Выпуск 26 (43) О П Т И М И З А Ц И Я 1981 г.
Численные методы

УДК 512.25:330.115

ФОРМИРОВАНИЕ ПАРКА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН С УЧЕТОМ ПОГОДНЫХ УСЛОВИЙ

М.А.Яковлева

Постановка задачи

Пусть в течение года некоторое хозяйство должно выполнить Q сельскохозяйственных работ в заданных объемах. При этом для каждой работы в пределах года заданы сроки ее выполнения. Будем считать, что любая из работ может быть выполнена с помощью некоторой машины или агрегата, составленного из двух машин (основной машины и прицепа). Сроки выполнения работ, производительности агрегатов и себестоимость производства работ, а также их объемы могут зависеть от условий, сложившихся в данном году. Поэтому мы будем исходить из того, что имеется несколько вариантов погодных условий и на каждый из них задана необходимая информация. Мы также будем предполагать, что какие-то машины в хозяйстве уже имеются и, кроме того, можно приобретать новые машины. Задача состоит в выборе машин из числа имеющихся в парке и в дополнительной закупке (если это потребуется) новых машин в таком количестве, чтобы, во-первых, оказалось возможным при любых погодных условиях выполнить все работы в заданных объемах и, во-вторых, суммарные расходы, связанные как с покупкой машин, так и с выполнением работ, были минимальными.

Обозначим через P_1 число видов машин, которые можно приобрести, а через P - общее число различных типов машин $(P_1 \leq P)$. Запишем поставленную задачу в виде задачи линейного программирования сначала для случая, когда вариантность погодных условий не учитывается. Разобьем весь промежуток времени (год) на T временных промежутков (протяженность которых может быть разной) и введем множества $I=\{1,2,\dots,P\times T+Q\}$, $I'=\{1,2,\dots,P\times T\}$, $I''=I\setminus I'=\{P\times T+1, P\times T+2,\dots,P\times T+Q\}$. Матрицу условий задачи линейного программирования обозначим через $A[I,N]$, где множество номеров строк равно множеству $I=I'\cup I''$ и множество номеров столбцов - множеству N. Задача, таким образом, состоит в нахождении столбца $x[N]\geq 0$, который при заданных матрице $A[I,N]$, столбце $B[I]$ и строке $C[N]$ удовлетворял бы условиям:

$$
\begin{aligned}
A[I',N]\cdot x[N] &\geq B[I'],\\
A[I'',N]\cdot x[N] &= B[I''],\\
C[N]\cdot x[N] &- min.
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

Первые T компонент каждого столбца матрицы $A[I,N]$ относятся к возможности использования первой машины во все промежутки времени, вторая группа из T компонент - второй машины и т.д. Таким образом, машине с номером $p\in P$ и промежутку времени $t\in\overline{1,T}$ в каждом столбце $A[I,j]$ соответствует компонента $i=(p-1)\times T+t$. Последние Q компонент каждого столбца соотнесены различным видам работ. Неравенства в первой группе условий (I) и строгие равенства во второй отражают тот факт, что в какие-то периоды некоторые машины могут оставаться незагруженными, в то время как все работы должны выполняться точно в запланированных объемах.

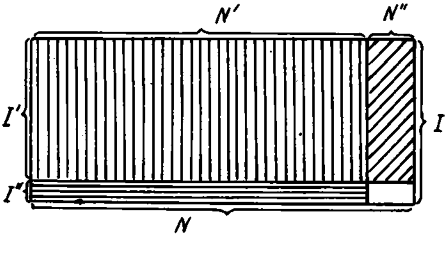

Рис. I

Все столбцы матрицы $A[I,N]$ по своей структуре разделяются на две группы, в соотвествии с чем $N=N'\cup N''$. Столбцы с номерами из множества N' задают технологический способ выполнения некоторой работы в определенный промежуток времени. Каждый такой столбец $A[I,j]$ имеет не более четырех отличных от нуля компонент, номера которых мы будет обозначать через $i_1(j)$, $i_2(j)$, $i_3(j)$, $i_4(j)$. Номера $i_1(j)$ и $i_2(j)$ относятся соответственно к использованию в данный период $t(j)$ машины и прицепа, причем если работа выполняется агрегатом, то $A[i_1(j),j]=A[i_2(j),j]=-1$. Если же работа выполняется одной машиной, то $A[i_1(j),j]=-1$, $A[i_2(j),j]=0$. Третья отличная от нуля компонента $A[i_3(j),j]$ соответствует выполняемой этими машинами работе и задает производительность (за период $t(j)$) агрегата на этой работе. Наконец, присутствие четвертой компоненты $A[i_4(j),j]$ связано с затратами промежуточного продукта, который в свою очередь является итогом работы в предыдущие промежутки времени. Следует заметить, что задание режима работ, при котором чередуется производство некоторого промежуточного продукта с его использованием, неизбежно требует столь мелкого разбиения промежутка времени на периоды, при котором эти операции были бы разделены. Кроме того, работа-полуфабрикат должна быть размножена по числу периодов ее выполнения: выполненная в данный период эта работа должна рассматриваться как отдельный продукт.

Вторая группа столбцов (с номерами из множества N'') относится к возможности покупки машин. Число таких столбцов равно P_1. Так как машине с номером $p\in\overline{1,P_1}$ отвечает множество номеров $I(p)=\{(p-1)\cdot T+1,\ (p-1)\cdot T+2,\ldots,(p-1)\cdot T+T\}$ (машина p во все промежутки времени), то при задании столбца из этой группы ($j\in N''$) мы полагаем $A[i,j]=1$, если $i\in I(p)$, и $A[i,j]=0$ в противном случае.

Затраты, связанные с покупкой машин, а также с их использованием при выполнении работ, учитываются при задании строки $C[N]$. В зависимости от постановки задачи строка $C[N]$ может вычисляться по различным формулам. В данной статье конкретный смысл строки $C[N]$ нам безразличен.

Часть $B[I']$ столбца $B[I]$ служит для задания имеющихся в наличии машин. Если данный вид машин в хозяйстве отсутствует, то группа компонент, отвечающая этому виду, должна состоять из нулей. При наличии же m экземпляров машин некоторого вида p следует положить $B[i]=-m$, если $i\in I(p)$. Вторая часть $B[I'']$ столбца $B[I]$ задает объем работ, подлежащих выполнению за все рассматриваемое время.

В дальнейшем нам будет удобно перейти к задаче, эквивалентной поставленной, но имеющей вид, при котором все условия записываются в виде равенств. Этот переход выполняется стандартным образом. Рассмотрим матрицу

$$\tilde{A}[I, N\cup\bar{N}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{A[I',N]}}^{N} & \overbrace{\hphantom{-1 \ddots -1}}^{\bar{N}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A[I',N] & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \\ \hline A[I'',N] & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, I' \\ \\ \}\, I'' \end{array} \end{array}$$

и положим $C[\bar{N}]=0$. Тогда условия (I) могут быть записаны в виде

$$\tilde{A}[I, N\cup\bar{N}]\cdot x[N\cup\bar{N}] = B[I],$$
$$C[N\cup\bar{N}]\cdot x[N\cup\bar{N}] \to \min$$

В дальнейшем столбцы-орты из множества $\bar{N}$ будем считать включенными в множество N' способов выполнения работ.

