Выпуск 26 (43) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

МОДЕЛИ НЕЙМАНА - ГЕЙЛА, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА ГРАФЕ

З.А.Джалилова

В настоящей работе рассматривается модель экономической динамики Неймана - Гейла, определенная на графе. Эта модель определяется с помощью орграфа, с каждой вершиной которого связано суперлинейное отображение [1], описывающее технологические возможности некоторой экономической единицы. Наличие дуги, идущей из вершины i в вершину j означает возможность транспортировки продуктов из i в j. Предполагается, что транспортные расходы отсутствуют. В работе вычисляется двойственная модель и с ее помощью находятся характеристики оптимальных траекторий. Указывается условие типа "дополняющей нежесткости" для оптимальных траекторий и их характеристик, а также для состояния равновесия. Отметим, что подобная модель в случае, когда с каждой вершиной связывается не отображение, а задача линейного программирования, рассматривалась в [2].

1. Рассматривается модель экономической динамики, описывающая поведение во времени экономической системы $\mathfrak{M}$, состоящей из конечного числа m производственных единиц $\mathfrak{M}_i$, $i=1,2,\dots,m$. Каждая производственная единица $\mathfrak{M}_i$ задается моделью Неймана - Гейла [1], определяемой многозначным суперлинейным отображением $a_i : R^n_+ \to \Pi(R^n_+)$. Тем самым предполагается, что фазовое пространство всех моделей одно и то же. Между некоторыми из этих производственных единиц разрешен обмен произведенными продуктами. Для формального описания модели введем граф $P(J, \Gamma)$. Здесь $P(J,\Gamma)$ - орграф без петель, J - множество вершин, Γ - многозначное отображение J в J. Точнее говоря,

$\Gamma(j)$ - это множество вершин $k \in J$, таких, что существует дуга из вершины k в вершину j, а $\Gamma^{-1}(j)$ - множество $k \in J$ таких, что существует дуга из вершины j в вершину k. Напомним, что под дугой из вершины j в вершину k понимается упорядоченная пара (j, k). Наличие дуги (j, k) содержательно означает возможность перевозки из j в k. Модель $\mathfrak{M}$ имеет дело с теми же продуктами, что и модели $\mathfrak{M}_i$, однако удобнее различать продукты, отнесенные различным вершинам графа.

В связи с этим считаем, что фазовое пространство модели совпадает с конусом $(R_+^n)^m$. Если $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in (R_+^n)^m$, то элемент $x_i \in R_+^n$ интерпретируется как набор продуктов, имеющихся у i-й производственной единицы. Отображения A и B, описывающие производство и обмен, соответственно определяются следующим образом:

$$A(X)=\{Y: Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m), y_i \in a_i(x_i), i=1,2,\ldots,m\},$$

$$B(Y)=\{Z: Z=(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

$$z_i=y_i+\sum_{j\in\Gamma(i)} u_{ji}-\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik},\ u_{ij}\geq 0,\ \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}\leq y_i\}.$$

Вектор u_{ji} описывает продукты, перевозимые по дуге (j, i). Нетрудно проверить, что отображения A и B суперлинейны. Отсюда сразу следует, что модель $\mathfrak{M}$ представляет собой модель Неймана - Гейла.

2. При изучении оптимальных траекторий модели $\mathfrak{M}$ существенную роль играют цены. В модели $\mathfrak{M}$ каждая производственная единица $\mathfrak{M}_i$ назначает свои цены f_i на имеющиеся продукты. Функционал $F=(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in ((R_+^n)^m)^*$ описывает весь набор цен. Поведение цен в моделях Неймана - Гейла описываются двойственным отображением. Значение функционала $f \in (R_+^n)^*$ на элементе $x \in R^n$ обозначается символом $[f, x]$. Если $M \in R_+^n \times R_+^n$ - модель Неймана - Гейла, то двойственная модель M' определяется так:

$$M'=\{(f,g)\in(R_+^n)^*\times(R_+^n)^* / [f,x]\geq[g,y] \text{ для всех } (x,y)\in M\}.$$

