Выпуск 26 (43) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.911+519.95

ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

П.И.Чугунов

Теоремы о плотности утверждают, что множество всех решений дифференциального включения с правой частью $\Gamma(t,x)$ плотно в множестве всех решений дифференциального включения с правой частью $co\,\Gamma(t,x)$ (co - символ выпуклой оболочки). Они позволяют почти автоматически устанавливать некоторые свойства одного из этих множеств (или его элементов), если для другого эти свойства известны. Теоремы 1,2 о плотности, доказанные в п.1 данной работы, используются подобным образом в п.2 для задачи оптимизации на траекториях дифференциального включения; в п.3 это делается в более конкретной ситуации для одной модели экономической динамики. В п.4 для этой модели доказывается аналог теоремы о магистрали.

1. Пусть R^n есть n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующей ему нормой $|\cdot|$ и метрикой d ; $B(x,r)$ - замкнутый шар радиуса r с центром в x ; $comp X$ (где X является метрическим пространством) - пространство непустых компактов из X , наделенное метрикой Хаусдорфа h [1]; $C(X)$ - пространство ограниченных непрерывных функций из X в R^n с метрикой равномерной сходимости. Для множества A через $d(x,A)$ обозначаем расстояние от точки x до множества A . Решением дифференциального включения (уравнения) называем, как обычно, абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую включению (уравнению) для почти всех (п.в.) точек из своей области определения.

Пусть $a, b, c > 0$, $\tau = \min\{a, b/c\}$, $I = [0,\tau]$. Обозначим через K множество абсолютно непрерывных функций $u: I \to R^n$ таких, что $u(0) = x_0$, $|\dot u(t)| \le c$ п.в. в I. Используя критерий компактности Арцела, можно проверить, что K - выпуклый компакт в $C(I)$.

ЛЕММА I. Пусть $\Gamma: [0,a] \times B(x_0, b) \to \mathrm{comp}\, B(0,c)$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа), $v: I \to R^n$ измерима, $\varepsilon > 0$ произвольно; L_1 - пространство (классов эквивалентности) суммируемых функций из I в R^n с обычной нормой. Тогда существует непрерывное отображение $g: K \to L_1$, такое, что для любых $u \in K$, $t \in I$ справедливо

$$g(u)(t) \in \Gamma(t, u(t)), \; |d(v(t), g(u)(t)) - d(v(t), \Gamma(t, u(t)))| \le \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, использующее некоторые идеи и обозначения из [2; с.394-398], состоит в построении последовательности непрерывных отображений $g^n: K \to L_1$, удовлетворяющих для всех $n \ge 1$, $u \in K$, $t \in I$ соотношениям:

$$d(g^n(u)(t), \Gamma(t, u(t))) < \varepsilon 2^{-n}; \qquad (1)$$

$$|g^{n+1}(u)(t) - g^n(u)(t)| < \varepsilon 2^{-n-1}; \qquad (2)$$

$$|d(v(t), g^{n+1}(u)(t)) - d(v(t), \Gamma(t, u(t)))| < \varepsilon. \qquad (3)$$

По тем же соображениям, что в [2, с.394], g^n будет сходиться к некоторому отображению g с нужными свойствами.

В силу непрерывности Γ существует последовательность δ_n такая, что для всех $n \ge 1$, $t \in I$, $x, y \in B(x_0, b)$, $|x - y| < \delta_n$ выполнено

$$h(\Gamma(t,x), \Gamma(t,y)) < \varepsilon 2^{-n-3}. \qquad (4)$$

Для каждого $n \ge 1$ пусть U_i^n, $1 \le i \le N(n)$, - конечное открытое покрытие компакта K с $\mathrm{diam}\, U_i^n < \delta_n$; p_i^n, $1 \le i \le N(n)$, - непрерывное разложение единицы, подчиненное этому покрытию; $W_i^n = \{u \in U_i^n : p_i^n(u) > 0\}$, $1 \le i \le N(n)$. Для каждого $n \ge 1$ и вектор-индекса $k = (k_1, \dots, k_n)$ таких, что $1 \le k_\nu \le N(\nu)$, $\bigcap_{\nu=1}^{n} W_{k_\nu}^\nu \ne 0$, выберем некоторый элемент $u_k^n \in \bigcap_{\nu=1}^{n} W_{k_\nu}^\nu$ и построим суммируемую функцию $v_k^n: I \to R^n$ следующим образом. Для $n = 1$, $1 \le k \le N(1)$ в качестве v_k^1 возьмем такую измеримую функцию [3], что