Рассмотрим структуру базисной матрицы поставленной задачи, считая, что индексы базисных столбцов образуют множество J .

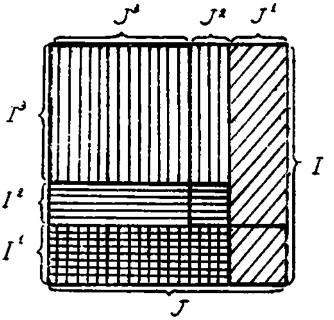

Рис. 2

Перестановкой строк и столбцов эта матрица может быть приведена к виду, изображенному на рис. 2. Столбцы, относящиеся к покупке машин, собраны в вертикальную полосу, и множество их номеров обозначено через J^1 $(J^1=J\cap N'')$. Множество I^1 номеров строк определяется требованием, предъявляемым к матрице $A[I\setminus I^1, J\setminus J^1]$: она должна быть квадратной и неособенной. Множество I^2 определяется равенством $I^2=(I\setminus I^1)\cap I''$, и в него могут входить лишь номера, отвечающие выполняемым работам. Наконец, множество J^2 выбирается так, чтобы матрица $A[I^3,J^3]$ была квадратной и неособенной. На рис. 2 изображена принципиальная схема разбиения базисной матрицы. Соотношение между размерами блоков на нем не выдержано. В действительности ширина вертикальной полосы (I,J^1) , как правило, в несколько десятков раз меньше всей матрицы, так как число столбцов этой полосы не может превышать числа видов машин, которые мы могли бы приобрести. Число строк горизонтальной полосы (I^2,J) также ограничено сверху сравнительно небольшим числом видов работ. Основную часть всей матрицы составляет блок $A[I^3,J^3]$. Однако структура подматрицы $A[I^3,J^3]$ двухкомпонентная, т.е. какдый столбец матрицы $A[I^3, J^3]$ имеет не более двух ненулевых компонент.

Более сложная задача оптимального выбора единого комплекта машин, способного обслужить хозяйство при различных погодных условиях, порождает матрицу блочно-диагональной структуры с вертикальной окаймляющей полосой. Размеры этой матрицы линейно зависят от числа учитываемых вариантов погодных условий. На рис. 3 изображена матрица задачи, в которой учтено три варианта условий, при которых должны выполняться работы. Например, если считать, что год может быть засушливым, средним по количеству осадков и дождливым, то мы

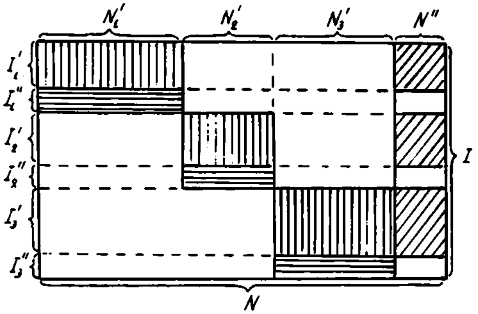

Рис. 3

получим задачу именно с такой матрицей. Перечень работ, которые надо выполнять в засушливый год, может отличаться от перечня, составленного для дождливого или средней влажности года. В общем случае при учете k вариантов погодных условий матрица $A[I,N]$ содержит k блоков $A[I_\ell, N_\ell']$, $\ell=1,2,\dots,k$, каждый из которых относится к определенному варианту условий и имеет точно такую структуру, как описанная выше подматрица $A[I,N']$ более простой задачи. В связи с этим множество N' разбивается на множества N_ℓ', $\ell=1,2,\dots,k$, и множество I – на k подмножеств I_ℓ, $\ell=1,2,\dots,k$. Разбиение каждого из множеств I_ℓ на I_ℓ' и I_ℓ'' выполнено так же, как это было сделано выше для множества I (номера строк из I_ℓ, относящиеся к выполняемым работам, образуют множество I_ℓ''; $I_\ell'=I_\ell \setminus I_\ell''$). Ширина окаймляющей вертикальной полосы остается практически такой же, так как зависит исключительно от ассортимента предлагаемых для покупки машин. В соответствии с разбиением множества I на множества I_ℓ, $\ell=1,2,\dots,k$, вертикальная полоса $A[I,N'']$ разделяется на части $A[I_\ell,N'']$, $\ell=1,2,\dots,k$. Тот факт, что каждая купленная машина в равной степени может быть в дальнейшем использована при любом варианте погодных условий, отражается равенствами $A[I_1,N'']=A[I_2,N'']=\cdots\ =A[I_k,N'']$ (если во все годы разбиение на временные промежутки выполнено одинаково). Каждая часть $A[I_\ell,N'']$ окаймляющей полосы имеет ту же структуру, что и вся полоса $A[I,N'']$ в задаче без учета различных вариантов погодных условий.

Рассмотрим теперь базисную матрицу $A[I,J]$, $J\subset N$, и выполним точно такую же перестановку строк и столбцов, какую мы проделали выше. Подматрица $A[I^3,J^3]$, оставаясь двухкомпонентной, распадается в данном случае на независимые блоки $A[I_\ell^3,J_\ell^3]$, $\ell=1,2,\ldots,k$. Подматрица $A[I^2,J^2]$ также имеет блочно-диагональную структуру. Для удобства изложения введем множество $K=\{1,2,\ldots,k\}$ и подытожим сказанное. Множество

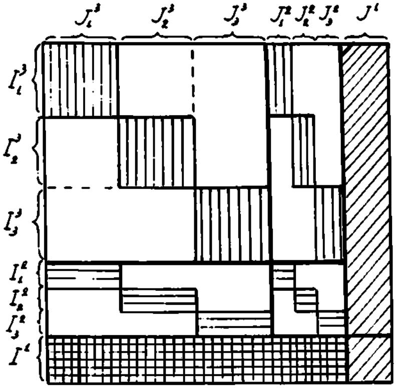

Рис. 4

J^1 определяется равенством $J^1=J\cap N''$. Множество I^1 (выбираемое так, чтобы матрица $A[I\setminus I^1,J\setminus J^1]$ была квадратной и неособенной) может включать номера строк как из множества I', так и из множества I''. Множества $I^2=(I\setminus I^1)\cap I''$ и $I^3=(I\setminus I^1)\cap I'$ теперь распадаются соответственно на множества $I_\ell^2=(I\setminus I^1)\cap I_\ell''$ и $I_\ell^3=(I\setminus I^1)\cap I_\ell'$. При этом для формирования множеств $J^2=\bigcup_{\ell\in K}J_\ell^2$ и $J^3=\bigcup_{\ell\in K}J_\ell^3$ мы должны при каждом ℓ выбрать разбиение $N_\ell'\cap J=J_\ell^2\cup J_\ell^3$ так, чтобы матрицы $A[I_\ell^3,J_\ell^3]$ были квадратными и неособенными.

Методы решения задач, имеющих матрицу описанной структуры, хорошо разработаны [1]. Мы конкретизируем один из этих методов применительно к данной задаче. Детального рассмотрения требуют четыре вопроса: выбор хранимой информации о базисной матрице, решение систем линейных уравнений на каждом шаге метода, преобразование хранимых данных, связанное с заменой столбца в базисной матрице, и выбор начального базиса.

