УДК 513.8

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ГРАНИЦАХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Е.М.Бронштейн

Известно, что у плоского выпуклого компакта множество экстремальных точек замкнуто (впервые это отмечено в [1]). Но уже в трехмерном пространстве это неверно. Стандартный пример - выпуклая оболочка в R^3 окружности $x_1^2+x_2^2=1, x_3=0$ и точек $(0, 1, 1)$ и $(0, 1, -1)$.

Вопрос о топологической характеризации множеств экстремальных точек выпуклых компактов в R^n поставлен В.Кли [2]. Экстремальная граница метризуемого выпуклого компакта в топологическом векторном пространстве имеет тип G_δ [3].

Обозначим через $\mathfrak{M}_{n,N}$ совокупность ограниченных множеств $M\subset R^n$ таких, что в R^N существует выпуклый компакт U и гомеоморфизм ε замыкания $\bar{M}$ в U, для которых $\varepsilon(M)=ext\, U$, где $ext\, U$ - множество экстремальных точек U.

Сначала докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathfrak{M}_{n,n+1}$ содержит все компактные подмножества R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K\subset R^n$ - компакт. Рассмотрим в R^{n+1} множество $K_1=\{(x_1,\dots,x_{n+1}):(x_1,\dots,x_n)\in K, x_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}$; K_1 - компакт, гомеоморфный K. Поскольку все его точки лежат на графике строго выпуклой функции $(x_1,\dots,x_n)\to\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, то экстремальными точками его выпуклой оболочки $conv K_1$ являются все точки K_1.

Все дальнейшие построения основаны на следующем утверждении.

ЛЕММА. Пусть $V \subset R^n$ — выпуклый компакт. Существует выпуклая функция φ, определенная на шаре $B_n(r)$ радиуса r с центром в начале координат ($\operatorname{Int} B_n(r) \supset V$), обладающая следующими свойствами:

1) $\varphi(x) \geq 0$;

2) $\varphi^{-1}(0) = V$;

3) если $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(y)]$, где $x \neq y$, то $x, y \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_i\}$ — последовательность строго выпуклых компактов с гладкими границами в R^n, удовлетворяющая условиям: $V_1 = B_n(r)$, $V_{i+1} \subset \operatorname{Int} V_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = V$. (Множества V_i можно, например, строить так: взять пересечение конечного числа достаточно больших шаров, содержащих некоторую окрестность V, а затем стыки сфер "обкатать" маленькими шариками.) Обозначим через $f_i(\nu)$ сужение опорной функции тела V_i на сферу S^{n-1} радиуса I с центром в начале координат. Из свойств последовательности $\{V_i\}$ видно $f_{i+1}(\nu) < f_i(\nu)$. Пусть $a_i = \min_{\nu \in S^{n-1}} (f_i(\nu) - f_{i+1}(\nu))$, $b_i = \max_{\nu \in S^{n-1}} (f_i(\nu) - f_{i+1}(\nu))$. Так как функции f_i — непрерывные, а S^{n-1} — компакт, то $b_i \geq a_i > 0$. По теореме Дини последовательность $\{f_i(\nu)\}$ равномерно сходится к $f(\nu)$ — сужению опорной функции множества V на S^{n-1}. Отсюда $b_i \to 0$.

Положим $\lambda_1 = 1$ и пусть $\lambda_{i+1} = \min\{1/i^2, \lambda_i \cdot a_{i+1}/2b_i\}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ сходится. Обозначим через μ_k сумму $\sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i$. Построим функцию $\Psi: B_n(r) \to R^+$ следующим образом. На множестве $V_i \setminus V_{i+1}$ график функции Ψ совпадает с границей выпуклой оболочки множеств $V_i \times \{\mu_i\}$ и $V_{i+1} \times \{\mu_{i+1}\}$ за вычетом самих этих множеств; $\Psi(x) = 0$ при $x \in V$. Так как $\mu_k \to 0$, то функция Ψ непрерывна на $B_n(r)$.

