Выпуск 26 (43) О П Т И М И З А Ц И Я 1981 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.862.4

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ С ФОНДАМИ, РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ПО СРОКАМ СЛУЖБЫ

В.Д.Матвеенко

Идея дифференциации производственных фондов в зависимости от времени их создания используется в однопродуктовых динамических моделях экономики уже довольно давно. Такого рода модели с непрерывным временем исследовались Л.Юхансеном [I], Р.Солоу [2], Л.В.Канторовичем и др.[3-5]. В предлагаемой работе рассматривается однопродуктовая односекторная модель с дискретным временем.

I. Пусть в период t используется $m(t)+1$ групп производственных фондов: $0, 1, \ldots, m(t)$, причем фонды группы i были созданы в период $t-i$. Обозначим через x_i^t объем группы фондов i, через l_i^t – количество трудовых резервов, занятых на этих фондах, через ω_i^t – соответствующую среднюю ставку заработной платы. Количество продукта, производимого в период t на фондах i, определяется производственной функцией $F_i^t(x_i^t, l_i^t, \omega_i^t)$. Объем фондов группы i, выводимый в период t вследствие износа, выражается "функцией износа" $\tau_i^t(x_i^t, l_i^t, \omega_i^t)$. Предполагается, что функции F_i^t, τ_i^t заданы при всех x_i^t, l_i^t, $\omega_i^t \geq 0$, непрерывны и положительно однородны первой степени по первым двум аргументам и что F_i^t при $x_i^t = 0$ или $l_i^t = 0$ принимают значение 0.

Суммарный выпуск продукта в период t составляет

$$M^t = \sum_{i=0}^{m(t)} x_i^t F_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t); \tag{I}$$

числа $u_i^t = l_i^t / x_i^t$ называются коэффициентами обслуживания. Сохранившаяся часть фондов переходит в следующий период:

$$x_{i+1}^{t+1} = x_1^t(1 - \tau_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t)). \qquad (2)$$

В период t выпущенный в предыдущем периоде продукт в количестве M^{t-1} расходуется на ввод новых фондов x_0^t и оплату труда (потребление) на всех фондах $0, 1, \ldots, m(t)$:

$$M^{t-1} = x_0^t + \sum_{i=0}^{m(t)} x_i^t w_i^t, \qquad (3)$$

где $w_i^t = u_i^t \omega_i^t$ - заработная плата на единицу фондов i.

Распределение трудовых ресурсов по фондам происходит в каждом периоде, при этом

$$\sum_{i=0}^{m(t)} \ell_i^t \leq L^t, \qquad (4)$$

где L^t - экзогенная переменная модели.

Кроме того, предполагается, что если наиболее старые фонды $n(t), n(t)+1, \ldots, m(t)$ использовать в период t экономически невыгодно, то эти фонды целиком выводятся и $m(t+1) = n(t)$. Следуя [5], предположим, что $n(t)=m(t)$, т.е. $m(t+1)=m(t)=m$.

Частным случаем нашей модели является стационарная модель, где $F_i^t = F_i$, $\tau_i^t = \tau_i$. Другой интересный случай возникает при $F_{i+1}^{t+1} = F_i^t$, когда каждая группа фондов имеет одну и ту же производственную функцию во все периоды ее функционирования.

2. Прежде всего рассмотрим модель в начале периода t, до того как выбраны коэффициенты обслуживания и ставки заработной платы. Мы располагаем при этом фондами, перешедшими после амортизации из предыдущего периода, и выпущенным в предыдущем периоде продуктом. Состоянием модели в начале периода t будем называть совокупность $R^t = \{E^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_m^t, M^{t-1}), L^t\}$. Балансовые соотношения (I)-(4) определяют множество $\mathcal{a}(R^t)$ состояний в начале периода $t+1$, в которые можно перейти из R^t.

