случаях ядро является обобщенным Н-М-решением

к.и. $\Gamma = (I(v), \prec_v)$?

Приятный долг автора выразить признательность Г.Ю.Силкиной, составившей программу вычисления величин V_ω и реализовавшую ее на БЭСМ-6.

ЛИТЕРАТУРА

I. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об H-дележах кооперативных игр. - Оптимизация, 1980, вып. 24(4I), с. I8-32.

2. ВАСИЛЬЕВ В.А., СКАРЛЫГИН А.В. Ядра некоторых классов игр без побочных платежей. - Оптимизация, I980, вып. 24(4I), с. 33-47.

3. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном классе дележей в кооперативных играх. - ДАН СССР, I98I, т.256, №2, с. 265-268.

4. LUCAS W.F. The proof that a game may not have a solution. - Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v.137, p.219-229.

5. SHAPLEY L.S. Cores of convex games. - Intern. J. Game Theory, 1971, N1, p. 11-26.

6. LUCAS W.F. Some recent developments in n-person game theory.- SIAM Revue, 1971, v.13, N4, p.491-523.

Поступила в ред.-изд.отдел
I5.08.I98I г.

Приложение

Таблица значений V_ω

$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω	$n(\omega)$	V_ω
I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
I	0	2I	0	4I	0	6I	-2	8I	2	I0I	-2	I2I	I
2	0	22	0	42	0	62	- 2	82	0	I02	0	I22	-I
3	I	23	I	43	I	63	3	83	-I	I03	I	I23	0
4	0	24	0	44	-I	64	0	84	2	I04	0	I24	0
5	0	25	0	45	I	65	0	85	-6	I05	0	I25	-4
6	0	26	0	46	I	66	0	86	-2	I06	0	I26	0
7	-I	27	I	47	-2	67	-I	87	5	I07	-I	I27	3
8	0	28	-I	48	I	68	0	88	0	I08	I	I28	0
9	0	29	I	49	-I	69	2	89	-2	I09	I	I29	0
I0	0	30	I	50	-I	70	0	90	0	II0	-I	I30	0
II	-I	3I	-2	5I	2	7I	-I	9I	I	III	0	I3I	-I
I2	I	32	0	52	-I	72	0	92	-I	II2	-I	I32	0
I3	-I	33	0	53	I	73	0	93	5	II3	-I	I33	0
I4	-I	34	0	54	I	74	0	94	I	II4	I	I34	0
I5	2	35	-I	55	-2	75	I	95	-4	II5	0	I35	I
I6	0	36	0	56	-I	76	-I	96	0	II6	-I	I36	0
I7	0	37	0	57	I	77	-I	97	0	II7	5	I37	0
I8	0	38	0	58	I	78	I	98	0	II8	I	I38	0
I9	-I	39	I	59	-2	79	0	99	I	II9	-4	I39	I
20	0	40	0	60	2	80	0	I00	0	I20	I	I40	-I

Примечание. В колонках I помещается не множество ω, а его номер $n(\omega)$, вычисляемый по формуле $n(\omega)=\sum_{i\in\omega} 2^{i-1}$. В колонках 2 против $n(\omega)$ помещается значение V_ω.

Продолжение таблицы

I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
I4I	I	I67	-I	I93	-I	2I9	0	245	-4	27I	0	297	0
I42	I	I68	0	I94	-I	220	0	246	0	272	0	298	0
I43	-2	I69	0	I95	2	22I	-4	247	3	273	2	299	-I
I44	0	I70	0	I96	-I	222	0	248	-2	274	0	300	I
I45	0	I7I	-I	I97	-I	223	3	249	0	275	-I	30I	I
I46	0	I72	I	I98	I	224	-I	250	2	276	2	302	-I
I47	I	I73	-I	I99	0	225	I	25I	-I	277	-6	303	0
I48	0	I74	-I	200	-I	226	I	252	I	278	-2	304	-I
I49	0	I75	2	20I	I	227	-2	253	3	279	5	305	-I
I50	0	I76	-I	202	I	228	I	254	-I	280	0	306	I
I5I	-I	I77	I	203	-2	229	I	255	-2	28I	-2	307	0
I52	0	I78	I	204	2	230	-I	256	0	282	0	308	-I
I53	0	I79	-2	205	0	23I	0	257	0	283	I	309	5
I54	0	I80	I	206	-2	232	I	258	0	284	-I	3I0	I
I55	-I	I8I	-I	207	I	233	-I	259	-I	285	5	3II	-4
I56	I	I82	-I	208	-I	234	-I	260	0	286	I	3I2	I
I57	-I	I83	2	209	-I	235	2	26I	2	287	-4	3I3	I
I58	-I	I84	I	2I0	I	236	-2	262	0	288	0	3I4	-I
I59	2	I85	-I	2II	0	237	0	263	-I	289	0	3I5	0
I60	0	I86	-I	2I2	-I	238	2	264	0	290	0	3I6	0
I6I	0	I87	2	2I3	5	239	-I	265	0	29I	I	3I7	-4
I62	0	I88	-2	2I4	I	240	2	266	0	292	0	3I8	0
I63	I	I89	2	2I5	-4	24I	0	267	I	293	-2	3I9	3
I64	0	I90	2	2I6	I	242	-2	268	-I	294	0	320	0
I65	0	I9I	-3	2I7	I	243	I	269	-I	295	I	32I	0
I66	0	I92	I	2I8	-I	244	0	270	I	296	0	322	0