$$v_k^1(t)\in\Gamma(t,u_k^1(t)),\ d(v(t),v_k^1(t))=d(v(t),\Gamma(t,u_k^1(t))),t\in I. \quad (5)$$

Если для $n=p$ требуемые функции v_k^p построены, то для $n=p+1$ в качестве $v_{(k,j)}^{p+1}$, где $1\le j\le N(p+1)$ и вектор-индекс $(k,j)=(k_1,\dots,k_n,j)$ таков, что $u_{(k,j)}^{p+1}\in\bigcap_{\nu=1}^{p}W_{k_\nu}^{\nu}\cap W_j^{p+1}$, возьмем такую измеримую функцию, что для $t\in I$

$$v_{(k,j)}^{p+1}(t)\in\Gamma(t,u_{(k,j)}^{p+1}(t)),d(v_k^p(t),\Gamma(t,u_{(k,j)}^{p+1}(t))=d(v_k^p(t),v_{(k,j)}^{p+1}(t)). \quad (6)$$

Для остальных n,k полагаем $v_k^n(t)\equiv 0$. Из (6), (4), выбора u_k^p получаем

$$|v_{(k,j)}^{p+1}(t)-v_k^p(t)|\le d(v_k^p(t),\Gamma(t,u_k^p(t)))+$$
$$+h(\Gamma(t,u_k^p(t)),\Gamma(t,u_{(k,j)}^{p+1}(t)))\le\varepsilon 2^{-p-3},\ t\in I. \quad (7)$$

Аналогично [2], используя функции v_k^n, оценки (6) и (7), строим отображения g^n (отличие в одном: мы полагаем $g^n(u)(T)=v_k^n(T)$, где $k=(k_1,\dots,k_n)$ таков, что T является правым концом непустого отрезка $J_k^n(u)$), доказываем их непрерывность, справедливость оценок (I) и (2). Докажем (3). Пусть $u\in K, t\in I$ произвольны и фиксированы. Тогда для единственного k, учитывая свойства разложения единицы и (5), (4), имеем $g^1(u)(t)=v_k^1(t), u\in U_k^1$, $|d(v(t),g^1(u)(t))-d(v(t),\Gamma(t,u(t)))|=|d(v(t),\Gamma(t,u_k^1(t)))-d(v(t),\Gamma(t,u(t)))|<h(\Gamma(t,u_k^1(t)),\Gamma(t,u(t)))<\varepsilon 2^{-1-3}$. Используя эту оценку и (2), получаем (3):

$$|d(v(t),g^{n+1}(u)(t))-d(v(t),\Gamma(t,u(t)))|\le$$
$$\le|d(v(t),g^{n+1}(u)(t))-d(v(t),g^1(u)(t))|+|d(v(t),g^1(u)(t))-$$
$$-d(v(t),\Gamma(t,u(t)))|\le\sum_{i=1}^{n}\varepsilon 2^{-i-1}+\varepsilon 2^{-1-3}<\varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ I. В условиях леммы I существует абсолютно непрерывная функция $x:I\to R^n$ такая, что для п.в. $t\in I$ справедливо

$$\begin{aligned}|d(v(t),\dot x(t))-d(v(t),\Gamma(t,x(t)))|\le\varepsilon,\\ \dot x(t)\in\Gamma(t,x(t)),x(0)=x_0.\end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор $A:K\to C(I)$ по правилу $A(u)(t)=x_0+\int_0^t g(u)(s)ds,\ u\in K,\ t\in I$, где g - отображение из леммы I. Очевидно, что A действует из K в K и непрерывен. По теореме Шаудера A имеет неподвижную точку

$x\in K$, которая и является искомой.