Хранимая информация

Будем считать, что мы располагаем в каждый момент времени всеми данными о прямой базисной матрице $A[I,J]$. Она должна несомненно храниться в компактной форме: для каждого столбца $A[I,j]$, $j \in J \setminus J^1$, достаточно задать четыре компоненты (с указанием их номеров), для столбца же $A[I,j]$, $j \in J^1$ можно ограничиться заданием двух номеров i_1 и i_2 $(i_1 \leq i_2)$, которые являются соответственно начальным и конечным номерами группы единичных компонент ($A[i,j] = 1$, если $i_1 \leq i \leq i_2$, и $A[i,j] = 0$ в противном случае).

Помимо этого мы будем хранить две матрицы: матрицу $D[J^1, I^1]$, которая является частью матрицы $D[J,I]$, обратной к базисной матрице $A[I,J]$, и матрицу $F[J^2, I^2]$, которая представляет собой часть матрицы $F[J^3 \cup J^2, I^3 \cup I^2]$, обратной по отношению к части $A[I^3 \cup I^2, J^3 \cup J^2]$ базисной матрицы.

Нетрудно проверить, что $(A[I^2,J^2] - A[I^2,J^3] \cdot R[J^3,J^2])^{-1} = F[J^2, I^2]$, где матрица $R[J^3,J^2]$ определяется из условия $A[I^3,J^3] \cdot R[J^3,J^2] = A[I^3,J^2]$. Поскольку матрицы $A[I^3,J^3]$ и $A[I^3,J^2]$ обладают блочной структурой, ненулевые элементы матрицы $R[J^3,J^2]$ сосредоточены в блоках (J^3_ℓ, J^2_ℓ), $\ell \in K$. Ввиду этого матрица $F[J^2,I^2]$ также является блочно-диагональной, и хранить следует лишь ее части $F[J^2_\ell, I^2_\ell]$, $\ell \in K$.

Что касается двухкомпонентного блока (I^3, J^3), то нет надобности задавать его отдельно, дублируя значения и номера компонент, хранимых среди данных о всей матрице $A[I,J]$.

Забегая вперед, скажем, что нам потребуется решать системы уравнений с двухкомпонентной матрицей $A[I^3,J^3]$ (с различными правыми частями) и что мы будем считать алгоритм решения таких систем известным [1-3]. При использовании какого-либо из экономных алгоритмов требуется хранить некоторые дополнительные данные, в частности вектор, задающий определенное упорядочение элементов множества J^3 . К началу каждого шага мы считаем также известной часть $x[J]$ столбца $x[N]$ (поскольку $x[N \setminus J] = 0$). Кроме этого, мы располагаем строкой $C[J]$, а также данными, позволяющими для любого номера $j \in J$ определить, принадлежит ли он одному из множеств J^3_ℓ или $J^2_\ell (\ell \in K)$, или же множеству J^1 . Такими же данными мы должны располагать для выяснения принадлежности к определенному блоку строки с номером $i \in I$.

Решение систем линейных уравнений

Ниже приводятся формулы, по которым на каждом шаге метода могут быть получены решения систем линейных уравнений

$$y[I]\cdot A[I,J]=C[J], \qquad (2)$$

$$A[I,J]\cdot g[J]=A[I,j'], \quad j'\notin J. \qquad (3)$$

Формулы приводятся без вывода, так как они легко могут быть получены исходя из общей идеи применяемого метода [I] и, кроме того, их справедливость может быть проверена непосредственной подстановкой полученных решений в системы (2) и (3).

Процесс решения системы (2) расчленяется на ряд этапов.

I. Решение системы с двухкомпонентной матрицей $A[I^3,J^3]$ и правой частью $C[J^3]$:

$$y_1[I^3]\cdot A[I^3,J^3]=C[J^3]. \qquad (4)$$

Ввиду блочно-диагональной структуры матрицы $A[I^3,J^3]$ система (4) эквивалентна k независимым системам (с двухкомпонентными матрицами):

$$y_1[I^3_\ell]\cdot A[I^3_\ell,J^3_\ell]=C[J^3_\ell], \quad \ell\in K.$$

2. Вычисление $y_2[I^2]$ по формулам

$$y_2[I^2_\ell]=(C[J^2_\ell]-y_1[I^3_\ell]\cdot A[I^3_\ell,J^2_\ell])\cdot F[J^2_\ell,I^2_\ell], \quad \ell\in K.$$

3. Решение двухкомпонентных систем

$$y_2[I^3_\ell]\cdot A[I^3_\ell,J^3_\ell]=C[J^3_\ell]-y_2[I^2_\ell]\cdot A[I^2_\ell,J^3_\ell], \quad \ell\in K. \qquad (5)$$

В результате выполнения пп. 2 и 3 оказывается определенной строка $y_2[I^3\cup I^2]$, которая является решением системы уравнений

$$y_2[I^3\cup I^2]\cdot A[I^3\cup I^2,J^3\cup J^2]=C[J^3\cup J^2].$$

В дальнейшем мы будем использовать это обстоятельство.

4. Вычисление части окончательного решения

$$y[I^1]=(C[J^1]-y_2[I^3\cup I^2]\cdot A[I^3\cup I^2,J^1])\cdot D[J^1,I^1].$$

5. Нахождение вспомогательной строки $y_3[I^3]$ из систем уравнений

$$y_3[I^3_\ell]\cdot A[I^3_\ell,J^3_\ell]=C[J^3_\ell]-y[I^1]\cdot A[I^1,J^3_\ell], \quad \ell\in K. \qquad (6)$$

6. Вычисление $y[I^2]$ по формулам

$$y[I_l^2]=(C[J_l^2]-y[I^1]\cdot A[I^1,J_l^2]-$$
$$-y_3[I_l^3]\cdot A[I_l^3,J_l^2])\cdot F[J_l^2,I_l^2],\quad l\in K. \qquad (7)$$

7. Определение $y[I^3]$ из систем уравнений

$$y[I_l^3]\cdot A[I_l^3,J_l^3]=C[J_l^3]-y[I^1]\cdot A[I^1,J_l^3]-y[I_l^2]\cdot A[I_l^2,J_l^3],\quad l\in K.$$

Окончательное решение $y[I]$ системы (2) получается объединением частей этой строки, вычисленных в результате выполнения пп. 4, 6, 7.

Решение системы (3) получается по сходным формулам. Мы их выпишем по пунктам, как и для системы (2).