Докажем, что функция $\Psi(x)$ выпуклая. Достаточно проверить, что график функции Ψ лежит с одной стороны от опорной плоскости в любой точке графика сужения $\Psi(x)$ на множество $V_i \setminus V_{i+1}$. По определению, эта часть графика функции $\Psi(x)$ есть часть границы выпуклой оболочки множеств $V_i \times \{\mu_i\}$ и $V_{i+1} \times \{\mu_{i+1}\}$, т.е. образована отрезками, которые соединяют такие точки этих множеств, внешние нормали в которых в плоскостях $x_{n+1}=\mu_i$ и $x_{n+1}=\mu_{i+1}$ соответственно коллинеарны и сонаправлены. Тангенс острого угла между опорной плоскостью к графику и плоскостью $x_{n+1}=0$ равен λ_i/ℓ, где ℓ - расстояние между соответствующими опорными плоскостями тел V_i и V_{i+1}. Так как $a_i<\ell<b_i$, то тангенс заключен между λ_i/a_i и λ_i/b_i. Поскольку $\lambda_{i+1}/a_{i+1}\le\lambda_i/2b_i$, то острый угол между опорными плоскостями и плоскостью $x_{n+1}=0$ на множестве $V_{i+1}\setminus V_{i+2}$ меньше, чем на $V_i\setminus V_{i+1}$. Это и означает, что график лежит с одной стороны от любой плоскости, опорной к графику сужения функции ψ на множество $V_i\setminus V_{i+1}$.

Функция ψ неотрицательная, $\psi^{-1}(0)\supset V$. С другой стороны, $\psi^{-1}(0)\subset\psi^{-1}[0,\mu_i]=V_i$. Так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}V_i=V$, то $\psi^{-1}(0)=V$. При любом $c\in(0,\mu_1]$ множество уровня $\{x:\psi(x)\le c\}$ является выпуклой комбинацией Минковского множеств V_i и V_{i+1} при некотором i и, следовательно, имеет строго выпуклую границу. Это следует из леммы 4 в [4, с. 262].

Положим $\varphi(x)=\psi^2(x)$. Функция $\varphi(x)$ выпуклаяя и обладает свойствами I и 2 из формулировки леммы. Пусть $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(y)]$, где $x\ne y$. Так как функция $z\to z^2$ $(z\in R)$ строго выпуклая, то $\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\psi(x)=\psi(y)=c$. Поскольку $\psi^{-1}(c)=\partial\psi^{-1}[0,c]$ и множество $\psi^{-1}[0,c]$ имеет строго выпуклую границу при $c>0$, то $\psi(x)=\psi(y)=0$, т.е. $x,y\in V$. Отсюда функция φ обладает свойством 3, и лемма доказана.

Экстремальными точками надграфика функции φ являются точки вида $(x,\varphi(x))$, где $x\in B_n(r)\setminus V$, а также точки $(x,0)$ где $x\in ext\,V$.

ТЕОРЕМА 2. Если M - локально-компактное ограниченное подмножество R^n, то $M\in\mathfrak{M}_{n,n+2}$. Существует локально-компактное ограниченное подмножество $G\subset R^n$ такое, что $G\notin\mathfrak{M}_{n,n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три случая.

I. Множество M имеет внутреннюю точку. Пусть $D=\{x:\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\le1,\ x_{n+1}=0\}$ - n-мерный шар в R^{n+1}, S - соответствующая сфера, $\varphi:R^{n+1}\to R^+$ - функция, построенная в лемме при $V=D$. Пусть далее O – некоторый замкнутый n-мерный шар, лежащий в M. Обозначим через F множество $\bar{M}\setminus M$. F – компакт, поскольку по условию M – локально-компактное ограниченное множество [5, с.49]. Обозначим через $\lambda:\bar{M}\to R$ такую непрерывную функцию, для которой $\lambda^{-1}(0)=\partial O\cup F, \lambda^{-1}(-\infty,0)=\operatorname{Int} O, \lambda^{-1}[0,\infty)\supset\bar{M}\setminus O$. Такая функция существует, поскольку граница ∂O замкнута и разделяет множества $\operatorname{Int} O$ и $\bar{M}\setminus O$. Будем считать, что множество M лежит в подпространстве $x_{n+1}=0$ пространства R^{n+1} и что O совпадает с D. (Этого можно добиться линейным преобразованием.) Обозначим через $\chi:\bar{M}\to R^{n+1}$ отображение, действующее по правилу

$$\chi(x)=\begin{cases}(x,\lambda(x)) & \text{при } x\in D,\\ (\tau(x),\lambda(x)) & \text{при } x\in\bar{M}\setminus D.\end{cases}$$