Обозначим через H, H_{co} множество всех определенных на I решений дифференциального включения (8) и соответственно дифференциального включения

$$\dot{x}(t)\in co\,\Gamma(t,x(t)),\ x(0)=x_0. \qquad (9)$$

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия:

I) $\omega: I\times[0,2b]\to[0,\infty)$ измерима по t, непрерывна по r, $\omega(t,r)\le m(t)$ $\forall(t,r)$, $m(t)$ суммируема на I и единственным решением дифференциального уравнения $\dot{r}(t)=\omega(t,r(t))$, $r(0)=0$, определенным на I, является $r(t)=0,\ t\in I$;

2) $\Gamma:[0,a]\times B(x_0,b)\to comp\,B(0,c)$ непрерывно, для п.в. $t\in I$ и всех $x,y\in B(x_0,b)$ выполнено $h(\Gamma(t,x),\Gamma(t,y))\le\omega(t,|x-y|)$. Тогда $H\ne\emptyset$, $\bar{H}=H_{co}$, H_{co} – компакт в $C(I)$ (черта означает замыкание в $C(I)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию I $H\ne\emptyset$. Докажем $\bar{H}\supset H_{co}$. (Противоположное включение и компактность H_{co} следуют из [4].) Пусть $x\in H_{co}$. Тогда [5, с.13] существует последовательность $y_k(t),\ k\ge1,\ t\in I$, абсолютно непрерывных функций такая, что для п.в. $t\in I$ выполняется $y_k(0)=x_0$, $|\dot{y}_k(t)|\le c$, $d(\dot{y}_k(t),\Gamma(t,y_k(t)))\equiv\delta_k(t)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, и $y_k(t)\xrightarrow[k\to\infty]{}x(t)$ равномерно на I. Очевидно, что $\delta_k(t)$ измеримы и $\delta_k(t)\le2c$. Согласно следствию I существует последовательность $x_k\in H,\ k\ge1$, такая, что для каждого $k\ge1$ и п.в. $t\in I$ выполняется $|d(\dot{y}_k(t),\dot{x}_k(t))-d(\dot{y}_k(t),\Gamma(t,x_k(t)))|\le 1/k$. Положим $r_k(t)=|x_k(t)-y_k(t)|,\ k\ge1,\ t\in I$. Учитывая предыдущее, имеем для всех $k\ge1$ и п.в. $t\in I$

$$\dot{r}_k(t)\le|\dot{x}_k(t)-\dot{y}_k(t)|\le d(\dot{y}_k(t),\Gamma(t,x_k(t)))+1/k\le d(\dot{y}_k(t),$$

$$\Gamma(t,y_k(t)))+h(\Gamma(t,x_k(t)),\Gamma(t,y_k(t)))+1/k\le\omega(t,r_k(t))+\delta_k(t)+1/k.$$

Положим $\sigma_k(t)=\delta_k(t)+1/k$. Согласно [6, с.1268], для каждого $k\ge1$ существует верхнее решение $\psi_k(t),\ t\in I$, уравнения $\dot{\varphi}=\omega(t,\varphi)+\sigma_k(t)$, $\varphi(0)=0$, такое, что $r_k(t)\le\psi_k(t)$, $t\in I,\ k\ge1$. Поэтому для любого $k\ge1$ справедливо $\psi_k(t)=$ $=\int_0^t(\omega(s,\psi_k(s))+\sigma_k(s))ds,\ t\in I$. Учитывая теорему Арцела и теорему Лебега о предельном переходе, получаем, что некоторая последовательность ψ_{k_s} равномерно на I сходится к функции ψ такой, что $\psi(t)=\int_0^t \omega(s,\psi(s))ds, t\in I$, откуда имеем $\psi(t)=0, t\in I$. В итоге, $z_{k_s}(t), t\in I$, сходится равномерно к нулю, x_{k_s} сходится к x в $C(I)$. Теорема доказана.