1'. Решение систем с матрицами двухкомпонентной структуры:

$$A[I_l^2,J_l^3]\cdot q_1[J_l^3]=A[I_l^2,j'],\quad l\in K.$$

2'. Вычисление

$$q_1[J_l^2]=F[J_l^2,I_l^2]\cdot(A[I_l^2,j']-A[I_l^2,J_l^3]\cdot q_1[J_l^3]),\quad l\in K.$$

3'. Решение систем

$$A[I_l^3,J_l^3]\cdot q_2[J_l^3]=A[I_l^3,j']-A[I_l^3,J_l^2]\cdot q_2[J_l^2],\quad l\in K.$$

Снова заметим, что полученный вспомогательный столбец $q_2[J^3\cup J^2]$ представляет собой решение "урезанной" системы (3):

$$A[I^3\cup I^2,J^3\cup J^2]\cdot q_2[J^3\cup J^2]=A[I^3\cup I^2,j'].$$

4'. Вычисление

$$q[J^1]=D[J^1,I^1]\cdot(A[I^1,j']-A[I^1,J^3\cup J^2]\cdot q_2[J^3\cup J^2]).$$

5'. Решение систем

$$A[I_l^3,J_l^3]\cdot q_3[J_l^3]=A[I_l^3,j']-A[I_l^3,J^1]\cdot q[J^1],\quad l\in K.$$

6'. Вычисление

$$q[J_l^2]=F[J_l^2,I_l^2]\cdot(A[I_l^2,j']-A[I_l^2,J_1]\cdot q[J_1]-$$
$$-A[I_l^2,J_l^3]\cdot q_3[J_l^3]),\quad l\in K.$$

7'. Решение систем

$$A[I_l^3,J_l^3]\cdot q[J_l^3]=A[I_l^3,j']-A[I_l^3,J^1]\cdot q[J^1]-$$
$$-A[I_l^3,J_l^2]\cdot q[J_l^2],\quad l\in K.$$

Будем считать, что при переходе к следующему шагу метода новое базисное множество J получается по формуле $\bar J=(J\setminus\{j''\})\cup\cup\{j'\}$, где $j''\in J$, $j'\notin J$. При выполнении такой замены нам потребуется менять распределение строк и столбцов базисной матрицы между блоками (I^3,J^3), (I^2,J^2) и (I^1,J^1). Введем четыре операции, которыми мы будем пользоваться при описании замены столбца. Аргументами каждой из них служат номер строки i и номер столбца j.

ОПЕРАЦИЯ I. Пусть $i\in I_r^3$, $j\in J_r^3$ при некотором фиксированном $r\in K$. Операция I заключается в пересчете хранимой информации, связанном с образованием новых множеств $\bar I_r^3=I_r^3\setminus\{i\}$, $\bar J_r^3=J_r^3\setminus\{j\}$, $\bar I_r^2=I_r^2\cup\{i\}$, $\bar J_r^2=J_r^2\cup\{j\}$. Происходит усечение двухкомпонентной матрицы $A[I_r^3,J_r^3]$ и окаймление матрицы $A[I_r^2,J_r^2]$. Усечение двухкомпонентной матрицы заключается в перестройке отвечающего ей графа и существенным образом зависит от выбранного алгоритма решения двухкомпонентной задачи. Мы не будем затрагивать этого вопроса в настоящей статье, а сошлемся на работу [I, гл. 4, §§2,3], где приводятся различные способы упорядочения ребер упомянутого графа и детальное описание его перестройки (с учетом различных вариантов упорядочения) при выполнении операции усечения. Все сказанное в равной степени относится к операции окаймления двухкомпонентной матрицы. Этими операциями мы будем пользоваться как известными.

Так как множества I^1 и J^1 не меняются, то не меняется и матрица $F[J^3\cup J^2, I^3\cup I^2]$. Из этой матрицы нам известна часть $F[J^2,I^2]$, состоящая из диагональных блоков $F[J_l^2,I_l^2]$, $l\in K$. Нам же теперь нужно получить для r-го блока расширенную матрицу

$$F[\bar J_r^2, \bar I_r^2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad i \quad & \quad I_r^2 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} F[j,i] & F[j,I_r^2] \\ \hline F[J_r^2,i] & F[J_r^2,I_r^2] \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \} \, j \\ \} \, J_r^2 \end{array}$$

Для этого надо найти j-ю строку и i-й столбец матрицы $F[J^3\cup J^2, I^3\cup I^2]$ и взять соответствующие их части. Строка $F[j, I^3\cup I^2]$ и столбец $F[J^3\cup J^2, i]$ являются решениями систем

$$F[j, I^3 \cup I^2]\cdot A[I^3 \cup I^2, J^3 \cup J^2] = E[j, J^3 \cup J^2],$$
$$A[I^3 \cup I^2, J^3 \cup J^2]\cdot F[J^3 \cup J^2] = E[I^3 \cup I^2, i],$$

где $E[j, J^3 \cup J^2]$ и $E[I^3 \cup I^2, i]$ – соответственно j-я строка и i-й столбец единичной матрицы. Решения этих систем согласно описанным выше общим схемам могут быть получены в результате выполнения следующих пунктов (здесь и ниже при конкретизации пунктов общей схемы сохраняется их нумерация).

I. Решение системы

$$u[I_z^3]\cdot A[I_z^3, J_z^3] = E[j, J_z^3]. \qquad (8)$$

I'. Решение системы

$$A[I_z^3, J_z^3]\cdot v[J_z^3] = E[I_z^3, i].$$

2. Вычисление интересующей нас части строки

$$F[j, I_z^2] = -u[I_z^3]\cdot A[I_z^3, J_z^2]\cdot F[J_z^2, I_z^2] = -U[J_z^2]\cdot F[J_z^2, I_z^2].$$

2'. Вычисление части столбца

$$F[J_z^2, i] = -F[J_z^2, I_z^2]\cdot A[I_z^2, J_z^3]\cdot v[J_z^3] = -F[J_z^2, I_z^2]\cdot V[I_z^2].$$

Мы ввели обозначения: $U[J_z^2] = u[I_z^3]\cdot A[I_z^3, J_z^2]$, $V[I_z^2] = A[I_z^2, J_z^3]\cdot v[J_z^3]$. Придерживаясь общего правила для определения элемента $F[j, i]$ $(i \in I_z^3)$, следовало бы решить систему (п. 3)

$$F[j, I_z^3]\cdot A[I_z^3, J_z^3] = E[j, J_z^3] + U[J_z^2]\cdot F[J_z^2, I_z^2]\cdot A[I_z^2, J_z^3].$$

Однако этого можно избежать. Умножив последнее равенство справа на $(A[I_z^3, J_z^3])^{-1}$ и выписав i-ю компоненту полученного соотношения, найдем

$$F[j, i] = u[i] + U[J_z^2]\cdot F[J_z^2, I_z^2]\cdot V[I_z^2].$$

ОПЕРАЦИЯ II затрагивает те же блоки, что и операция I, но $i \in I_z^2$, $j \in J_z^2$, уменьшается блок (I_z^2, J_z^2) и расширяется двухкомпонентный: $\bar I_z^2 = I_z^2 \setminus \{i\}$, $\bar J_z^2 = J_z^2 \setminus \{j\}$, $\bar I_z^3 = I_z^3 \cup \{i\}$, $\bar J_z^3 = J_z^3 \cup \{j\}$. Как уже говорилось, операцию окаймления двухкомпонентной задачи мы считаем известной. Из матрицы $F[J_z^2, I_z^2]$ вычеркивается строка с номером j и столбец с номером i:

$$\bar F[\bar J_z^2, \bar I_z^2] = F[J_z^2 \setminus \{j\}, I_z^2 \setminus \{i\}].$$