Здесь τ – инверсия в плоскости $x_{n+1}=0$ относительно сферы S. χ – непрерывное взаимно-однозначное отображение компакта $\bar{M}$ в R^{n+1}, т.е. гомеоморфизм. При этом $\chi^{-1}(D)=S\cup F, \chi(F)\subset ri\,D$, где ri – относительная внутренность [6]. Построим, наконец, отображение $\varepsilon(x)=(\chi(x),\varphi(\chi(x)))$, переводящее M в R^{n+2}, ε – также гомеоморфизм. Рассмотрим выпуклый компакт $U=\operatorname{conv}[\varepsilon(\bar{M})]$. По определению функции φ, $\varepsilon(\bar{M}\setminus(S\cup F))\subset\operatorname{ext}U$, аналогично $\varepsilon(S)\subset\operatorname{ext}U$. Так как $\varepsilon(F)\subset ri\,D\times\{0\}$, то $\varepsilon(F)\subset\operatorname{conv}\varepsilon(S)$. Отсюда $\varepsilon(M)=\operatorname{ext}U$, где U – выпуклый компакт в R^{n+2}.

2. M – подмножество R, не имеющее внутренних точек. Легко проверить, что из отмеченного ранее свойства локально-компактных множеств следует, что замыкание $\bar{M}$ также не имеет внутренних точек, т.е. является 0-мерным компактом [7, с.179]. Поскольку M является G_δ-подмножеством 0-мерного компакта $\bar{M}$, то по теореме Кольера [8] в R^3 существует выпуклый компакт U с требуемыми свойствами.

3. M – подмножество $R^n (n>1)$, не имеющее внутренних точек. Множество $R^n\setminus\bar{M}$ распадается на не более, чем счетное множество связных компонент. Так как $\bar{M}\setminus M$ – компакт, то $\partial M\cap M$ – открытое подмножество границы ∂M. Существует компонента множества $R^n\setminus\bar{M}$ (обозначим ее через G) такая, что $\partial G\cap M\neq\emptyset$, так как в противном случае множество M не содержало бы граничных точек и тем самым было бы открыто, что противоречит предположению. Совершив инверсию отно-

сительно границы некоторого шара, содержащегося в G (образы множеств M, G, $\bar{M}$ при инверсии будем обозначать так же), мы придем к тому, что G – внешняя компонента дополнения к $\bar{M}$; $\partial G \cap M$ – открытое подмножество ∂G. Действительно, $\partial M \setminus M$, а следовательно, и $\partial G \cap (\partial M \setminus M) = \partial G \setminus M$ – замкнутые множества.

Выберем в $\partial G \cap M$ $(n+1)$ точку $x_1, \ldots, x_{n+1}$, каждую из которых можно соединить с бесконечно удаленной точкой (∞) компактифицированного пространства жордановой кривой. Докажем, что такие точки существуют. Так как $\partial G \cap M$ – открытое подмножество компакта ∂G, то оно содержит $(n+1)$ различную точку $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Выберем замкнутые окрестности V_i точек y_i такие, что они попарно не пересекаются и $V_i \cap \partial G \subset M$. Так как $y_i \in \partial G$, то существуют точки $z_i \in V_i \cap G$. Множество $V_i \cap \partial G$ – компакты, поэтому существуют точки x_i, ближайшие к z_i в $V_i \cap \partial G$. Отрезки $[x_i, z_i]$ с M не пересекаются, а точки z_i соединяются с ∞ жордановой кривой, так как G – открытое связное и тем самым линейно-связное множество. Следовательно, и точки x_i соединяются с ∞ жордановыми кривыми l_i.

Без ограничения общности можно считать, что l_i – ломаные, которые попарно не пересекаются, имеют конечное число звеньев, начальные точки последних, считая от x_i звеньев (т.е. лучей), являются вершинами симплекса Δ, а продолжения этих лучей пересекаются во внутренней точке этого симплекса x_0.

Будем теперь строить гомеоморфизм φ множества $\bar{M}$ такой, что точки $\varphi(x_i)$ являются вершинами симплекса, в котором лежит образ $\varphi(\bar{M})$. Вначале подвергнем гомеоморфизму ψ_i малую окрестность V_i точки x_i. Обозначим звенья ломаной l_i, считая от точки x_i, через $l_i^1, l_i^2, \ldots, l_i^{k_i}$, а их концы – через $x_i = x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k_i}$. Продеформируем сперва компакт $\bar{M}$ так, чтобы образ $\bar{M} \cap V_i$ пересекался с лучом $x_i^0 + t(x_i^2 - x_i^1)$ $(t \geqslant 0)$ и отрезком l_i^1 только в точке x_i. Затем вытянем $\bar{M} \cap V_i$ вдоль отрезка l_i^1 так, чтобы образ точки x_i^0 попал в x_i^1. Продолжая этот процесс, придем к тому, что образ $\bar{M}$ пересекается с $l_i^{k_i}$ в точке $x_i^{k_i} = x_i'$. Вытягивая окрестности этих точек вдоль лучей $l_i^{k_i}$, можно добиться того, чтобы компакт $\bar{M}$ пересекался с плоскостью размерности $(n-1)$, перпендикулярной лучу $l_i^{k_i}$ проходящей через точку x_i' только в этой точке.