Следующая теорема - аналог теоремы I для случая, когда $\Gamma(t,x)$ определена по переменной x на произвольном замкнутом выпуклом множестве.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия:

I) $X\subset R^n$ - замкнутое выпуклое множество, $x_0\in X$;

2) $\Gamma: [0,a]\times X_1 \to comp\, B(0,c)$ непрерывно, где $X_1 = X\cap B(x_0,b)$;

3) $\forall (t,x)\in [0,a]\times X_1$ выполнено $\Gamma(t,x)\subset T_X(x)$ ($T_X(x)$ - касательный конус к множеству X в точке x, определение см. в [7]);

4) $h(\Gamma(t,x),\Gamma(t,y))\le \omega(t,|x-y|)$ для п.в. $t\in I$ и всех $x,y\in X_1$;

5) $\omega: I\times[0,2b]\to[0,\infty)$ измерима по t, непрерывна и не убывает по z; $\omega(t,z)\le m(t)$ $\forall (t,z)$, $m(t)$ суммируема на I и единственным решением уравнения $\dot z=\omega(t,z), z(0)=0$ является $z(t)=0,\ t\in I$.

Для отображения Γ рассмотрим дифференциальные включения (8), (9) и соответствующие им множества H, H_{co} всех решений, определенных на I. Утверждается, что $H\ne\emptyset, \bar H=H_{co}, H_{co}$ - компакт в $C(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $p(x)$ вектор из X_1, ближайший к x. Известно [8, с. 50], что $|p(x)-p(y)|\le|x-y|$ $\forall x,y\in R^n$. Для каждых $(t,x)\in[0,a]\times R^n$ положим $\Gamma_1(t,x)=\Gamma(t,p(x))$. Очевидно, что Γ_1 непрерывно и верна оценка $h(\Gamma_1(t,x),\Gamma_1(t,y))=h(\Gamma(t,p(x)),\Gamma(t,p(y)))\le\omega(t,|p(x)-p(y)|)\le\omega(t,|x-y|)$ для п.в. $t\in I$ и всех $x,y\in B(x_0,b)$. Поэтому для сужения $\Gamma_1|[0,a]\times B(x_0,b)$ выполнены условия теоремы I. Для отображения $\Gamma_1|[0,a]\times B(x_0,b)$ рассмотрим дифференциальные включения (8), (9) (с заменой в формулах (8),

(9) Γ на Γ_1) и соответствующие им множества H^1, H^1_{co} всех решений, определенных на I. Очевидно, что $H\subset H^1, H_{co}\subset H^1_{co}$. Применяя теорему (4.4) из [7] к отображениям $\Gamma_1(t,x), co\Gamma_1(t,x)$ и учитывая выпуклость $T_X(x)$, получаем $H\supset H^1, H_{co}\supset H^1_{co}$. По теореме I $H^1\neq\emptyset, \bar{H}^1=H^1_{co}, H^1_{co}$ - компакт. В итоге $H=H^1\neq\emptyset, \bar{H}=H_{co}, H_{co}=H^1_{co}$ - компакт, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема, которой мы воспользовались, доказана в [7] при условии $\omega(t,z)=kz$, Γ зависит только от x. Но легко проверить, что нужная нам часть этой теоремы доказывается при наших, более общих условиях, методом работы [7] с очевидными изменениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие на Γ с функцией ω в теоремах I,2 - это аналог хорошо известного условия Липшица. В частности, условиям теорем удовлетворяет функция $\omega(t,z)=k(t)z$, если $k(t)$ суммируема на $[0,a]$. Поэтому обычные липшицевы отображения Γ удовлетворяют условиям теорем I,2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы I,2 остаются справедливыми для случая, когда $\Gamma(t,x)$ измеримо по t, непрерывно по x, $\Gamma(t,x)\subset B(0,c(t))$, $c(t)$ суммируема на $[0,a]$. Теорема I обобщает теорему I из [9], теорему 3 из [10], теорему из [11]. Во всех указанных работах функция ω является менее общей, чем у нас. Теоремы о плотности для дифференциального включения, определенного на произвольном замкнутом выпуклом множестве (т.е. аналоги теоремы 2), ранее в литературе не рассматривались.