Дадим описание модели, двойственной к $\mathfrak{M}$. С этой целью опишем отображения A' и B', двойственные к A и B соответственно. Условимся в дальнейшем обозначать конус $(R_+^n)^m$ через K. Тогда $K^*=((R_+^n)^m)^*$. Элементы конусов K и K^* обозначаем прописными латинскими буквами, а проекцию этих элементов на i-й сомножитель - соответствующей строчной буквой с индексом i. Таким образом, если $X\in K$, то $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$. Значение функционала $F\in K^*$ на элементе $X\in K$ будем обозначать символом $[F,X]$. Иными словами, $[F,X]=\sum_i [f_i,x_i]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Справедливо равенство

$$A'(F)=\{G\in K^*:\ g_i\in a_i'(f_i),\ i=1,2,\dots,m\},\ F\in K^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. По определению отображения A, включение $Y\in \dot A(X)$ равносильно системе включений $y_i\in a_i(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$. Поэтому если $g_i\in a_i'(f_i)$, то

$$[G,Y]=\sum_i [g_i,y_i]\le\sum_i [f_i,x_i]=[F,X],$$

т.е. $G\in A'(F)$.

2. Если $G\in A'(F)$, то, рассмотрев векторы X и Y, где

$$X=(0,\dots,0,x,0,\dots,0),$$
$$Y=(0,\dots,0,y,0,\dots,0),\ y\in a_i(x),$$

убедимся в том, что $[g_i,y]\le[f_i,x]$. Отсюда следует включение $g_i\in a_i'(f_i)$.

ЛЕММА. Если $H\in K^*$, $Z\in B(Y)$, где

$$z_i=y_i+\sum_{j\in\Gamma(i)}u_{ji}-\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)}u_{ik},$$

то

$$[H,Z]=\sum_i [h_i,y_i]+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)}[h_k-h_i,u_{ik}].\quad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим следующий факт:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in\Gamma(i)}u_{ji}=\sum_{(j,i)\in\Gamma}u_{ji}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\Gamma^{-1}(j)}u_{ji}.$$

Это равенство справедливо, так как каждое из трех выражений есть сумма перевозок по всем дугам.

Вычислим

$$[H,Z]=\sum_i [h_i,z_i]=\sum_i\Big[h_i,y_i+\sum_{j\in\Gamma(i)}u_{ji}-\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)}u_{ik}\Big]=$$
$$=\sum_i [h_i,y_i]+\sum_{(j,i)}[h_i,u_{ji}]-\sum_{(i,k)}[h_i,u_{ik}].$$

Так как

$$\sum_{(j,i)}[h_i,u_{ji}]=\sum_{(i,k)}[h_k,u_{ik}],$$

то

$$[H,Z]=\sum_i [h_i,y_i]+\sum_{(i,k)}[h_k,u_{ik}]-\sum_{(i,k)}[h_i,u_{ik}]=$$
$$=\sum_i [h_i,y_i]+\sum_{(i,k)}[h_k-h_i,u_{ik}].$$

Лемма доказана.

Таким образом, если $Z\in B(Y)$, то стоимость $[H,Z]$ произведенного продукта Z равна сумме стоимостей продуктов, вычисленных по всем вершинам и по всем дугам, причем стоимость перевозки по дуге определяется разностью цен в конце и в начале дуги.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Справедливо равенство
$$B'(G)=\{H: g_e\geq h_j,\ j\in \Gamma^{-1}(\ell)\cup\{\ell\}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H\in B'(G)$. Рассмотрим вектор $Y=(0,\dots,y,\dots,0)$, где y стоит на ℓ-м месте, $y\in R^n_+$. Тогда $B(Y)$ состоит из всех векторов Z, у которых $z_i=0$ при $i\notin\Gamma^{-1}(\ell)$ и $z_i=u_{\ell i}$ при $i\in\Gamma^{-1}(\ell)$, где $u_{\ell i}$ - произвольные векторы из R^n_+, удовлетворяющие неравенству $\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}u_{\ell i}\leq y_\ell$. Кроме того, $z_\ell=y_\ell-\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}u_{\ell i}$. В данном случае имеем
$$[H,Z]=\sum_{i=1}^m [h_i,z_i]=\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}[h_i,z_i]+[h_\ell,z_\ell]=$$
$$=\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}[h_i,u_{\ell i}]+[h_\ell,y_\ell-\sum_i u_{\ell i}]=\sum_i [h_i,u_{\ell i}]+$$
$$+[h_\ell,y_\ell]-[h_\ell,\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}u_{\ell i}],\quad u_{\ell i}\geq 0,\ \sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}u_{\ell i}\leq y_\ell.$$
Так как $H\in B'(G)$, то $[H,Z]\leq[G,Y]=[g_\ell,y_\ell]$. Поэтому
$$[g_\ell,y_\ell]\geq\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}[h_i,u_{\ell i}]+[h_\ell,y_\ell]-[h_\ell,\sum_{i\in\Gamma^{-1}(\ell)}u_{\ell i}].$$
Рассмотрим два случая.