ОПЕРАЦИЯ III. Снова $i \in I_z^2$, $j \in J_z^2$, $\bar I_z^2 = I_z^2 \setminus \{i\}$, $\bar J_z^2 = J_z^2 \setminus \{j\}$, но выбывающие строка и столбец подсоединяются к блоку (I^1, J^1): $\bar I^1 = I^1 \cup \{i\}$, $\bar J^1 = J^1 \cup \{j\}$. Существенно новым в этом случае является то обстоятельство, что на этот раз уменьшается матрица $A[I^3 \cup I^2, J^3 \cup J^2]$, часть обратной к которой мы храним. Обратная матрица (и ее часть) при такой операции усечения может быть вычислена по следующей формуле:

$$\bar{F}[\bar{J}_r^2, \bar{I}_r^2] = F[J_r^2 \setminus \{j\}, I_r^2 \setminus \{i\}] - (F[J_r^2 \setminus \{j\}, i] \cdot F[j, I_r^2 \setminus \{i\}]) / F[j, i].$$

Ввиду блочно-диагонального строения матрицы $F[J^2, I^2]$ остальные ее блоки преобразованием не затрагиваются и $\bar{F}[J_\ell^2, I_\ell^2] = F[J_\ell^2, I_\ell^2]$, $\ell \in K \setminus \{r\}$.

Для того чтобы выписать расширенную матрицу

$$D[\bar{J}^1, \bar{I}^1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad i \quad & \quad I^1 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} D[j, i] & D[j, I^1] \\ \hline D[J^1, i] & D[J^1, I^1] \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \} \, j \\ \} \, J^1 \end{array}$$

не хватает (не хранимых нами) частей $D[j, i]$, $D[j, I^1]$, $D[J^1, i]$ матрицы $D[J, I]$, обратной к $A[I, J]$. Строка $D[j, I^1]$ и столбец $D[J, i]$ могут быть определены из систем $D[j, I] \times$ $\times A[I, J] = E[j, J]$, $A[I, J] \cdot D[J, i] = E[I, i]$, которые являются соответственно системами типа (2) и (3), если принять $y[I] = D[j, I]$ и $g[J] = D[J, i]$. Однако трудоемкость решения этих систем значительно снижается ввиду того, что в правых частях стоят орты. Поскольку $E[j, J^3] = 0$ и $E[I^3, i] = 0$, необходимость выполнять пп. I и I$'$ отпадает: $y_1[I^3] = 0$ и $g_1[J^3] = 0$. Дальнейшие вычисления также значительно упрощаются. Выполняя пп. 2 и 2$'$, найдем

$$y_2[I_\ell^2] = \begin{cases} F[j, I_r^2], & \text{если } \ell = r, \\ 0, & \text{если } \ell \in K \setminus \{r\}; \end{cases}$$

$$g_2[J_\ell^2] = \begin{cases} F[J_r^2, i], & \text{если } \ell = r, \\ 0, & \text{если } \ell \in K \setminus \{r\}. \end{cases}$$

Так как правые части систем (5) для $\ell \in K \setminus \{r\}$ нулевые, то $y_2[I_\ell^3] = 0$ при $\ell \in K \setminus \{r\}$, и следует решить лишь одну систему

$$y_2[I_r^3] A[I_r^3, J_r^3] = -F[j, I_r^2] \cdot A[I_r^2, J_r^3].$$

Аналогично находим, что при $\ell \in K \setminus \{r\}$ столбец $g_2[J_\ell^3] = 0$, и определяем $g_2[J_r^3]$ из системы уравнений

$$A[I_r^3, J_r^3] \cdot g_2[J_r^3] = -A[I_r^3, J_r^2] \cdot F[J_r^2, i]. \qquad (9)$$

Наконец, выполняя ш. 4 и 4′, находим интересующие нас части обратной матрицы $D[J, I]$:

$$D[j, I^1] = -(y_2[I_z^3]\cdot A[I_z^3, J^1] + F[j, I_z^2]\cdot A[I_z^2, J^1])\times$$
$$\times D[J^1, I^1] = -U_1[J^1]\cdot D[J^1, I^1],$$
$$D[J^1, i] = -D[J^1, I^1](A[I^1, J_z^3]\cdot g_2[J_z^3] + A[I^1, J_z^2]\cdot F[J_z^2, i]) =$$
$$= -D[J^1, I^1]\cdot V_1[I^1]. \qquad (10)$$

Остается вычислить элемент $D[j, i]$. Для этого определим из (6)

$$y_3[I_z^3] = -D[j, I^1]\cdot A[I^1, J_z^3]\cdot(A[I_z^3, J_z^3])^{-1} =$$
$$= U_1[J^1]\cdot D[J^1, I^1]\cdot A[I^1, J_z^3]\cdot(A[I_z^3, J_z^3])^{-1}$$

и подставим полученное выражение в (7), выписав лишь i-ю компоненту векторного равенства (7):

$$y[i] = D[j, i] = (C[J_z^2] - D[j, I^1]\cdot A[I^1, J_z^2] - U_1[J^1]\cdot D[J^1, I^1]\times$$
$$\times A[I^1, J_z^3]\cdot(A[I_z^3, J_z^3])^{-1}\cdot A[I_z^3, J_z^2])\cdot F[J_z^2, i].$$

Поскольку ввиду (9) $(A[I_z^3, J_z^3])^{-1}\cdot A[I_z^3, J_z^2]\cdot F[J_z^2, i] = -g_2[J_z^3]$ и ввиду (10) $D[J^1, I^1]\cdot V_1[I^1] - D[J^1, I^1]\cdot A[I^1, J_z^2]\cdot F[J_z^2, i] = D[J^1, I^1]\cdot A[I^1, J_z^3]\cdot g_2[J_z^3]$, окончательно получим

$$D[j, i] = F[j, i] + U_1[J^1]\cdot D[J^1, I^1]\cdot V_1[I^1].$$

ОПЕРАЦИЯ IУ. Номер строки $i \in I^1$, номер столбца $j \in J^1$. Выбывающие из блока (I^1, J^1) строка и столбец присоединяются к блоку (I^2, J^2): $\bar{I}^1 = I^1 \setminus \{i\}$, $\bar{J}^1 = J^1 \setminus \{j\}$, $\bar{I}^2 = I^2 \cup \{i\}$, $\bar{J}^2 = J^2 \cup \{j\}$. Происходит окаймление матрицы $A[I^3 \cup I^2, J^3 \cup J^2]$. При этом в матрице $D[J^1, I^1]$ нужно просто вычеркнуть j-ю строку и i-й столбец. Что касается матрицы F, то заметим, что операция IУ выполняется лишь тогда, когда столбец j оказывается среди остальных столбцов множества J^1 "чужим", т.е. когда $j \notin N''$. В таком случае $j \in N_z'$ при некотором фиксированном $z \in K$. Поскольку расширенная матрица $A[I^3 \cup I^2 \cup \{i\}, J^3 \cup J^2 \cup \{j\}]$ должна быть неособенной, то строка i должна принадлежать z-му блоку и $\bar{F}[J_\ell^2, I_\ell^2] = F[J_\ell^2, I_\ell^2]$ для $\ell \in K \setminus \{z\}$. Для блока z получаются формулы:

$$F[J_z^2 \cup \{j\}, I_z^2 \cup \{i\}] =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{F[J_r^2, I_r^2] + \frac{g_2^{(1)}[J_r^2]\cdot y_2^{(1)}[I_r^2]}{\alpha}}}^{I_r^2} & \overbrace{\hphantom{-\frac{g_2^{(1)}[J_r^2]}{\alpha}}}^{i} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} F[J_r^2, I_r^2] + \frac{g_2^{(1)}[J_r^2]\cdot y_2^{(1)}[I_r^2]}{\alpha} & -\frac{g_2^{(1)}[J_r^2]}{\alpha} \\ \hline -\frac{y_2^{(1)}[I_r^2]}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, J_r^2 \\ \}\, j \end{array} \end{array} \qquad (11)$$