2. Применим теоремы I,2 к следующим задачам оптимизации. Пусть выполнены условия теоремы 2, $J: H_{co}\to R^1$ - непрерывный в метрике $C(I)$ функционал. Рассмотрим задачи: (А) минимизировать J на H, (Б) минимизировать J на H_{co}. Из теоремы 2, как следствие, получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда: I) в задаче (Б) существует оптимальное решение $v\in H_{co}$; 2) в задаче (А) существует минимизирующая последовательность $v_n\in H$, сходящаяся к v в $C(I)$. Таким образом,

$$J(v)=\inf\{J(u): u\in H_{co}\}=\lim_{n\to\infty} J(v_n)=\inf\{J(u): u\in H\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если ϑ - оптимальное решение в задаче (А), то ϑ - оптимальное решение в задаче (Б).

Аналогичные утверждения справедливы в условиях теоремы I. Следствие 2 позволяет автоматически получать необходимые условия оптимальности для задачи (А), используя для этого известные (см., например [I2, с.29I]) необходимые условия оптимальности для задачи (Б). Так как задача (Б) - это минимизация функционала на траекториях дифференциального включения с выпуклой правой частью (а в задаче (А) выпуклость не предполагается), то естественно ожидать, что необходимые условия оптимальности для задачи (Б) получать легче. Ниже мы покажем в конкретной ситуации, как использовать следствие 2 для получения необходимых условий оптимальности в задаче оптимизации на решениях дифференциального включения, правая часть которого не обязательно выпуклозначна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 аналогична теореме I из [I3], однако у нас, в отличие от [I3], правая часть дифференциального включения, на траекториях которого минимизируется функционал, определена на произвольном замкнутом выпуклом множестве.

3. В [I, с.I86] введена и изучена модель экономики, функционирующая в непрерывном времени. Здесь, используя результаты пп.I,2, продолжим изучение этой модели для случая, когда многозначное отображение, входящее в модель, не обязательно выпуклозначно, но при этом потребуем, чтобы его "овыпукление" имело выпуклый график (условие 4 ниже).

Далее в пп.3,4 будем использовать определения и обозначения из [I]. Напомним некоторые из них.

Для векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ записи $x>y$, $x\gg y$ означают соответственно, что $x_i\geq y_i$ для всех i и $x\neq y$, $x_i>y_i$ для всех i. Символы R^n_+, $(R^n_+)^*$, $A(R^n_+,R^n_+)$ означают соответственно конус векторов из R^n с неотрицательными компонентами, конус, сопряженный к R^n_+, совокупность всех суперлинейных многозначных отображений из R^n_+ в R^n_+. Для отображения $g\in A(R^n_+,R^n_+)$ через $\|g\|$ обозначают норму отображения g [I, с.78].

Каждому $t\in[0,T]$ ($T>0$ фиксировано) сопоставим линейный оператор $B(t):R^n\to R^n$ и многозначное отображение $a(t,\cdot)$, обладающие свойствами: 1) $a:[0,T]\times R^n_+ \to \operatorname{comp} R^n_+$ непрерывно (по Хаусдорфу); 2) $h(a(t,x),a(t,y))\le k(t)|x-y|$ для п.в. $t\in[0,T]$ и всех $x,y\in R^n_+$, $k(t)$ суммируема на $[0,T]$; 3) $\forall (t,x)\in[0,T]\times R^n_+$ выполнено $a(t,x)-B(t)x\subset T_{R^n_+}(x)$ ($T_{R^n_+}(x)$ – касательный конус [7]); 4) $\operatorname{co} a(t,\cdot)\in A(R^n_+,R^n_+)$ для каждого $t\in[0,T]$ (здесь через $\operatorname{co} a(t,\cdot)$ обозначено отображение $x\to \operatorname{co} a(t,x)$); 5) $\|\operatorname{co} a(t,\cdot)\|+\|B(t)\|\le M$ для п.в. $t\in[0,T]$; 6) отображение $t\to B(t)$ непрерывно.