Продолжение таблицы

I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
323	I	349	-4	375	I	40I	-2	427	I	453	0	479	0
324	0	350	2	376	-I	402	0	428	-I	454	-I	480	I
325	-I	35I	I	377	2	403	I	429	-I	455	I	48I	-I
326	0	352	0	378	3	404	-2	430	I	456	I	482	-I
327	0	353	0	379	-5	405	6	43I	0	457	-3	483	2
328	0	354	0	380	3	406	2	432	I	458	-I	484	-3
329	2	355	-I	38I	I	407	-5	433	I	459	4	485	2
330	0	356	2	382	-5	408	0	434	-I	460	-2	486	3
33I	-3	357	-I	383	2	409	2	435	0	46I	3	487	-3
332	I	358	-2	384	0	4I0	0	436	I	462	2	488	-I
333	-2	359	2	385	0	4II	-I	437	-5	463	-4	489	3
334	-I	360	0	386	0	4I2	I	438	-I	464	I	490	I
335	3	36I	-2	387	I	4I3	-5	439	4	465	0	49I	-4
336	0	362	0	388	0	4I4	-I	440	-I	466	-3	492	4
337	-I	363	3	389	-2	4I5	4	44I	-I	467	3	493	-3
338	2	364	-3	390	0	4I6	0	442	I	468	0	494	-4
339	-2	365	4	39I	I	4I7	0	443	0	469	-6	495	6
340	-I	366	3	392	0	4I8	0	444	0	470	2	496	-2
34I	7	367	-5	393	0	4I9	-I	445	4	47I	3	497	I
342	-I	368	I	394	0	420	0	446	0	472	-I	498	4
343	-4	369	0	395	-I	42I	2	447	-3	473	2	499	-4
344	0	370	-3	396	I	422	0	448	-I	474	3	500	3
345	-I	37I	3	397	I	423	-I	449	I	475	-5	50I	3
346	-2	372	-2	398	-I	424	0	450	I	476	I	502	-5
347	4	373	-4	399	0	425	0	45I	-2	477	3	503	0
348	0	374	4	400	0	426	0	452	I	478	-3	504	2

Продолжение таблицы

I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
505	-3	53I	I	557	-I	583	I	609	0	635	0	66I	0
506	-4	532	0	558	-I	584	0	6I0	0	636	0	662	0
507	6	533	0	559	2	585	0	6II	-I	637	4	663	I
508	-4	534	0	560	-I	586	0	6I2	0	638	0	664	0
509	0	535	-I	56I	I	587	-I	6I3	2	639	-3	665	0
5I0	6	536	0	562	I	588	I	6I4	0	640	0	666	0
5II	-3	537	0	563	-2	589	I	6I5	-I	64I	0	667	I
5I2	0	538	0	564	I	590	-I	6I6	0	642	0	668	-I
5I3	0	539	-I	565	-I	59I	0	6I7	0	643	I	569	I
5I4	0	540	I	566	-I	592	0	6I8	0	644	0	670	I
5I5	-I	54I	-I	567	2	593	-2	6I9	I	645	0	67I	-2
5I6	0	542	-I	568	I	594	0	620	-I	646	0	672	0
5I7	0	543	2	569	-I	595	I	62I	-I	647	-I	673	0
5I8	0	544	0	570	-I	596	-2	622	I	648	0	674	0
5I9	I	545	0	57I	2	597	6	623	0	649	0	675	-I
520	0	546	0	572	-2	598	2	624	I	650	0	676	0
52I	0	547	I	573	2	599	-5	625	I	65I	-I	677	0
522	0	548	0	574	2	600	0	626	-I	652	I	678	0
523	I	549	0	575	-3	60I	2	627	0	653	-I	679	I
524	-I	550	0	576	0	602	0	628	I	654	-I	680	0
525	I	55I	-I	577	0	603	-I	629	-5	655	2	68I	0
526	I	552	0	578	0	604	I	630	-I	656	0	682	0
527	-2	553	0	579	I	605	-5	63I	4	657	0	683	I
528	0	554	0	580	0	606	-I	632	-I	658	0	684	-I
529	0	555	-I	58I	-2	607	4	633	-I	659	-I	685	I
530	0	556	I	582	0	608	0	634	I	660	00	686	I