а) $u_{\ell i}=0$. В этом случае $[g_\ell,y_\ell]\geq[h_\ell,y_\ell]$ для всех $y_\ell\geq 0$, следовательно, имеем $g_\ell\geq h_\ell$.

б) Существует $j\in\Gamma^{-1}(\ell)$, при котором $u_{\ell j}=y_\ell$. Тем самым $u_{\ell i}=0$ при $i\neq j$. Тогда
$$[g_\ell,y_\ell]\geq[h_j,y_\ell]-[h_\ell,y_\ell].$$
Отсюда следует, что $g_\ell\geq h_j$ для всех $j\in\Gamma^{-1}(\ell)$. Таким образом, доказано включение
$$B'(G)\subset\{H: g_\ell\geq h_j,\ j\in\Gamma^{-1}(\ell)\cup\{\ell\}\}.$$

Проверим теперь противоположное включение. Пусть функционалы G и H таковы, что $g_\ell \geq h_j, j\in \Gamma^{-1}(\ell)\cup\{\ell\}$. Рассмотрим векторы Y и $Z\in B(Y)$. По определению отображения B справедливы соотношения

$$z_i = y_i + \sum_{j\in\Gamma(i)} u_{ji} - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik} \quad , \text{ где } y_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik} \geq 0.$$

На основании леммы I имеем

$$[H,Z] = \sum_{i=1}^{m} [h_i, y_i] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_k - h_i, u_{ik}] =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \{[h_i, y_i] + \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_k, u_{ik}] - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_i, u_{ik}]\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \{[h_i, y_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}] + \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_k, u_{ik}]\} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} [g_i, y_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}] + \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [g_i, u_{ik}] \leq \sum_{i=1}^{m} [g_i, y_i] = [G,Y].$$

Здесь использовалось неравенство $h_k \leq g_i$ при $k\in\Gamma^{-1}(i)$. Полученное неравенство показывает, что $H\in B'(G)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $H\in B'(G), \bar{Z}\in B(\bar{Y})$, причем

$$\bar{z}_i = \bar{y}_i + \sum_{j\in\Gamma(i)} \bar{u}_{ji} - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}, i=1,2,\dots,m.$$

Равенство $[H,\bar{Z}] = [G,\bar{Y}]$ выполняется в том и только в том случае, когда

$$[g_i - h_i, \bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}] = 0, [g_i - h_k, \bar{u}_{ik}] = 0, (i,k)\in\Gamma. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму I, имеем

$$[H,\bar{Z}] = \sum_{i=1}^{m} [h_i, \bar{y}_i] - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_i, \bar{u}_{ik}] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_k, \bar{u}_{ik}] =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} [h_i, \bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [h_k, \bar{u}_{ik}].$$

С другой стороны,

$$[G,\bar{Y}] = \sum_{i=1}^{m} [g_i, \bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [g_i, \bar{u}_{ik}].$$

Предположим, что $[H,\bar{Z}] = [G,\bar{Y}]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} [g_i - h_i, \bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}] + \sum_{(i,k)\in\Gamma} [g_i - h_k, \bar{u}_{ik}] = 0.$$

Из предложения 2 следует, что $g_i \geq h_i$ при всех i и $g_i \geq h_k$ при $(i,k)\in\Gamma$. Кроме того, $\bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik} \geq 0$,

$u_{ik} \geq 0$. Таким образом, сумма в (I) содержит лишь неотрицательные слагаемые и поэтому каждое из них равно нулю. Тем самым справедливость (2) доказана. Наоборот, если эти равенства имеют место, то, суммируя их, убедимся в том, что $[G,Y] = [H,\bar{Z}]$. Предложение доказано.