В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$f_i^t = F_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t), \; d_i^t = d_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t) =$$
$$= 1 - \tau_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t), \; i = 0, 1, \ldots, m; \; f_0^{*t} = f_0^t/(1 + w_0^t).$$

При $u_i^t, \omega_i^t, i = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющих (3)-(4), фонды x_i^t и затраты на трудовые ресурсы $x_i^t \cdot w_i^t$ дают выпуск $x_i^t \cdot f_i^t$; при этом $x_{i+1}^{t+1} = x_i^t \cdot d_i^t$. Величина $x_i^t \cdot w_i^t$ составляет часть M^{t-1}, величина $x_i^t \cdot f_i^t$ - часть M^t. Величины x_i^t и M^{t-1} – это соответственно i-й и $(m+1)$-й компоненты вектора E^t; x_{i+1}^{t+1} и M^t – это $(i+1)$-й и $(m+1)$-й компоненты E^{t+1}. Будем называть i-м процессом $(i=1,2,\ldots,m-1)$ пару векторов размерности $m+1$

$$(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0,w_i^t),(0,\ldots,0,\underset{i+1}{d_i^t},0,\ldots,0,f_i^t)$$

и говорить, что этот процесс применяется с интенсивностью x_i^t. Часть продукта из M^{t-1} используется на создание фондов x_0^t и оплату труда на этих фондах. Единица продукта дает при этом выпуск f_0^{*t} и переходит в период $t+1$ в количестве $d_0^t/(1+w_0^t)_t$. Нулевым процессом назовем пару $(0,\ldots,0,1)$, $\left(\frac{d_0}{1+w_0^t},0,\ldots,0,f_0^{*t}\right)$, m-м процессом пару $(0,\ldots,0,1,w_m^t),(0,\ldots,0,f_m^t)$.

Допуская, что процессы $0,1,\ldots,m$ могут применяться с любым вектором интенсивностей, приходим к модели Неймана с матрицей затрат A_t и матрицей выпуска B_t:

$$A_t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & w_1^t \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & w_m^t \end{pmatrix}, \quad B_t=\begin{pmatrix} \frac{d_0^t}{1+w_0^t} & 0 & \ldots & 0 & f_0^{*t} \\ 0 & d_1^t & \ldots & 0 & f_1^t \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_m^t \end{pmatrix}$$

"Продуктами" являются компоненты вектора E^t. Таким образом, мы имеем в период t семейство моделей Неймана при всевозможных допустимых наборах u_i^t, w_i^t, $i=0,1,\ldots,m$.

Состоянием равновесия в модели Неймана по определению является тройка (α_t, Z_t, P_t), где $\alpha_t>0$, $Z_t\in R^{m+1}$, $Z_t\geq 0$, $P_t=(P_1^t,\ldots,P_m^t,P_H^t)\geq 0$, такая, что

$$\alpha_t Z_t A_t \leq Z_t B_t, \tag{5}$$

$$\alpha_t A_t P_t \geq B_t P_t, \tag{6}$$

$$Z_t B_t P_t > 0 . \tag{7}$$

Из системы (5) получаем, последовательно исключая переменные, что

$$(f_0^{*t}-\alpha_t)+\frac{d_0^t}{1+w_0^t}\cdot\frac{1}{\alpha_t}\cdot(f_1^t-\alpha_t w_1^t)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{d_0^t\ldots d_{m-1}}{1+w_0^t}\cdot\frac{1}{\alpha_t^m}(f_m^t-\alpha_t w_m^t)\geq 0$$

или

$$\sum_{i=0}^{m} \psi_i^t \leq 0,$$

где

$$\psi_0^t = \alpha_t (1 + w_0^t) - f_0^t,$$

$$\psi_i^t = \frac{d_0^t \cdot \ldots \cdot d_{i-1}^t}{\alpha_t^i} (\alpha_t w_i^t - f_i^t), \; i = 1, \ldots, m.$$

Из системы (6) получаем, что

$$\sum_{i=0}^{m} \psi_i^t \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=0}^{m} \psi_i^t = 0; \tag{8}$$

все неравенства в системах (5)-(6) должны при этом выполняться как равенства.

Из (8) можно определить темп роста α_t. Нормируя векторы z_t и p_t так, что $z_0^t = (1 + w_0^t)$, $p_M^t = 1$, имеем неймановский луч

$$z_t = \left((1 + w_0^t), \frac{d_0^t}{\alpha_t}, \frac{d_0^t d_1^t}{\alpha_t^2}, \ldots, \frac{d_0^t \cdot \ldots \cdot d_{m-1}^t}{\alpha_t^m} \right)$$

и вектор неймановских цен

$$p_t = (p_1^t, \ldots, p_m^t, p_M^t), \; p_M^t = 1,$$

$$p_1^t = \frac{\psi_0^t}{d_0^t}, \; p_i^t = \frac{\alpha_t p_{i-1}^t - f_{i-1}^t}{d_{i-1}^t} = \alpha_t^{i-1} \frac{\psi_0^t + \ldots + \psi_{i-1}^t}{d_0^t \cdot \ldots \cdot d_{i-1}^t}, \; i = 2, \ldots, m.$$