где $\alpha = A[i,j] - A[i, J_r^3 \cup J_r^2]\cdot g_2^{(1)}[J_r^3 \cup J_r^2]$, а $y_2^{(1)}[I_r^3 \cup I_r^2]$ и $g_2^{(1)}[J_r^3 \cup J_r^2]$ – решения систем линейных уравнений

$$y_2^{(1)}[I_r^3 \cup I_r^2]\cdot A[I_r^3 \cup I_r^2, J_r^3 \cup J_r^2] = A[i, J_r^3 \cup J_r^2],$$

$$A[I_r^3 \cup I_r^2, J_r^3 \cup J_r^2]\cdot g_2^{(1)}[J_r^3 \cup J_r^2] = A[I_r^3 \cup I_r^2, j].$$

Для нахождения частей этих решений $y_2^{(1)}[I_r^2]$ и $g_2^{(1)}[J_r^2]$, необходимых для применения формул (11), достаточно выполнить пп. 1,2 и 1′, 2′ общего правила решения систем (для $\ell = r$). Кроме того (при $\ell = r$), следует выполнить п. 3′, чтобы найти $g_2^{(1)}[J_r^3]$, участвующий в вычислении α .

Сама замена столбца в базисной матрице выполняется различно в зависимости от того, из какой части матрицы выбывает столбец $A[I, j'']$ и какого вида вводимый столбец $A[I, j']$. Мы будем различать 3 случая.

а) В первую очередь рассмотрим случай, когда $j'' \in J^1$. Матрица $D[J^1, I^1]$ преобразуется по известным формулам:

$$\bar{D}[(J^1\setminus\{j''\})\cup\{j'\}, I^1] = D[J^1, I^1] - (g[J^1] - E[J^1, j''])\cdot D[j'', I^1]/g[j''], \quad (12)$$

где $g[J^1]$ – соответствующая часть решения системы (3). Если $j' \in N''$, то на этом преобразования заканчиваются. Если же $j' \in N_r'$ $(r \in K)$, то такой столбец нарушает структуру вертикальной окаймляющей полосы базисной матрицы. Выберем номер $i_0 \in I^1$ таким образом, чтобы

$$\alpha = \alpha(i_0) = \max_{i \in I^1} \{|A[i,j'] - A[i, J_r^3 \cup J_r^2]\cdot g[J_r^3 \cup J_r^2]|\},$$

и выполним операцию IУ с аргументами i_0 и j' . Если окажется, что выбранный номер i_0 принадлежит I_r'' , то структурных нарушений больше нет, и выполнением операции IУ преобразования заканчиваются. В противном случае следует определить строку $u[I_r^3]$ из системы $u[I_r^3]\cdot A[I_r^3, J_r^3] = A[i_0, J_r^3]$, найти номер $j_0 \in J_r^2 \cup \cup \{j'\}$ из условия $\beta = \beta(j_0) = \max_{j \in (J_r^2 \cup \{j'\})} \{|A[i_0, j] - -u[I_r^3]\cdot A[I_r^3, j]|\}$ и с аргументами i_0, j_0 выполнить операцию II.

в) Следующим рассмотрим случай, когда $j'' \in J_s^2$, $s \in K$. Найдем $\max\limits_{i \in I_s^2} \{|F[j'', i]|\} = |F[j'', i_1]|$ и выполним операцию III с аргументами j'' и i_1. После этого мы окажемся в условиях уже рассмотренного случая а).

с) Пусть, наконец, $j'' \in J_s^3$, $s \in K$. Для того чтобы свести этот случай к предыдущему, надо выполнить операцию I, взяв $j = j''$ и положив i равным i_2 – номеру наибольшей по модулю компоненте строки $u[I_s^3]$, которая является решением системы (8) при $j = j''$ и $\tau = s$. Затем надо поступить, как в предыдущем случае, и свести дело к случаю а). Однако после того как мы выполним все предписанные преобразования, в рассматриваемом случае в базисной матрице может остаться структурное нарушение, если строка с номером i_2 ($i_2 \in I_s'$) не исключилась (в результате проведенных преобразований) из сформированного множества $\bar{I}_s^2$. Напомним, что должно быть $\bar{I}_s^2 = (I \setminus I^1) \cap I_s''$. Если это не так и структура блока $(\bar{I}_s^2, \bar{J}_s^2)$ нарушена, следует поступить аналогично тому, как мы закончили случай а), т.е. определить строку $u[\bar{I}_s^3]$ из системы $u[\bar{I}_s^3] \cdot A[\bar{I}_s^3, \bar{J}_s^3] = A[i_2, \bar{J}_s^3]$ и, найдя номер $j = j_2$, при котором достигает максимума выражение $|A[i_2, j] - u[\bar{I}_s^3] \cdot A[\bar{I}_s^3, j]|$ при $j \in \bar{J}_s^2$, выполнить операцию II с аргументами i_2, j_2.

Выбор начального базиса

В общем случае для нахождения исходного допустимого решения рекомендуется решать вспомогательную задачу, в постановке которой фигурируют фиктивные способы производства. В процессе решения вспомогательной задачи эти фиктивные способы должны быть исключены из базисной матрицы. Решение вспомогательной задачи трудоемко и часто соизмеримо по времени с решением основной задачи. Однако для рассмотренной выше задачи начальное решение может быть легко выписано непосредственно.

Рассмотрим вспомогательный вектор $\mu[I]$, первоначально совпадающий с $B[I]$. В дальнейшем отвечающая p-й машине в период t компонента $\mu[i]$, $i = (p-1) \cdot T + t$, этого вектора будет задавать число (с обратным знаком) машин данного вида, свободных от работы в этот период. Рассмотрим, кроме того, функцию $\beta(x)$, которая монотонно убывает, $\beta(0) = 1$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \beta(x) = 0$. Например, в качестве $\beta(x)$ можно взять e^{-x}. С помощью введенной функции мы хотим определить еще один показатель $\gamma(i)$, относящийся к машино-периоду. Пусть p - номер некоторой машины и C_p - затраты на покупку этой машины. Тогда для $i \in I(p)$ положим $\gamma(i) = \beta(-\mu[i]) \cdot C_p$. Если в некоторый период машин вида p нет или мало, то значение $\gamma(i)$ в этот период практически совпадает с затратами на покупку такой машины. При наличии же большого количества свободных машин затраты на покупку перестают в этот период играть существенную роль.