Пусть ℓ - некоторая координата (номер некоторого продукта). Из доказанного предложения вытекает справедливость следующих утверждений.

а) Из того, что $g_i^\ell - h_k^\ell > 0$ при $(i,k) \in \Gamma$, следует $\bar{u}_{ik}^\ell = 0$; если $u_{ik}^\ell > 0$, то $g_i^\ell - h_k^\ell = 0$. Таким образом, если цены производства ℓ-го вида товаров в i-й модели g_i^ℓ больше цены обмена ℓ-го вида товаров в k-й модели h_k^ℓ, то перевозки $\bar{u}_{ik}^\ell$ ℓ-го вида товаров по дуге (i,k) не осуществляются; если же перевозки положительны, то $g_i^\ell = h_k^\ell$.

б) Из того, что $g_i^\ell > h_i^\ell$, следует равенство $\bar{y}_i = \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} u_{ik}$; если $\bar{y}_i > \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}$, то $g_i^\ell = h_i^\ell$. Таким образом,, если $g_i^\ell > h_i^\ell$, то весь товар продается, а из того, что в i-й модели ℓ-й продукт продается не полностью, вытекает, что цена производства в i-й модели равна цене обмена в этой же модели.

Перейдем к описанию отображения, двойственного к композиции отображений A и B . Введем обозначение $C = B \cdot A$. Через m' будем обозначать модель, двойственную к модели m .

Хорошо известно (см.[I]), что $C' = B' \cdot A'$. Привлекая предложения I и 2, убедимся в справедливости следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Включение $H \in C'(F)$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется функционал G , при котором справедливы соотношения:*

$$g_\ell \in a'_\ell(f_\ell), \quad \ell = 1,2,\dots,m,$$

$$h_j \leq g_\ell \quad , \quad j \in \Gamma^{-1}(\ell) \cup \{\ell\}.$$

3. Функционирование экономики моделируемой системы m за конечный промежуток времени $[0,T]$ можно описать конечной последовательностью $(X_0, X_1, \dots, X_T)$, где $X(t+1) \in C(X(t))$, $t = 0,1,\dots,T$, и $C = B \cdot A$. Однако удобнее отдельно рассматривать процессы производства и обмена. Пусть в момент $t = 0$ задан начальный вектор $X(0) = (x_1(0), x_2(0),\dots,x_m(0))$. На первом шаге из $X(0)$ производится вектор $Y_1 \in A(X(0))$.

Произведенный вектор Y_1 в процессе обмена переходит в вектор $X_1 \in B(Y_1)$. Далее эта процедура повторяется T раз. В дальнейшем будем считать, что процессы обмена и производства происходят в один момент времени, Конечную последовательность $X(0), Y(1), X(1), \ldots, Y(T), X(T)$ будем называть T-шаговой траекторией модели $\mathcal{M}$. Здесь

$$Y(t+1) \in A(X(t)), \quad X(t+1) \in B(Y(t+1)), \; t=0,1,\ldots,T.$$

Интерес для изучения представляют оптимальные траектории $\bar{X}(0), \bar{Y}(1), \bar{X}(1), \ldots, \bar{X}(T)$. Оптимальность означает, что для некоторого функционала $F_T \neq 0$ выполняется равенство $[F_T, \bar{X}(T)] = \max\limits_{\tilde{X} \in C^T(X(0))} [F_T, \tilde{X}]$.