3. Прежде чем привести интерпретацию полученных формул, рассмотрим основную модель в середине периода t, когда уже известны x_0^t, u_i^t, ω_i^t, $i = 0, 1, \ldots, m$. Совокупность

$$S^t = \{K^t = (x_0^t, \ldots, x_m^t)^T, \; U^t = (u_0^t, \ldots, u_m^t), \; \Omega^t = (\omega_0^t, \ldots, \omega_m^t)\}$$

будем называть состоянием модели в середине периода t. Аналогично множеству $a(R^t)$, определим множество $\bar{a}(S^t)$. В соответствии с (I)-(3) состояние S^{t+1} однозначно определяется по S^t, U^{t+1}, Ω^{t+1}, а именно,

$$K^{t+1} = A_t \cdot K^t, \tag{9}$$

где

$$A_t = \begin{pmatrix} \frac{f_0^t - w_1^{t+1} d_0^t}{1 + w_0^{t+1}} & \ldots & \frac{f_{m-1}^t - w_m^{t+1} d_{m-1}^t}{1 + w_0^{t+1}} & \frac{f_m^t}{1 + w_0^{t+1}} \\ d_0^t & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & d_{m-1}^t & 0 \end{pmatrix}$$

Мы имеем, таким образом, для данных U^t, Ω^t семейство моделей (9), которые получаются при различных U^{t+1}, Ω^{t+1}.

Матрицы типа $\mathbb{A}_t$ называются матрицами Лесли [6], и используются в демографии и экологии при исследовании процессов, сходных с рассматриваемым нами движением фондов. При $f_i^t - w_{i+1}^{t+1} \cdot d_i^t \geq 0, d_i^t > 0, i = 0, 1, \ldots, m-1, f_m^t > 0$ матрица A_t - неразложимая полуположительная примитивная, и к ней применимы известные теоремы. В частности, в стационарном случае при фиксированных допустимых w_i^t, а значит, при постоянной матрице $\mathbb{A}$, последовательность $K^0, K^1, \ldots, K^t, \ldots$ независимо от K^0 сходится к лучу, натянутому на собственный вектор матрицы $\mathbb{A}$, соответствующий наибольшему по модулю собственному числу α.

Будем говорить, что в середине периода t модель находится в равновесии с темпом роста α_t, если $K^{t+1} = \alpha_t \cdot K^t$. Ясно, что α_t - собственное число матрицы $\mathbb{A}_t$ и определяется из уравнения

$$\alpha_t^{m+1}(1+w_0^{t+1}) + \alpha_t^m(\alpha_t w_1^{t+1} d_0^t - f_0^t) + \ldots + \alpha_t^{m-1} d_0^t(\alpha_t w_2^{t+1} d_1^t - f_1^t) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_t \cdot d_0^t d_1^t \cdot \ldots \cdot d_{m-2}^t(\alpha_t w_m^{t+1} d_{m-1}^t - f_{m-1}^t) - d_0^t d_1^t \cdot \ldots \cdot d_{m-1}^t f_m^t = 0,$$

которое перепишем в виде

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{\varphi}_i^t = 0, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\varphi}_0^t = \alpha_t(1+w_0^{t+1}) - f_0^t, \quad \tilde{\varphi}_i^t = \frac{d_0^t d_1^t \cdot \ldots \cdot d_{i-1}^t}{\alpha_t^i}(\alpha_t w_i^{t+1} - f_i^t).$$

Правым собственным вектором матрицы является

$$K^t = \left(1, \frac{d_0^t}{\alpha_t}, \frac{d_0^t d_1^t}{\alpha_t^2}, \ldots, \frac{d_0^t d_1^t \cdot \ldots \cdot d_{m-1}^t}{\alpha_t^m}\right);$$

левым собственным вектором (вектором цен) является

$$\bar{p}^t = (1+w_0^{t+1}, \tilde{p}_1^t + w_1^{t+1}, \ldots, \tilde{p}_m^t + w_m^{t+1}),$$