Положим $\Gamma(t,x)=a(t,x)-B(t)x$, $(t,x)\in[0,T]\times R^n_+$. Из оценки $h(A+x,B+y)\le h(A+x-y+y,B+y)\le h(A+x-y,B)\le$ $\le h(A+x-y,A)+h(A,B)\le h(A,B)+|x-y|$ следует, что $h(\Gamma(t,x),\Gamma(t,y))\le(k(t)+M)|x-y|\equiv\omega(t,|x-y|)$ для п.в. $t\in[0,T]$ и всех $x,y\in R^n_+$; здесь мы положили $\omega(t,\tau)=(k(t)+M)\tau$. Можно проверить, что $\omega(t,\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Очевидно, что $\operatorname{co}\Gamma(t,x)=\operatorname{co} a(t,x)-B(t)x$, $\Gamma(t,x)\subset B(0,M|x|)$ для п.в. $t\in[0,T]$ и всех $x\in R^n_+$.

Модель экономики задается с помощью дифференциального включения

$$\dot x(t)\in a(t,x(t))-B(t)\,x(t). \qquad (10)$$

Пусть $x_0\in R^n_+$, $f\in(R^n_+)^*$. Следуя [1, с.189], траекторию x включения (10) с начальным условием $x(0)=x_0$ назовем оптимальной (в смысле f), если $\langle f,x(T)\rangle>0$ и $\langle f,x(T)\rangle\ge\langle f,y(T)\rangle$ для любой траектории y этого включения, исходящей из x_0. Следующая теорема о характеристике оптимальных траекторий включения (10) является аналогом теоремы 10.3 из [1], в отличие от которой выпуклозначность отображения a здесь не предполагается.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1)–6), $x_0\gg 0$, $f\in(R^n_+)^*$, x – траектория включения (10), исходящая из x_0 и оптимальная в смысле f. Тогда найдется функция $g:[0,T]\to(R^n_+)^*$ такая, что

а) для любой траектории v включения (10)

$$\frac{d}{dt}\langle g(t),v(t)\rangle\le 0 \text{ для п.в. } t\in[0,T], \qquad (11)$$

б) $\dfrac{d}{dt}\langle g(t),x(t)\rangle=0$ для всех $t\in[0,T]$,

в) $g(t)\ne 0$ $(t\in[0,T])$, $g(T)=f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H множество всех определенных на $[0,T]$, исходящих из x_0 решений включения (10), через H_{co} - множество всех определенных на $[0,T]$, исходящих из x_0 решений включения

$$\dot{x}(t)\in co\ a(t,x(t))-B(t)x(t)\equiv co\,\Gamma(t,x(t)). \quad (12)$$

Мы утверждаем, что

$$H\neq\emptyset,\ \bar{H}=H_{co},\ H_{co} \text{ - компакт в } C([0,T]). \quad (13)$$

Это утверждение является следствием теоремы 2, если $T<1/M$ (надо взять в теореме 2 число b достаточно большим, $X=R^n_+$, $c=M(b+|x_0|)$, $a=T$). Если же $T\geq 1/M$, то (13) можно получить следующим образом. Достаточно установить аналог теоремы 1, в котором все утверждения (о существовании решений, плотности) относятся к отрезку $[0,T]$, для отображения $\Gamma:[0,T]\times\times R^n\to comp\,R^n$ со свойством $\Gamma(t,x)\subset B(0,M|x|)$ $\forall(t,x)$ и такой же аналог для теоремы 2. Для этого надо разбить $[0,T]$ на конечное число отрезков I_k с длиной, меньшей $1/M$, на каждом I_k построить отображение g_k, как в лемме 1. После чего определить отображение $g(u)(t)$, равное $g_k(u)(t)$ при $t\in I_k$. Имея это отображение, легко завершить доказательства нужных аналогов теорем 1,2. Эти доказательства аналогичны приведенным выше, и поэтому мы их не приводим.