Для i -й работы обозначим через $J(i)$ множество номеров j таких столбцов $A[I, j]$, у которых $A[i, j] > 0$, т.е. рассмотрим множество способов, которыми данная работа может быть выполнена. Будем обозначать в дальнейшем через $p_{осн}(j)$ номер основной машины, применяемой в j -м способое, $p_{пр}(j)$ - номер прицепа (если он используется) и через $t(j)$ - номер периода. Тогда $i_1(j) = (p_{осн}(j) - 1) \cdot T + t(j)$ и $i_2(j) = (p_{пр}(j) - 1) \cdot T + t(j)$, если в работе участвует прицеп.

Для каждой работы мы хотим подобрать в некотором смысле наиболее эффективный способ ее производства и полностью выполнить эту работу выбранным способом. Составим список всех работ, в котором их номера будут упорядочены следующим образом: если в результате выполнения некоторой работы производится продукт, используемый в качестве сырья при выполнении ряда других работ, то номера этих работ должны предшествовать в списке номеру работы, производящей данное сырье.

Положим $I_\ell^2 = I_\ell''$ для $\ell \in K$ и будем последовательно перебирать номера работ из упорядоченного списка. Пусть очередной номер i° принадлежит некоторому множеству $I_\tau^2 (\tau \in K)$. Найдем

$$\min_{j \in J(i^\circ)} \{(C[j] + \gamma(i_1(j)) + \gamma(i_2(j))) \;/\; A[i^\circ, j]\}.$$

Если работа выполняется одной основной машиной, то считаем, что в приведенной формуле $\gamma(i_2(j)) = 0$. Обозначим через j° номер, при котором реализуется минимум, включим номер j° в множество J_τ^2 и положим $x[j^\circ] = \mu[i^\circ] \;/\; A[i^\circ, j^\circ]$. Перевычислим вектор $\mu[I]$ по формуле $\mu[I] \Leftarrow \mu[I] - A[I, j^\circ] \cdot x[j^\circ]$. Если окажется $\mu[i_1(j^\circ)] > 0$, то это будет свидетельствовать о том, что следует докупить машину $p_{осн}(j^\circ)$. При этом мы будем различать два случая. Если столбец $A[I, j_1]$ покупки этой машины еще не включен в число базисных, то введем его в базис, отнеся номер j_1 к множеству J^1 , а номер $i_1(j^\circ)$ - к множеству

I^1, приняв по определению на данный момент $i(j_1)=i_1(j^\circ)$. Положим $x[j_1]=\mu[i_1(j^\circ)]$ и снова перевычислим вектор $\mu[I]$, выполнив засылку: $\mu[I]\Leftarrow\mu[I]-A[I,j_1]\cdot\mu[i_1(j^\circ)]$.
Если же столбец $A[I,j_1]$ уже присутствует в базисе $(j_1\in J^1)$, то заменим в множестве I^1 старый номер $i(j_1)$ на $i_1(j^\circ)$. Перевычислим $x[j_1]$ и $\mu[I]$:

$$x[j_1]\Leftarrow x[j_1]+\mu[i_1(j^\circ)],\qquad \mu[I]\Leftarrow\mu[I]-A[I,j_1]\,\mu[i_1(j^\circ)].$$

Если окажется, что $\mu[i_2(j^\circ)]>0$, то это будет значить, что надо выполнить докупку прицепа $p_{np}(j^\circ)$, используемого в выбранном нами способе j°, т.е. включить в базис еще один столбец покупки $A[I,j_2]$, $j_2\in N''$. Поступать при этом следует точно так же, как и при покупке основной машины, имея в виду, что роль номеров j_1 и $i_1(j^\circ)$ будут играть соответственно номера j_2 и $i_2(j^\circ)$.

После того как мы переберем все номера из упорядоченного списка работ, окажутся выделенными блоки (I^2_ℓ,J^2_ℓ) при $\ell\in K$ и блок $(I^1,J^1_\cdot)$. При этом каждому $j\in J^1$ соотнесен номер $i(j)\in I^1$. Кроме того, получен вектор $x[J^2\cup J^1]$. Перестановкой строк и столбцов в пределах каждого из блоков (I^2_ℓ,J^2_ℓ) мы можем добиться того, что подматрицы $A[I^2_\ell,J^2_\ell]$ станут диагональными с элементами, равными $A[i_3(j),j]$, $j\in J^2_\ell$. Аналогично, перестановкой строк и столбцов в пределах блока (I^1,J^1) мы можем привести матрицу $A[I^1,J^1]$ к единичной матрице с диагональными элементами $A[i(j),j]=1$, $j\in J^1$, причем $D[J^1,I^1]=A^T[J^1,I^1]$ (индекс T означает транспонирование).

Остается задать двухкомпонентный блок. Положим $I^3=I\setminus(I^1\cup I^2)$ и будем перебирать последовательно компоненты части $\mu[I^3]$ рабочего вектора $\mu[I]$. Для каждого $i\in I^3$ включим столбец-орт $A[I,n+i]=E[I,i]$ в число базисных и положим $x[n+i]=-\mu[i]$. Таким образом, $J^3=\{n+i,\ i\in I^3\}$. На этом построение исходного допустимого решения закончено.

После соответствующей перестановки строк и столбцов построенная начальная базисная матрица имеет вид, изображенный на рис. 5. Как уже говорилось, матрица $A[I^2,J^2]$ является диагональной. Поэтому матрицы $F[J^2_\ell,I^2_\ell]$ – диагональные матрицы с диагональными элементами $1/A[i_3(j),j]$, а матрица $D[J^1,I^1]$ единичная (точнее, $D[J^1,I^1]=A^T[I^1,J^1]$).

Учет ортов

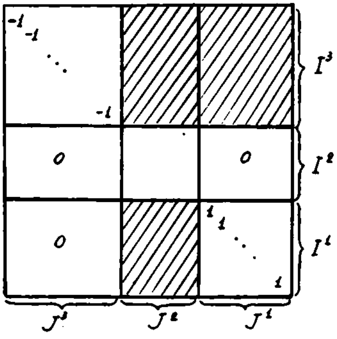

Рис. 5

Особенностью рассмотренной задачи является наличие во всех базисных матрицах (точнее, в их двухкомпонентных блоках) большого количества ортов. Это связано с тем, что каждая из машин имеет наибольшую нагрузку в определенное время года, оставаясь совсем незагруженной или только частично загруженной в течение целого ряда периодов. Целесообразно выделить орты в самостоятельный блок. Это существенно сократит размеры двухкомпонентного блока, что чрезвычайно важно, поскольку при замене столбца в базисной матрице и при решении систем (2) и (3) происходит многократное обращение к решению систем с двухкомпонентной матрицей. Кроме того, сократится общий объем хранимой информации, так как все столбцы $A[I,j], j\in J^3$ при стандартном способе хранения мы вынуждены были считать четырехкомпонентными. Мы выделим орты и соответствующие им строки в специальный блок (I°, J°), как показано на рис. 6. Матрица $A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ]$ обладает всеми структурными особенностями матрицы $A[I,J]$, с которой мы до сих пор имели дело, но она окаймлена столбцами-ортами с номерами из множества J° и строками, номера которых принадлежат множеству I°.