На сфере S с центром x_0 радиуса I построим функцию φ_1, равную в точке a величине $\max|x-x_0|$, где $x \in \operatorname{conv} \bar{M}$ и вектор $x-x_0$ направлен так же, как и a. Аналогично построим функцию φ_2 с заменой компакта $\operatorname{conv} \bar{M}$ на симплекс Δ. Функции φ_1 и φ_2 непрерывны, положительны; $\varphi_1(\nu_i) = \varphi_2(\nu_i)$, где

$$\nu_i = x_0 + \frac{x_i' - x_0}{|x_i' - x_0|} \quad (i=1,2,\dots,n+1).$$

Подвергнем теперь множество $\bar{M}$ преобразованию по правилу $\theta(x) = \frac{\varphi_2 \circ \beta(x)}{\varphi_1 \circ \beta(x)} x$, где $\beta(x) = x_0 + \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$; θ -гомеоморфизм. Образ $\theta(\bar{M})$ лежит в симплексе Δ, причем $x_i' \in \theta(M)$.

Построим теперь непрерывную неотрицательную функцию $\alpha: \bar{M} \to R^+$ такую, что $\alpha^{-1}(0) = \bar{M} \setminus M \cup \{x_i'\}$. Такая функция существует по отмеченному свойству локально-компактных множеств. Отображение $\alpha_1(x) = (x, \alpha(x))\ (x \in \bar{M})$ есть гомеоморфизм $\bar{M}$ в R^{n+1}.

Пусть далее $\gamma: R^{n+1} \to R$ - функция, построенная в лемме при $V = \operatorname{conv}\{\alpha_1(x_i')\}$. Тогда множество $\mathcal{E}(x) = (\alpha_1(x), \gamma \circ \alpha_1(x))\ (x \in \bar{M})$ лежит на графике функции γ в R^{n+2}. Так как все точки этого графика, кроме $\mathcal{E}(V) \setminus \{\mathcal{E}(x_i')\}$, являются экстремальными, то $U = \operatorname{conv} \mathcal{E}(\bar{M})$ - выпуклый компакт, экстремальными точками которого являются по построению все точки, не попавшие в $\mathcal{E}(\bar{M} \setminus M)$, т.е. $\operatorname{ext} U = \mathcal{E}(M)$. Первая часть теоремы доказана.

В частности, в качестве M можно взять открытое ограниченное множество G. Докажем, что не существует выпуклого компакта $U \subset R^{n+1}$, экстремальная граница которого гомеоморфна G.

Пусть, напротив, такой выпуклый компакт $U \subset R^{n+2}$ существует и φ - соответствующий гомеоморфизм G на $\operatorname{ext} U$.

Пусть, далее, π - такая опорная n-мерная плоскость множества U, в которой лежат по меньшей мере две точки из $\operatorname{ext} U - \varphi(a)$ и $\varphi(b)$, где $a, b \in G$. (Если бы такой плоскости не существовало, то множество $\operatorname{ext} U$ совпадало бы ∂U и, тем самым, было бы компактным.)

Обозначим через π_1 и π_2 n-мерные плоскости в R^{n+1}, ортогональные отрезку $[\varphi(a), \varphi(b)]$ и проходящие соответственно через точку $\varphi(b)$ и через середину указанного отрезка. Выберем компактную связную окрестность $W \subset G$ точки b такую, что $\varphi(W) \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$. Обозначим через α центральную проекцию из точки $\varphi(a)$ на плоскость $\mathcal{T}_1$. Докажем, что на компакте $\varphi(W)$ отображение α не является взаимно-однозначным. Действительно, взаимная однозначность α на $\varphi(W)$ влечет гомеоморфность отображения $\alpha \circ \varphi$ на W, так как в силу выбора окрестности W отображение α непрерывно на $\varphi(W)$; $\alpha \circ \varphi$ отображает подмножество R^n в n-мерную плоскость $\mathcal{T}_1$. Точка $\alpha \circ \varphi(b)$ является граничной для множества $\alpha \circ \varphi(W)$, так как это множество лежит в плоскости $\mathcal{T}_1$ с одной стороны от $(n-2)$-мерной плоскости $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_2 \ni \alpha \circ \varphi(b)$, в то время как точка b - внутренняя для W. Однако по теореме Брауэра [7, с.219] при гомеоморфизме подмножества R^n в R^n внутренние точки переходят во внутренние.