Итак, мы можем пользоваться утверждением (13). Из него следует, что x является также оптимальной (в смысле f) траекторией включения (12).(Фактически мы воспользовались сейчас некоторым аналогом следствия 2.) Мы находимся теперь в условиях теоремы 10.3 из [1], согласно которой существует функция $g:[0,T]\to(R^n_+)^*$ такая, что для любой траектории v включения (12) выполняется (11) и утверждения б) и в). Осталось учесть, что каждая траектория включения (10) является траекторией включения (12). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В условиях теоремы 4 можно сформулировать принцип оптимальности для оптимальных траекторий включения (10) (аналог следствия из [1, с.191]).

4. Здесь мы установим аналог теоремы 13.8 из [14] о магистрали для частного случая модели (10). Пусть $a\in A(R^n_+,R^n_+)$, Z - график отображения a. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in a(x(t))-x(t). \qquad (14)$$

Пусть выполнены условия:

(а) существует вектор $\hat{x}>0$, вектор цен $p>0$, темп роста $\lambda>0$ такие, что $(\hat{x},\lambda\hat{x})\in Z, \langle p,\hat{x}\rangle>0; \langle p,y-\lambda x\rangle\leq 0$ $\forall(x,y)\in Z; \langle p,y-\lambda x\rangle<0$ для любых $(x,y)\in Z$ с вектором x, непропорциональным вектору $\hat{x}$; $|\hat{x}|=1$;

(б) задана положительно однородная первой степени функция $u: R^n_+\to R^1_n$ такая, что $u(x)\leq k\langle p,x\rangle$ $\forall x\in R^n_+$ для некоторого $k>0$; для некоторого числа $\hat{u}>0$ существует допустимая траектория включения (I4) $w(t), t\in[0,T_1]$, со свойством $w(0)=\hat{x}$, $u(w(T_1))\geq\hat{u}$;

(в) задан начальный вектор $x_0>0$ такой, что существует допустимая траектория включения (I4) $z(t), t\in[0,T_0]$, для которой $z(0)=x_0, z(T_0)=\sigma\hat{x}, \sigma>0$.

Следуя [I4, с.272], траекторию $x(t), t\in[0,T], x(0)=x_0$ включения (I4) назовем T-оптимальной, если для любой траектории $y(t), t\in[0,T], y(0)=x_0$, включения (I4) будет $u(x(T))\geq$ $\geq u(y(T))$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия (а)-(в), $\varepsilon>0$ произвольно. Тогда существует число $q>0$ такое, что для всех достаточно больших T выполняется следующее: если исходящая из x_0 траектория $x(t), t\in[0,T]$, T-оптимальна, то лебегова мера множества точек $t\in[0,T]$, в которых

$$\left|x(t)/|x(t)|-\hat{x}\right|\geq\varepsilon, \qquad (I5)$$

не превосходит число q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T\geq T_0+T_1$; $x(t), t\in[0,T]$ - исходящая из x_0 T-оптимальная траектория, L - множество тех $t\in[0,T]$, для которых выполняется (I5). Из (I4) имеем

$$(x(t),\dot{x}(t)+x(t))\in Z \quad \text{для п.в. } t\in[0,T]. \qquad (I6)$$

Откуда, согласно (а), $\langle p,\dot{x}(t)+x(t)-\lambda x(t)\rangle\leq 0$ для п.в. $t\in[0,T]$, или $d/dt\langle p,x(t)\rangle\leq(\lambda-1)\langle p,x(t)\rangle$ для п.в. $t\in[0,T]$. Учитывая (I6) и лемму Раднера [I4, с. 275], получаем для некоторого ρ $(0<\rho<\lambda)$ и для п.в. $t\in L$ неравенство $\langle p,\dot{x}(t)+$ $+x(t)\rangle-\rho\langle p,x(t)\rangle\leq 0$, или $d/dt\langle p,x(t)\rangle\leq(\rho-1)\langle p,x(t)\rangle$. Положим