Продолжение таблицы

I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
687	-2	7I3	-I	739	2	765	-3	79I	-4	8I7	0	843	4
688	I	7I4	-I	740	-I	766	I	792	I	8I8	-2	844	-2
689	-I	7I5	2	74I	-I	767	2	793	I	8I9	I	845	3
690	-I	7I6	-2	742	I	768	I	794	-I	820	0	846	2
69I	2	7I7	0	743	0	769	-I	795	0	82I	-4	847	-4
692	-I	7I8	2	744	-I	770	-I	796	0	822	0	848	I
693	I	7I9	-I	745	I	77I	2	797	-4	823	3	849	0
694	I	720	I	746	I	772	-I	798	0	824	-2	850	-3
695	-2	72I	I	747	-2	773	-I	799	3	825	0	85I	3
696	-I	722	-I	748	2	774	I	800	-I	826	2	852	0
697	I	723	0	749	0	775	0	80I	I	827	-I	853	-6
698	I	724	I	750	-2	776	-I	802	I	828	I	854	2
699	-2	725	-5	75I	I	777	I	803	-2	829	3	855	3
700	2	726	-I	752	-2	778	I	804	I	830	-I	856	-I
70I	-2	727	4	753	0	779	-2	805	I	83I	-2	857	2
702	-2	728	-I	754	2	780	2	806	-I	832	-I	858	3
703	3	729	-I	755	-I	78I	0	807	0	833	I	859	-5
704	-I	730	I	756	0	782	-2	808	I	834	I	860	I
705	I	73I	0	757	4	783	I	809	-I	835	-2	86I	3
706	I	732	0	758	0	784	-I	8I0	-I	836	I	862	-3
707	-2	733	4	759	-3	785	-I	8II	2	837	0	863	0
708	I	734	0	760	2	786	I	8I2	-2	838	-I	864	I
709	I	735	-3	76I	0	787	0	8I3	0	839	I	865	-I
7I0	-I	736	I	762	-2	788	-I	8I4	2	840	I	866	-I
7II	0	737	-I	763	I	789	5	8I5	-I	84I	-3	867	2
7I2	I	738	-I	764	-I	790	I	8I6	2	842	-I	868	-3

Продолжение таблицы

I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I	2
869	2	893	0	9I7	-5	94I	0	965	I	989	-2	I0I3	-2
870	3	894	6	9I8	-I	942	-2	966	2	990	4	I0I4	6
87I	-3	895	-3	9I9	4	943	I	967	-2	99I	-I	I0I5	-I
872	-I	896	-I	920	-I	944	-2	968	-2	992	-2	I0I6	-3
873	3	897	I	92I	-I	945	0	969	4	993	2	I0I7	4
874	I	898	I	922	I	946	2	970	2	994	2	I0I8	5
875	-4	899	-2	923	0	947	-I	97I	-5	995	-3	I0I9	-7
876	4	900	I	924	0	948	0	972	3	996	4	I020	5
877	-5	90I	I	925	4	949	4	973	-6	996	-3	I02I	-I
878	-4	902	-I	926	0	950	0	974	-3	998	-4	I022	-7
879	6	903	0	927	-3	95I	-3	975	5	999	4	I023	9
880	-2	904	I	928	I	952	2	976	-2	I000	2		
88I	I	905	-I	929	-I	953	0	977	I	I00I	-4		
882	4	906	-I	930	-I	954	-2	978	4	I002	-2		
883	-4	907	2	93I	2	955	I	979	-4	I003	5		
884	3	908	-2	932	-I	956	-I	980	I	I004	-5		
885	3	909	0	933	-I	957	-I	98I	5	I005	6		
886	-5	9I0	2	934	I	958	I	982	-3	I006	5		
887	0	9II	-I	935	0	959	2	983	-2	I007	-7		
888	2	9I2	I	936	-I	960	2	984	2	I008	3		
889	-3	9I3	I	937	I	96I	-2	985	-3	I009	-2		
890	-4	9I4	-I	938	I	962	-2	986	-4	I0I0	-5		
89I	6	9I5	0	939	-2	963	3	987	6	I0II	5		
892	-4	9I6	I	940	2	964	-2	988	-2	I0I2	-4		