где

$$\tilde{p}_i^t = \frac{\alpha_t \tilde{p}_{i-1}^t - f_{i-1}^t}{d_{i-1}^t} = \alpha_t^{i-1} \cdot \frac{\tilde{\varphi}_0^t + \ldots + \tilde{\varphi}_{i-1}^t}{d_0^t \cdot \ldots \cdot d_{i-1}^t}, \quad \tilde{p}_0^t = 1 + w_0^{t+1}.$$

4. В стационарном случае уравнения (8) и (10) совпадают; оба семейства моделей, описанные в пп.2,3 дают одинаковые темпы роста α и неймановские лучи. Между тем, цены различны. Цена фондов i в начале периода равна p_i, а в середине периода $p_i + w_i$, т.е. больше на вложенную в единицу фондов стоимость рабочей силы. Цена вновь вводимых фондов равняется общей стоимости вложенного в единицу фондов продукта: $1+w_0$. Цены p_i связаны соотношением

$$p_i = \frac{\alpha p_{i-1} - f_{i-1}}{d_{i-1}} . \qquad (11)$$

Посмотрим, как меняется со временем цена группы фондов. Вначале на вновь созданных фондах сосредоточена стоимость $p_0 = 1+w_0$. При переходе в следующий период происходит изменение масштаба цен в α раз, поскольку по-прежнему $p_H = 1$. Стоимость продукта f_{i-1} уходит вместе с этим продуктом. Оставшаяся стоимость $\alpha p_{i-1} - f_{i-1}$ распределена уже не на одной, а на d_{i-1} единицах фондов, отсюда получается (11). Таким образом, неймановская цена фондов выражает стоимость, приходящуюся на единицу фондов.

5. До сих пор мы интересовались функционированием модели в зависимости от значений параметров $u_i^t, \omega_i^t, i=0,1,\ldots,m$. Построенные в пп. 2,3 семейства моделей описывают по состоянию R^t (или S^t) все множество состояний $\alpha(R^t)(\bar{\alpha}(S^t))$. Выбор параметров на очередном шаге должен осуществляться некоторым разумным образом в соответствии с принятыми критериями оптимальности.

Предположим, как это обычно делается, что $d_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t) = d_i$ постоянные. Это предположение значительно упрощает анализ.

Пусть в период t известно x_0^t, а значит, и K^t. Естественно считать, что $u_i^t, \omega_i^t, i=0,1,\ldots,m$, дают решение задачи

$$max \sum_{i=0}^{m} x_i^t F_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t) \qquad (12)$$

при ограничениях (3)-(4). В противном случае, мы могли бы улучшить состояние R^{t+1}, получив тот же вектор E^{t+1} и бо́льшее M^t.

Рассмотрим простой, но интересный случай. Пусть (4) справедливо при всех u_i^t, удовлетворяющих (1)-(3), т.е. L^t можно считать неограниченно большим. Тогда вместо $u_i^t, \omega_i^t, i=0,1,\ldots,m$, мы можем рассматривать $w_i^t = u_i^t \omega_i^t$ и считать, что u_i^t, ω_i^t определяются по w_i^t как решение задачи:

$$\max_{w_i^t = u_i^t \omega_i^t} F_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t) = f_i^t(w_i^t). \qquad (13)$$

Если ω_i^t задана экзогенно, то $f_i^t(w_i^t) = F_i^t(1, \frac{w_i^t}{\omega_i^t}, \omega_i^t)$. Будем обозначать через I_t множество индексов из $0,1,\ldots,m$ таких, что $w_i^t \neq 0$.

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если функции $f_i^t(w_i^t), i=0,1,\ldots,m$, вогнуты, то для оптимального решения задачи (I2) $\tilde{w}_i^t, i=0,1,\ldots,m$, имеют место соотношения:

$$f_{i+}'^t(\tilde{w}_i^t) \leq f_{j-}'^t(\tilde{w}_j^t), \qquad (14)$$

где $i,j \in I_t$.
($f_{i-}'^t, f_{i+}'^t$ соответственно левая и правая производные функции $f_i^t(w)$.)