Так как отображение α не является взаимно-однозначным на $\varphi(W)$, то найдутся две точки $c, d \in W \subset G$ такие, что образы $\varphi(a), \varphi(c), \varphi(d)$ лежат на одной прямой, т.е. вопреки предположению одна из этих точек не является экстремальной точкой компакта $\mathcal{U}$. Теорема доказана.

Следующий результат показывает, что множества из $\mathfrak{M}_{n,N}$ можно расширять на локально-компактные за счет увеличения размерности N.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M \in \mathfrak{M}_{n,N}$, A - локально-компактное ограниченное подмножество R^n, причем $\bar{M} \cap A = \emptyset$. Тогда $M \cup A \in \mathfrak{M}_{n,N+n+3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, $A = K \setminus K_1$, где K и K_1 - компакты. Добавив в случае необходимости к K и K_1 компакт $\bar{M}$, получим, что $K \supset K_1 \supset \bar{M}$.

Пусть $\mathcal{U} \subset R^N$ - выпуклый компакт и $\varepsilon: \bar{M} \to \mathcal{U}$ - гомеоморфизм, для которого $\varepsilon(M) = ext\,\mathcal{U}$. Можно считать, что $0 \in Int\,\mathcal{U}$, так как в противном случае можно понизить размерность N и сдвинуть $\mathcal{U}$. Продолжим по теореме Титце - Урысона отображение ε до непрерывного из K в $\mathcal{U}$. Заметим для этого, что компакт $\mathcal{U}$ гомеоморфен N-мерному кубу.

Построим непрерывное отображение $\varphi: K \to R^{n+1}$, обладающее следующими свойствами:

1) $\varphi(\bar{M})=0$;

2) φ взаимно-однозначно на $K\setminus\bar{M}$;

3) существуют точки $y_1,\dots,y_{n+2}\in A$ такие, что $\varphi(K)$ лежит в симплексе Δ с вершинами $\varphi(y_i)$ и $0\in \operatorname{Int}\Delta$. Относительно последнего пункта заметим, что если $|A|<n+2$, то утверждение теоремы очевидно.

Выберем вначале непрерывную функцию $\alpha: K\to R$ такую, что $\alpha^{-1}(0)=\bar{M}$. Пусть $\varphi_1(x)=(x,\alpha(x))\,(x\in K)$. Обозначим через φ_2 отображение пространства R^{n+1} в себя, действующее по правилу:

$$\varphi_2(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=$$

$$=(x_1,\dots,x_n,0)\cdot\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}}+(0,\dots,0,x_{n+1}),$$

если $x_1^2+\dots+x_n^2>0$,

$$\varphi_2(0,\dots,0,x_{n+1})=(0,\dots,0,x_{n+1}).$$

Построим, наконец, гомеоморфизм $\varphi_3:\varphi_2\circ\varphi_1(K)\longrightarrow R^{n+1}$ такой, что $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(K\setminus\bar{M})\not\ni 0$, и удовлетворяющий свойству 3. Для этого в качестве $y_1,\dots,y_{n+2}$ возьмем любые различные точки множества A. Заметим, что все они соединяются с бесконечно удаленной точкой кривыми, лежащими вне K. Будем теперь строить φ_3 подобно отображению φ в третьей части доказательства теоремы 2. При этом надо дополнительно следить за тем, чтобы некоторая окрестность точки 0 в $\varphi_2\circ\varphi_1(K)$ не подвергалась деформации. Тогда $\varphi=\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$ – отображение с нужными свойствами.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $\theta: K\to R^{N+n+1}=R^N\times R^{n+1}$, действующее по правилу: $\theta(x)=(\varepsilon(x),\varphi(x))$. Отображение θ взаимно-однозначно, поскольку ε взаимно-однозначно на $\bar{M}$, а φ – на $K\setminus\bar{M}$. Тем самым, θ – гомеоморфизм; $\theta(M)=\operatorname{ext} U\times\{0\}$. Преобразуем теперь гомеоморфно окрестности точек $\theta(y_i)$ так, чтобы эти точки заняли положение $(\varepsilon(y_i),0)$, проекции других точек на R^{n+1} не менялись, точки множества $\theta(\bar{M})$ остались неподвижными и проекция $\theta(K)$ на R^N лежала в $\mathcal{U}$. Последнее можно обеспечить выбором достаточно малых окрестностей точек $\theta(y_i)$.