Известно (см.[I]), что если $X(0)$ - внутренняя точка конуса K, то траектория $\bar{X}(0), \bar{Y}(1), \bar{X}(1), \ldots, \bar{Y}(T), \bar{X}(T)$ оптимальна в том и только в том случае, когда она допускает характеристику, т.е. существует последовательность функционалов $F(0), G(1), F(1), \ldots, G(T), F(T)$ такая, что

$$\begin{gathered}[F(0), X(0)] \leq [G(1), Y(1)] \leq [F(1), X(1)] \leq \\ \leq [G(T), Y(T)] \leq [F(T), X(T)]\end{gathered} \qquad (3)$$

для произвольной траектории модели, а для рассматриваемой оптимальной траектории каждое неравенство в (3) заменяется на равенство. Соотношения (3) равносильны тому, что

$$G(1) \in A'(F(0)), \; F(1) \in B'(G(1)), \; F(T) \in B'(G(T)).$$

Пусть задана оптимальная траектория

$$\bar{X}(0), \bar{Y}(1), \ldots, \bar{Y}(T), \bar{X}(T), \qquad (4)$$

допускающая характеристику

$$F(0), G(1), \ldots, G(T), F(T) \qquad (5)$$

при всех $t=0,1,\ldots,T$. Здесь

$$\bar{X}(t) = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t)),$$

$$Y(t) = (\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_m(t)),$$

$$\bar{x}_i(t) = y_i(t) + \sum_{j \in \Gamma(i)} u_{ji}(t) - \sum u_{ik}(t), \; i=1,2,\ldots,m,$$

$$F(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t)),$$

$$G(t) = (g_1(t), \ldots, g_m(t)).$$

При $t=1,2,\ldots,T$ имеем

$$[F(t-1),\bar{X}(t-1)]=[G(t),\bar{Y}(t)]=[F(t),\bar{X}(t)]. \tag{6}$$

Рассмотрим второе равенство из (6) в момент t. На основании предложения 3 это равенство равносильно тому, что

$$[f_i(t)-g_i(t),\bar{y}_i(t)-\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)}\bar{u}_{ik}(t)]=0 \text{ для всех } i,$$
$$[f_i(t)-g_k(t),u_{ik}(t)]=0 \quad \text{ для } (i,k)\in\Gamma.$$

Рассмотрим первое равенство из (6). Имеем

$$\sum_{i=1}^{m}[f_i(t-1),x_i(t-1)]=[F(t-1),X(t-1)], \tag{7}$$
$$\sum_{i=1}^{m}[g_i(t),y_i(t)]=[G(t),Y(t)].$$

Здесь $y_i(t)\in a_i(x_i(t-1))$ и, кроме того, в силу предложения I, $g_i(t)\in a_i'(f_i(t-1))$. Последнее означает, что каждая из величин $[f_i(t-1),x_i(t-1)]-[g_i(t),y_i(t)]$ неотрицательна. Поскольку в силу (7) сумма их равна нулю, то и каждое из них равно нулю, т.е.

$$[f_i(t-1),x_i(t-1)]=[g_i(t),y_i(t)],\ i=1,2,\ldots,m. \tag{8}$$

Эти условия являются также и достаточными: если выполнено (8), то справедливо первое равенство в (6) в момент t.

Оформим полученные результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы траектория цен (5) являлась характеристикой траектории (4), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$g_i(t)\in a_i'(f_i(t-1));$$
$$[f_i(t-1),x_i(t-1)]=[g_i(t),y_i(t)],\ i=1,2,\ldots,m;$$
$$g_\ell(t)\geq f_j(t),\ j\in\Gamma^{-1}(\ell)\cup\{\ell\};$$
$$[f_i(t)-g_i(t),\bar{y}_i(t)-\sum\bar{u}_{ik}(t)]=0,\ i=1,2,\ldots,m;$$
$$[f_i(t)-g_k(t),\bar{u}_{ik}(t)]=0,\ (i,k)\in\Gamma,\ t=1,2,\ldots,T.$$

4. Напомним, что состоянием равновесия модели Неймана - Гейла, определяемой некоторым конусом $M\subset R_+^n\times R_+^n$, называется тройка $\mathcal{G}=(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),p)$, где $\alpha>0$, $(\bar{x},\bar{y})\in M$, $\alpha\bar{x}\leq\bar{y}$, $(p,\frac{1}{\alpha}p)\in M'$ (M' - двойственный к M конус), $p(\bar{y})>0$. С точки зрения динамики, интерес представляют лишь такие состояния