СЛЕДСТВИЕ I. Если функция $f_0^t(w)$ вогнута и непрерывно дифференцируема и $f_0'^t(0) > f_{i+}'^t(0), i=1,2,\ldots,m$, то

$$f_0'^t(\tilde{w}_0^t) = \min f_{i-}'^t(\tilde{w}_i^t), i \in I_t. \qquad (15)$$

Если $f_{0+}'^t(0)$ недостаточно велико, т.е. для некоторого набора индексов J имеет место $f_{0+}'^t(0) < f_{i-}'^t(w_i^t)$, $M^{t-1} < \sum_{i \in J} x_i^t w_i^t$, то вводить новые фонды в период t нецелесообразно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функции $f_i^t(w), i=0,1,\ldots,m$, вогнуты и непрерывно дифференцируемы, то

$$f_i'^t(\tilde{w}_i^t) = f_j'^t(\tilde{w}_j^t) = \beta_t, \qquad (16)$$

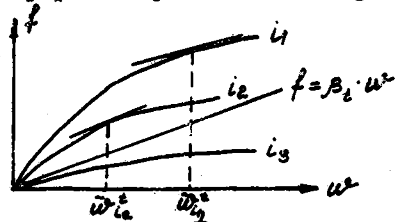
где $i,j \in I_t$.

Легко видеть, что

$$\frac{\partial F_i^t(1, u_i^t, \omega_i^t)}{\partial u_i^t} = f_i'^t(w_i^t) \cdot \omega_i^t. \qquad (17)$$

Левая часть (I7) представляет собой производительность труда на фондах i. Равенства (I6), (I7) означают, что ставка заработной платы пропорциональна производительности труда, причем коэффициент пропорциональности один и тот же для всех групп фондов. Этот коэффициент зависит, как мы увидим, от принятого критерия оптимальности.

Мы предположили, что x_0^t известно. Равенства (I6), (3) (или (15), (3)) позволяют определить значения $\tilde{w}_i^t,\ i=0,1,\dots,m$; из (13) находится состояние S^t. Равенства $w_i^t=0$ выполняются для всех функций, график которых лежит ниже прямой $f=\beta_t\cdot w$ (см. рис.).



Использование этих фондов в период t экономически невыгодно. Если более "плохими" являются более старые фонды, то как можно выбирать на очередном шаге значение $n(t)$ (см. п.1)? Видимо, можно связать эту ситуацию с моральным старением фондов и говорить, что функции износа определяются физическим износом.

Часто считают, что x_0^t известно. Так, в [5] предполагается, что вводимые в производство во временном интервале $[t, t+dt]$ фонды либо задаются экзогенно, либо составляют определенную часть национального дохода $P(t)$ в момент t. Дискретный аналог этого условия состоит в том, что x_0^t составляет некоторую долю выпуска M^{t-1}.

Если x_0^t неизвестно, то для определения S^t требуется дополнительное условие, которое часто определяется каким-либо критерием оптимальности. Приведем некоторые такие условия.

1) В теории предельной производительности

$$f_i'^t(\tilde{w}_i^t)=1,\ i\in I_t. \qquad (18)$$

2) Можно искать $w_i^t,\ i=0,1,\dots,m$, как решение экстремальной задачи

$$\max M^t \text{ при условии (3).}$$

Решение дает максимальный выпуск в очередном периоде. При этом не требуется накладывать ограничений на d_i^t.

В часности, для случая, рассмотренного в следствии 2, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует решение задачи 2 $\tilde{w}_i^t,\ i=0,1,\dots,m$, такое, что*

$$f_i'^t(\tilde{w}_i^t)=f_0^{*t}=\frac{f_0^t(\tilde{w}_0^t)}{1+\tilde{w}_0^t},\ i\in I_t. \qquad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ищем

$$\max x_1^t f_1^t(w_1^t)+\dots+x_m^t f_m^t(w_m^t)+(M^{t-1}-w_1^t x_1^t-\dots-w_m^t x_m^t)f_0^{*t} \qquad (20)$$

При этом f_0^{*t} не зависит от $w_i^t, i\neq 0$, и имеет максимум при $(f_0^t(w_0^t)/(1+w_0^t))'=0$, т.е. при $f_0'^t(w_0^t)=f_0^{*t}$. Максимум в (20) по всевозможным w_i^t достигается при $f_i^t-w_i^t f_0^{*t}\to$ $\to max, i=1,\dots,m$, т.е. при $f_i'^t(w_i^t)=f_0^{*t}$.