Покажем, что крайними точками выпуклого компакта $\operatorname{conv}(\mathcal{U}\times\{0\}\cup\{\theta(y_i)\})$ являются точки из $\operatorname{ext} U$ в $\theta(y_i)$. Для этого докажем следующее более общее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть выпуклые компакты U_1 и U_2 погружены соответственно в первый и второй сомножители пространства $R^{n+m}=R^n \times R^m$, причем $0 \in ri\, U_1 \cap ri\, U_2$. Тогда $ext\ conv(U_1 \cup U_2) = ext\, U_1 \cup ext\, U_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $ext\ conv(U_1 \cup U_2) \subset ext\, U_1 \cup ext\, U_2$, надо доказать обратное включение.

Пусть $x \in ext\, U_1$, $x = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_j y_j$, где $x_i \in U_1$, $y_j \in U_2$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$, $\sum \alpha_i + \sum \beta_j = 1$. Имеем $x - \sum \alpha_i x_i = \sum \beta_j y_j$. Поскольку левая часть последнего равенства принадлежит R^n, а правая – R^m, то $x - \sum \alpha_i x_i = 0$. Следовательно, $x = \sum \alpha_i x_i + 0 = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_j \cdot 0$. Так как $x \in ext\, U_1$ и $0 \in ri\, U_1$, то одно из чисел α_i равно I. Предложение доказано.

Подвергнем теперь $\theta(K)$ такому гомеоморфизму θ_1, при котором $\theta_1 \circ \theta(K) \subset conv(U \times \{0\} \cup \{0\} \times \Delta)$, θ_1 оставляет неподвижные точки $\theta(y_i)$ и множество $U \times \{0\}$. Этот гомеоморфизм строится так же, как θ в третьей части доказательства теоремы 2. Таким образом, множество $ext(conv\ \theta_1 \circ \theta(K))$ гомеоморфно множеству $M \cup \{y_i\}$, поскольку оно совпадает с $U \times \{0\} \cup \{\theta_1 \circ \theta(y_i)\}$.

Построим теперь непрерывную функцию $\alpha : K \to R$ такую, что $\alpha^{-1}(0) = K_1 \cup \{\theta_1 \circ \theta(y_i)\}$. Тогда отображение $\nu(x) = (\theta_1 \circ \theta(x), \alpha(x))$ – гомеоморфизм K в R^{N+n+2}. Построим, наконец, по лемме функцию $\gamma : R^{N+n+2} \to R$ при $V = conv\ \theta_1 \circ \theta(K) \times \{0\}$. Тогда отображение $\varepsilon'(x) = (\nu(x), \gamma \circ \nu(x))$ преобразует гомеоморфно K в R^{N+n+3}, причем по построению экстремальными точками выпуклого компакта $U' = conv\, \varepsilon'(K)$ не являются точки из $\varepsilon'(\bar{M} \setminus M)$ и $\varepsilon'(K_1 \setminus M)$. Тем самым, множество $ext\ U'$ гомеоморфно $M \cup K \setminus K_1 = M \cup A$. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $M = \emptyset$ совокупность множеств, рассмотренных в теореме 3, совпадает с совокупностью множеств из теоремы 2, однако теорема 2 дает минимальную размерность N.

Автор благодарит Л.Г.Гурова за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. PRICE V. On the extreme points of convex sets. – Duke Math. J., 1937, v. 3, N 1, pp. 56-67.
2. KLEE V. Extremal structure of convex sets, II. – Math. Z., 1958, v. 69, N 2, p.90-104.

3. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. - М.:Мир, 1968.
4. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. Выпуклые многогранники. - М.-Л.:Гостехиздат, 1950.
5. КУРАТОВСКИЙ К. Топология. Т.2. - М.: Мир, 1969.
6. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ.-М.:Мир, 1973.
7. АЛЕКСАНДРОВ П.С., ПАСЫНКОВ В.А. Введение в теорию размерности. - М.: Наука, 1973.
8. COLLIER J.B. On the set of extreme points of a convex body. - Proc. Amer. Math. Soc., 1975, v.47, N 1, pp. 184-187.

Поступила в ред.-изд. отдел
30.10.1980 г.