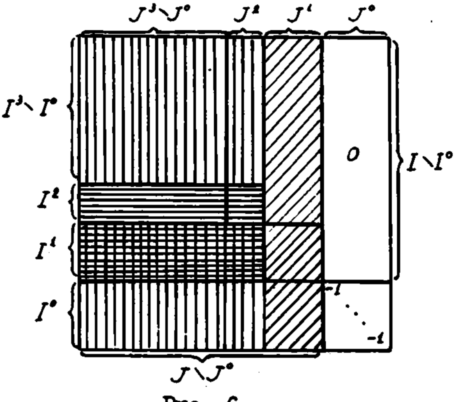

Рис. 6

Если столбцы двухкомпонентного блока были определенным образом упорядочены в соответствии с требованиями того или иного алгоритма решения двухкомпонентных систем, то вычеркивание ортов и "уплотнение" остальных столбцов с сохранением их взаимного расположения не нурушает условий упорядочения ни в одном из этих алгоритмов.

Рассмотрим вопрос о решении систем с такой матрицей. При решении системы $y[I]\cdot A[I,J]=C[J]$ прежде всего заметим, что $y[I^\circ]=0$. Это следует из того, что $C[J^\circ]=0$, а при структуре матрицы, изображенной на рис. 5, $y[I^\circ]$ определяется системой уравнений $y[I^\circ]\cdot A[I^\circ,J^\circ]=C[J^\circ]$. После этого остается найти $y[I\setminus I^\circ]$, решив систему уравнений $y[I\setminus I^\circ]\times$ $\times A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ]=C[J\setminus J^\circ]$, матрица которой имеет структуру системы (2). Ввиду этого решение $y[I\setminus I^\circ]$ может быть получено способом, описанным выше применительно к системе (2).

Для нахождения решения $q[J]$ системы $A[I,J]\cdot q[J]=$ $=A[I,j']$ поступим следующим образом. Решим сначала систему $A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ]\cdot q[J\setminus J^\circ]=A[I\setminus I^\circ, j']$. Очевидно, что $q[J^\circ]$ определяется системой уравнений с подправленной правой частью $\bar{A}[I^\circ,j']=A[I^\circ,j']-A[I^\circ,J\setminus J^\circ]\cdot q[J\setminus J^\circ]$: $A[I^\circ,J^\circ]\cdot q[J^\circ]=$ $=\bar{A}[I^\circ,j']$. Но в матрице $A[I^\circ,J^\circ]$ каждый столбец состоит из нулей, за исключением компоненты $i(j)$, равной -I. Поэтому матрица, обратная к $A[I^\circ,J^\circ]$, совпадает с ее транспонированной, и мы имеем $q[J^\circ]=A^T[J^\circ,I^\circ]\cdot A[I^\circ,j']$. Это значит, что столбец $q[J^\circ]$ получается перестановкой компонент столбца $\bar{A}[I^\circ,j']$ и изменением у них знаков на противоположные.

При замене столбца также возникают некоторые изменения. Мы будем различать два случая. Рассмотрим сначала случай, когда выбывающий столбец (с номером j'') не является ортом. Выполним прежде всего замену столбца в полном соответствии с приведенным выше описанием и если в результате этого окажется, что в двухкомпонентный блок вошел орт, то вычеркнем его номер j и отвечающую ему строку $i(j)$ из двухкомпонентного блока и присоединим их к блоку ортов (I°,J°). Заметим, что орт мог присоединиться к двухкомпонентному блоку при выполнении операции П в пп. а) и с).

Рассмотрим теперь случай, когда $j''\in J^\circ$. Мы сведем этот случай к уже рассмотренному, формально переведя столбец j'' и строку $i(j'')$ в блок (I^1,J^1), т.е. положив $\bar{I}^\circ=I^\circ\setminus\{i(j'')\}$, $\bar{J}^\circ=J^\circ\setminus\{j''\}$, $\bar{I}^1=I^1\cup\{i(j'')\}$, $\bar{J}^1=J^1\cup\{j''\}$. При этом следует выполнить окаймление матрицы $A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ]$ строкой

$A[i(j''), J\setminus J^\circ]$, столбцом $A[I\setminus I^\circ, j'']$ и элементом $A[i(j''), j'']$. Напомним, что нас интересует часть $D[\bar J^1, \bar I^1]$ матрицы, обратной к матрице $A[I\setminus \bar I^\circ, J\setminus \bar J^\circ]$. Применив формулы окаймления, получим

$$D[\bar J^1, \bar I^1] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \qquad\qquad I^1 \qquad\qquad & \qquad i(j'') \qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} D[J^1, I^1] + \dfrac{g[J^1]\cdot y[I^1]}{\alpha} & -\dfrac{g[J^1]}{\alpha} \\ \hline -\dfrac{y[I^1]}{\alpha} & \dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \} J^1 \\ \\ \} j'' \end{array} \end{array}$$

где $\alpha = A[i(j''), j''] - A[i(j''), J\setminus J^\circ]\cdot g[J\setminus J^\circ]$, а $y[I\setminus I^\circ]$ и $g[J\setminus J^\circ]$ – решения систем

$$y[I\setminus I^\circ]\cdot A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ] = A[i(j''), J\setminus J^\circ],$$

$$A[I\setminus I^\circ, J\setminus J^\circ]\cdot g[J\setminus J^\circ] = A[I\setminus I^\circ, j''].$$

Поскольку окаймляющим столбцом у нас является орт, столбец $A[I\setminus I^\circ, j'']$ равен нулю и, следовательно, $g[J\setminus J^\circ] = 0$. Тогда $\alpha = A[i(j''), j''] = -1$, и приведенная формула для вычисления $D[\bar J^1, \bar I^1]$ значительно упрощается:

$$D[\bar J^1, \bar I^1] = \left[\begin{array}{c|c} D[J^1, I^1] & 0 \\ \hline y[I^1] & -1 \end{array}\right]$$

После этого мы оказываемся в рамках уже рассмотренного случая и можем выполнить замену столбца по общему правилу (п. а)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели задачу формирования парка сельскохозяйственных машин при наличии вариантности в погодных условиях. Поставленная модель имеет более широкое применение. С незначительными переделками алгоритм можно использовать для широкого класса двухэтапных задач стохастического программирования. В частности, применительно к стохастике погодных условий такая модель подробно рассмотрена в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977.
2. КИМ К.В. Об эффективности решения двухкомпонентных задач ли-

нейного программирования. - Экономика и мат. методы, 1974, т.10, вып. 3, с.621-631.
3. БУЛАВСКИЙ В.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Алгоритмы с упорядоченным базисом для двухкомпонентной задачи линейного программирования. - Оптимизация, 1977, вып. 19(36), с.29-47.
4. КАРДАШ В.А. Об одном подходе к постановкам стохастических задач оптимизации производства. - Экономика и мат. методы, 1977, т.13, вып. 6, с.1312-1316.

Поступила в ред.-изд. отдел
14.10.1980 г.