При значительно более общих, чем в следствии 2, условиях справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При сделанных в п. I предположениях существуют $\tilde{w}_i^t, i=0,1,\dots,m$, которые для любого состояния R^t при достаточно большом M^{t-1} дают решение задачи 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ_0^t – количество продукта, используемого в период t на фондах группы 0. Выпуск на этих фондах составляет $\frac{\mu_0^t}{1+w_0^t}\cdot f_0^t(w_0^t)$. Эта функция от w_0^t определена на промежутке $[0,\infty)$, стремится к 0 на концах этого промежутка и непрерывна. В некоторой точке $\tilde{w}_0^t$ достигается максимум.

Пусть ρ_i^t – объем продукта, который мы можем использовать на фондах i и на фондах 0. При этом выпуск равен

$$\frac{\rho_i^t-w_i^t x_i^t}{1+\tilde{w}_0^t}\, f_0^t(\tilde{w}_0^t)+x_i^t f_i^t(w_i^t).$$

Эта непрерывная функция от w_i^t на $[0,\rho_i^t/x_i^t]$ имеет максимум в некоторой точке $\tilde{w}_i^t$. Если

$$M^{t-1}>\sum_{i=1}^{m}\tilde{w}_i^t\cdot x_i^t,$$

то $\tilde{w}_i^t, i=0,1,\dots,m$, дают решение задачи 2.

3) Ищется решение задачи

$$max\, \alpha_t \quad \text{при ограничениях (3), (8).}$$

Тем самым обеспечивается максимально возможный неймановский темп роста в соответствующей стационарной модели. Аналогичный критерий использовал А.М.Рубинов [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В условиях следствия 2 при постоянных d_i^t найдутся $\tilde{w}_i^t$, дающие решение задачи 3, такие, что

$$f_i'^t(\tilde{w}_i^t)=\alpha_t,\ i\in I_t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует, что

$$1=\frac{1}{\alpha_t}(f_0^t-\alpha_t w_0^t)+\frac{d_0^t}{\alpha_t^2}(f_1^t-\alpha_t w_1^t)+\dots+\frac{d_0^t\cdots d_{m-1}^t}{\alpha_t^{m-1}}(f_m^t-\alpha_t w_m^t). \quad (21)$$

При $w_i^t=0,\ i=0,1,\dots,m$, имеем $\alpha_t=0$ и $f_i'^t(w_i^t)>\alpha_t$ для всех i. При этом правая часть (21) увеличивается с ростом $w_i^t, i=0,1,\dots,m$. Левая часть не меняется, поэтому α_t растет. Далее, при $f_i'^t(w_i^t)<$ $<\alpha_t$ правая часть убывает с дальнейшим ростом w_i^t, поэтому максимум α_t достигается при $f_i'^t(w_i^t)=\alpha_t,\ i=0,1,\dots,m$.

Заметим, что $\alpha_t=f_0^{*t}$ при w_0^t, найденном по критерию 2, и $w_i^t=0,\ i=1,2,\dots,m$. Если при этом $f_i'^t>f_0^{*t}$ для какого-то i, то мы можем увеличить α_t. Поэтому, вообще говоря, $\max\alpha_t\neq f_0^{*t}$. Видим, что для перехода от состояния равновесия с максимальным выпуском к состоянию равновесия с наибольшим темпом роста мы должны уменьшать заработную плату на единицу фондов (повышая фондовооруженность) и увеличивать ввод новых фондов.

В однопродуктовых моделях используются обычно производственные функции двух аргументов $F_i^t(x,\ell)$, не зависящие от w_i^t. Рассмотрим функции $f_i^t(u_i^t)=F_i^t(1,u_i^t)$, которые предполагаются непрерывными вогнутыми. Если принята гипотеза о полной занятости, т.е. (4) выполняется как равенство, то возникает задача распределения рабочей силы L^t по фондам, которая сводится к только что рассмотренной для случая неограниченного L^t задаче распределения выпуска M^{t-1}.

6. Обычно предполагается, что

$$F_{i+1}^{t+1}=F_i^t,\ i=1,2,\dots,m-1. \qquad (22)$$

Функция F_1^{t+1} определяется по F_0^t одним из двух способов.