$\gamma(t)=p-1, t\in L; \gamma(t)=\lambda-1, t\in[0,T]\setminus L; \varphi(t)=\langle p, x(t)\rangle$, $t\in[0,T]$. Тогда из полученных неравенств имеем $\dot\varphi(t)\le \le\gamma(t)\varphi(t)$ для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi(0)=\langle p, x_0\rangle$, откуда с помощью теоремы о дифференциальном неравенстве [6] получаем $\varphi(t)\le \exp(\int_0^t\gamma(s)ds)\langle p, x_0\rangle, t\in[0,T]$. Отсюда

$$\langle p, x(T)\rangle \le \exp[\mu(L)(p-1)+(T-\mu(L))(\lambda-1)]\langle p, x_0\rangle.$$

Положим $y(t)=z(t), t\in[0,T_0]; y(t)=\exp[(\lambda-1)(t-T_0)]\sigma\hat{x}$, $t\in[T_0, T-T_1]; y(t)=\exp[(\lambda-1)(T-(T_0+T_1))]\sigma w(t-(T-T_1))$, $t\in[T-T_1, T]$. Легко проверить, что $y(t), t\in[0,T]$ - допустимая траектория включения (I4), $y(0)=x_0$.

Из оптимальности $x(t), t\in[0,T]$, следует $u(x(T))\ge u(y(T))\ge \ge \exp[(\lambda-1)(T-(T_0+T_1))]\sigma\hat{u}$. Согласно (6), $u(x(T))\le k\langle p, x(T)\rangle$. Объединяя полученные неравенства, имеем $\exp[(\lambda-1)(T-(T_0+T_1))]\sigma\hat{u}\le \le k\exp[\mu(L)(p-1)+(T-\mu(L))(\lambda-1)]\langle p, x_0\rangle, \exp[(1-\lambda)(T_0+T_1)]\sigma\hat{u}\le \le k\langle p, x_0\rangle \exp[\mu(L)(p-\lambda)]$. Откуда, ввиду $p-\lambda<0$, следует, что $\mu(L)$ ограничено сверху некоторым числом q, не зависящим от рассматриваемой траектории $x(t)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Используя теорему 2 и рассуждая, как в п.3, можно установить аналог теоремы 5 для случая, когда a не обязательно выпуклозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
2. ANTOSIEWICZ H.A., CELLINA A. Continuous selections and differential relations. - J. Different. Equations, 1975, v. 19, N 2, pp. 386-398.
3. HERMES H. The generalized differential equation. - Advances in mathematics, 1970, v.4, pp. 149-169.
4. CASTAING M. Sur les equation differentielle multivoqies. - C.r. Acad. sci., 1966, t. 263, N 2, A63-A66.
5. WAŻEWSKI T. Sur une generalisation de la notion des solution d'une equation au contingent. - Bull. Acad. Polon. Sci., 1962, 10, N 1. Ser. math., 11-15.
6. КОЗЛОВ Р.И. К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. - Дифференц. уравнения, 1974, т.10, № 7, с. 1264-1275.

7. CLARCE F.H. Generalized gradients and applications. - Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v.205, pp.247-262.

8. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975.

9. PIANIGIANI G. On the fundamental theory of multivalued differential equations. - J. Different. equations, 1977, v.25, N1.

10. ФИЛИППОВ А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. - Вестник МГУ, 1967, № 3. Сер. математика, механика, с.16-27.

11. TUROWICZ A. Sur les trajectories et quasitrajectories des systemes de commande nonlineares. - Bull. Acad. Polon. Sci., 1962, v.10, N 10. Ser. math., 529-531.

12. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. - М.: Наука, 1980.

13. ИОФФЕ А.Д. Преобразование вариационных задач. - Изв. АН СССР, 1967, Сер. техническая кибернетика, № 3, с.51-60, № 4, с. 15-23.

14. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.06.1980 г.