равновесия, для которых $\alpha\bar{x} = y$. Их существование можно гарантировать при весьма слабых предположениях (см., например, [3]). Поэтому ниже под состоянием равновесия понимаем тройку $(\alpha, \bar{x}, p)$, где $\alpha > 0$, $(\bar{x}, \alpha\bar{x}) \in M, p(\bar{x}) > 0, (p, \frac{1}{\alpha}p) \in M'$. Пусть тройка $(\alpha, \bar{X}, F)$ является состоянием равновесия рассматриваемой нами модели $\mathcal{M}$. Тогда справедливы соотношения

$$\alpha\bar{x}_i = \bar{y}_i + \sum_{j\in\Gamma(i)} \bar{u}_{ji} - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}, \tag{9}$$
$$\bar{y}_i \in a_i(\bar{x}_i), \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik} \leqslant \bar{y}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее, в силу предложения 4 найдется такой функционал G, что

$$g_\ell \in a'_\ell(f_\ell), \quad \ell = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\frac{1}{\alpha} f_j \leqslant g_\ell, \quad j \in \Gamma^{-1}(\ell) \cup \{\ell\}. \tag{10}$$

Отметим, что последовательность $(\bar{X}, \bar{Y}, \alpha\bar{X}) = (X(0), Y(1), X(1))$ можно рассматривать как оптимальную одношаговую траекторию модели $\mathcal{M}$, а последовательность $(F, G, \frac{1}{\alpha}F) = (F(0), G(1), F(1))$ – как ее характеристику. Поэтому, как следует из теоремы I, выполняется соотношение

$$[f_i, \bar{x}_i] = [g_i, \bar{y}_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$
$$[\tfrac{1}{\alpha} f_i - g_i, \bar{y}_i - \sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} \bar{u}_{ik}] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$
$$[\tfrac{1}{\alpha} f_i - g_k, \bar{u}_{ik}] = 0, \qquad (i, k) \in \Gamma. \tag{13}$$

Применим функционал $\frac{1}{\alpha} f_i$ к равенству (9). Имеем

$$[f_i, \bar{x}_i] = \tfrac{1}{\alpha}[f_i, \bar{y}_i] + \tfrac{1}{\alpha}\sum_{j\in\Gamma(i)} [f_i, \bar{u}_{ji}] - \tfrac{1}{\alpha}\sum_{k\in\Gamma^{-1}(i)} [f_i, u_{ik}].$$

Откуда, используя (II) и (I2) последовательно, получим

$$[g_i, y_i] - [\tfrac{1}{\alpha} f_i, \bar{y}_i] = \tfrac{1}{\alpha}\sum_{j\in\Gamma(i)} [f_i, u_{ji}] - \tfrac{1}{\alpha}\sum_k [f_i, u_{ik}];$$
$$[g_i - \tfrac{1}{\alpha} f_i, \sum_k \bar{u}_{ik}] = \tfrac{1}{\alpha}\sum_j [f_i, \bar{u}_{ji}] - \tfrac{1}{\alpha}\sum_k [f_i, \bar{u}_{ik}];$$
$$\sum_k [g_i, \bar{u}_{ik}] = \tfrac{1}{\alpha}\sum_j [f_i, \bar{u}_{ji}]. \tag{14}$$

Применим теперь к равенству (9) функционал g_i. Имеем

$$\alpha[g_i, \bar{x}_i] = [g_i, \bar{y}_i] + \sum_{j\in\Gamma(i)} [g_i, \bar{u}_{ji}] - \sum_k [g_i, \bar{u}_{ik}].$$

В силу равенства (I3), если $(j,i)\in\Gamma$ (т.е. $j\in\Gamma(i)$), то $\frac{1}{\alpha}[f_j,\bar{u}_{ji}]=[g_i,\bar{u}_{ji}]$. Кроме того, $[g_i,\bar{y}_i]=[f_i,\bar{x}_i]$. Поэтому

$$\alpha[g_i,\bar{x}_i]=[f_i,\bar{x}_i]+\frac{1}{\alpha}\sum_j[f_j,\bar{u}_{ji}]-\sum_k[g_i,\bar{u}_{ik}].$$