I. Если принята гипотеза о мгновенной превращаемости фондов в любом периоде [2, 3], то $F_1^{t+1}=F_0^t$. При этом функции $f_{i+1}^{t+1}(w)$ и $f_i^t(w),\ i=0,1,\dots,m$, совпадают. Если при всех t функции f_0^t вогнуты и непрерывно дифференцируемы, то такими будут и все f_i^t. Как мы видели в п.5, $f_0'^t(\tilde{w}_0^t)=f_i'^t(\tilde{w}_i^t)$ при всех $i=1,2,\dots,m$ таких, что $\tilde{w}_i^t\neq 0$. Поэтому изменение $\tilde{w}_i^t$ на некоторой группе фондов при ее старении определяется изменением $f_0'^t(\tilde{w}_0^t)$, т.е. зависит от изменений технологии и фонда заработной платы на единице новых фондов. Увеличение $f_0'^t(\tilde{w}_0^t)$ с ростом t означает, в частности, что производительность труда растет быстрее, чем ставка заработной платы. При этом $\tilde{w}_i^t$ уменьшается (с увеличением t и i).

В качестве примера рассмотрим случай 2) из п.5, в котором критерием оптимальности является максимизация выпуска в очередном периоде. Обычно считают, что $F_0^{t+1}(x,\ell)=a(t)\cdot F_0^t(x,\ell)$, $a(t)>1$. Более общим является предположение

$$F_0^{t+1}(x,\ell,\omega)=a(t)\cdot F_0^t(x,\ell,\omega),\ a(t)>1.$$

При этом

$$f_0^{t+1}(w)=a(t)\cdot f_0^t(w),\ a(t)>1.$$

Согласно (19), $\tilde{w}_0^{t+1}=\tilde{w}_0^t$. При этом $f_0'(\tilde{w})$ увеличивается в $a(t)$ раз, значит,

$$\tilde{w}_{i+1}^{t+1}=u_{i+1}^{t+1}\cdot\omega_{i+1}^{t+1}<\tilde{w}_i^t=u_i^t\cdot\omega_i^t. \qquad (23)$$

Если $\omega_{i+1}^{t+1}\geq\omega_i^t$, т.е. ставка заработной платы не убывает, то $u_{i+1}^{t+1}<u_i^t$, т.е. фондовооруженность каждой группы фондов растет по мере ее старения. Точно так же, если $\omega_0^{t+1}>\omega_0^t$, то фондовооруженность на вновь вводимой группе в период $t+1$ выше, чем в период t. Наоборот, рост фондовооруженности в рассматриваемом случае означает необходимость повышения ставок заработной платы. Из равенства $\tilde{w}_0^{t+1}=\tilde{w}_0^t$ следует также, что ставка заработной платы на новых фондах меняется пропорционально фондовооруженности. Неравенство (23) означает, что по мере старения фондов ставка заработной платы растет медленнее чем фондовооруженность.

Значение $\tilde{w}_i^t$ растет при уменьшении $f_0'^t(\tilde{w}_0^t)$ и остается неизменным при неизменном $f_0'^t(\tilde{w}_0^t)$. Последнее имеет место, в частности, в случае I) п.5.

II. Если принята гипотеза о застывшей структуре фондов [1,3,5], то

$$F_1^{t+1}(x,\ell,\omega)=\begin{cases}\ell\cdot F_0^t(\frac{1}{\tilde{u}_0^t},1,\omega), & \ell\leq x\tilde{u}_0^t,\\ x\cdot F_0^t(1,\tilde{u}_0^t,\omega), & \ell>x\tilde{u}_0^t,\end{cases} \qquad (24)$$

где $\tilde{u}_0^t$ - коэффициент обслуживания в период t. Хотя в период $t+s$ коэффициент $\tilde{u}_s^{t+s}=\ell_s^{t+s}/x_s^{t+s}$ отличен от $\tilde{u}_0^t$, фактически участвующие в производстве фонды и рабочая сила, согласно гипотезе, по-прежнему находятся в отношении $\tilde{u}_0^t$. Из (22),(24) следует, что

$$f_s^{t+s}(w)=\begin{cases}\dfrac{F_0^t(1,u_0^t,\omega)}{u_0^t\cdot\omega}\cdot w, & w\leq u_0^t\cdot\omega,\\ F_0^t(1,u_0^t,\omega), & w>u_0^t\cdot\omega.\end{cases}$$

Если функции $f_0^t(w)$ вогнутые и непрерывно дифференцируемые, приходим к условиям следствия I) п.5.

В работе [5] приняты гипотезы о полной занятости и о застывшей структуре фондов; производственные функции не зависят от ω и x_0^t известно. При этих предположениях (15) переписывается в виде

$$\frac{\partial F_0^t(1,u)}{\partial u} = \min \frac{F_0^{t-i}(1,\tilde{u}_0^{t-i})}{\tilde{u}_0^{t-i}}, \quad i \in I_t .$$

Это выражение представляет собой дискретный аналог уравнения дифференциальной оптимизации [5].