Воспользовавшись равенством (I4), получим

$$\alpha[g_i,\bar{x}_i]=[f_i,\bar{x}_i]+\frac{1}{\alpha}\sum_j[f_j,\bar{u}_{ji}]-\frac{1}{\alpha}\sum_j[f_i,\bar{u}_{ji}]$$

или, что то же самое,

$$[g_i-\frac{1}{\alpha}f_i,\bar{x}_i]=0. \qquad (I5)$$

Из (I5), учитывая равенство (I2), а также соотношение $\alpha\bar{x}_i-\bar{y}_i+\sum_k\bar{u}_{ik}=\sum_j\bar{u}_{ji}$, получим

$$\sum_j[g_i-\frac{1}{\alpha}f_i,\bar{u}_{ji}]=0. \qquad (I6)$$

Так как $g_i-\frac{1}{\alpha}f_i\geqslant 0$, то каждое слагаемое в (I6) равно нулю, т.е.

$$[g_i-\frac{1}{\alpha}f_i,\bar{u}_{ji}]=0,\ j\in\Gamma(i). \qquad (I7)$$

Так как, кроме того, $[g_i-\frac{1}{\alpha}f_j,\bar{u}_{ji}]=0$ (см. (I3)), то

$$[f_i,\bar{u}_{ji}]=[f_j,\bar{u}_{ji}]. \qquad (I8)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть тройка $(\alpha,\bar{X},F)$ является состоянием равновесия модели $\mathcal{M}$, элементы $\bar{y}_i,\bar{u}_{ji}$ и функционалы g_e определены соотношениями (9) и (I0) соответственно. Тогда

$$[g_i-\frac{1}{\alpha}f_i,\bar{x}_i]=0,\quad i=1,2,\dots,m;$$
$$[g_i-\frac{1}{\alpha}f_i,\bar{u}_{ji}]=0,\quad j\in\Gamma(i),\ i=1,2,\dots,m;$$
$$[f_i,\bar{u}_{ji}]=[f_j,\bar{u}_{ji}],\ j\in\Gamma(i),\ i=1,2,\dots,m.$$

Приведем интерпретацию соотношений (I5)-(I8). Пусть ℓ - номер некоторого продукта. Так как $g_i-\frac{1}{\alpha}f_i\geqslant 0$, то соотношение $x_i^\ell>0$ влечет равенство $g_i^\ell-\frac{1}{\alpha}f_i^\ell=0$. Таким образом, если i-я модель использует ℓ-й продукт как затраты в состоянии равновесия, то цены производства и обмена в этой модели на этот продукт совпадают.

Напомним, что это совпадение вызывается также тем, что

ℓ-й продукт не продается полностью. Равенство $g_i^\ell - \frac{1}{\alpha} f_i^\ell = 0$ имеет место также в случае, если хотя бы для одного $j \in \Gamma(i)$ выполняется $u_{ji}^\ell > 0$, т.е. товар ℓ импортируется. В то же время, если $g_i^\ell > \frac{1}{\alpha} f_i^\ell$, то ℓ-й продукт при производстве не затрачивается. Напомним, что из соотношения $g_i^\ell > \frac{1}{\alpha} f_i^\ell$ следует также, что ℓ-й продукт полностью экспортируется. Соотношение $g_i^\ell > \frac{1}{\alpha} f_i^\ell$ влечет также равенство $u_{ji}^\ell = 0$ при всех $j \in \Gamma(i)$, т.е. товар ℓ не импортируется. Равенство (I8) показывает, что стоимость перевозимых по дуге (i,j) продуктов в ценах обмена i и j совпадает.

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, I973.
2. ВОРОБЬЕВ Н.Н., МАЛИННИКОВ В.В., СОБОЛЕВ А.И. О задачах линейного программирования на ориентированных графах. - Экономика и мат. методы, I968, т.4, № 4, с. 622-628.
3. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, I972.

Поступила в ред.-изд. отдел
II.IO.I980