7. Частным случаем описанной в п.I модели является дискретный вариант [7] простейшей односекторной модели экономической динамики [8]. В этой модели все производственные фонды однородны, т.е. в период t

$$f_i^t = f^t,\ u_i^t = u^t,\ \omega_i^t = \omega^t,\ w_i^t = w^t,\ d_i^t = d^t,\ i = 0, 1, \ldots, m(t).$$

Подставляя в (8), имеем при $d^t/\alpha_t \neq 1$

$$\alpha_t + (\alpha_t w^t - f^t) \cdot \frac{1 - \left(\frac{d^t}{\alpha_t}\right)^{m(t)+1}}{1 - \frac{d^t}{\alpha^t}} = 0 .$$

Если $\alpha_t \geq 1$, то, поскольку $d^t \leq 1$, равенство $\frac{d^t}{\alpha^t} = 1$ возможно лишь при $\alpha_t = d^t = 1$. При этом (8) имеет вид:

$$f^t - w^t = \frac{1}{m(t)+1} .$$

Вывод изношенных фондов описывается в простейшей модели лишь функциями износа (группы фондов не выводятся целиком). Поэтому $m(t+1) = m(t) + 1$ и $m(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Переходим в (8) к пределу. Получаем, что $f^t = w^t$ при $\frac{d^t}{\alpha^t} = 1$, как и должно быть при $\alpha_t = 1$. При $\frac{d^t}{\alpha_t} < 1$ имеем $f^t + d^t = \alpha_t(w^t + 1)$ или

$$f^t(\eta^t) = \alpha_t \omega^t + (\alpha_t \eta^t - \eta^t d^t), \qquad (25)$$

где $\eta^t = 1/u^t$ - фондовооруженность, $f^t(\eta^t) = F^t(\eta^t, 1, \omega^t) = f^t \eta^t$. Равенство (25) выражает в равновесии распределение выпущенного продукта. Значение $f'^t(\eta^t)$ в данной модели представляет собой норму эффективности капиталовложений $\eta_э$. Для рассмотренных в п.5 случаев

$$\eta_э^2 = f^t - f'^t \cdot u^t \cdot \omega^t = f^t - \frac{f^t \cdot w^t}{1 + w^t} = \frac{f^t}{1 + w^t} = \frac{f^t(\eta^t)}{\eta^t + w^t}, \qquad (26)$$

$$\eta_э^3 = f^t - \alpha_t \cdot w^t = \alpha_t - d^t = \frac{f^t(\eta^t) - \alpha_t \omega^t}{\eta^t} = \frac{f^t(\eta^t) - \omega^t}{\eta^t + \omega^t}. \qquad (27)$$

Равенство (25), непосредственно следующее из балансовых условий модели, и равенство типа (26) или (27), дающее решение той или иной экстремальной задачи, позволяют по одной из величин α_t, ω^t, r^t (или $r_э$) определить две другие. В частности, (25), (27) эквивалентны системе

$$\omega^t = \frac{f^t(r^t) - r_э}{d^t + r_э},$$
$$\alpha_t = d^t + r_э .$$

Эти выражения получены в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. JOHANSEN L. Substitution versus fixed production coefficients in the theory of economic growth: a synthesis. - Econometrica, 1959, v.27, N 2, pp. 157-176.
2. SOLOW R.M. Investment and technical progress. - In: Mathematical methods in the social sciences, 1959. - Stanford Univ. Press, 1960, pp.89-104.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГОРЬКОВ Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. - ДАН, 1959, № 4, с.732-735.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса. - ДАН, 1973, т.211, №6, с. 1280-1283.
5. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И., ХОВАНСКИЙ А.Г. Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей. - Сб. трудов ВНИИСИ, 1978, №9, с.5-25.
6. СВИРЕЖЕВ Ю.М., ЛОГОФЕТ Д.О. Устойчивость биологических сообществ. - М.; Наука, 1978.
7. РУБИНОВ А.М. Дискретный вариант простейшей модели экономического прогнозирования. Односекторная модель. - Оптимизация, 1980, вып. 25(42), с. 139-151.
8. МОИСЕЕВ Н.Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования. - М.: Знание, 1975.

Поступила в ред.-изд.отдел
20.02.1980 г.