Выпуск 25 (42) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ. ОДНОСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ

А.М.Рубинов

Здесь рассматривается дискретный вариант одной из моделей экономического прогнозирования, сформулированной Н.Н.Моисеевым [1]. Особенностью этой модели является то обстоятельство, что заданному количеству основных фондов соответствует нормативная численность рабочей силы и тем самым нормативная фондовооруженность. Переход к дискретному времени дает возможность рассматривать модель Моисеева как модель экономической динамики неймановского типа. Это позволяет, опираясь на понятие неймановского темпа роста, предложить достаточно правдоподобную гипотезу о выборе ставки заработной платы (и, в частности, о ее зависимости от производительности труда). С другой стороны, модель Моисеева, функционирующая в дискретном времени, представляет собой один из немногих известных примеров неймановского типа, в которых производственные отображения зависят не только от времени, но и от состояния.

1. Модель Моисеева. Данная модель описывает односекторную экономику, состояние которой характеризуется следующими величинами:

$P(t)$ – количество продукта, выпускаемого в единицу времени;
$K(t)$ – основные фонды;
$y(t)$ – поток инвестиций;
$w(t)$ – поток потребления;
$L(t)$ – количество рабочей силы.

Переменная t (время) пробегает некоторый интервал числовой прямой.

Кроме того, считаются заданными коэффициент выбытия фондов $\mu\ (0<\mu<1)$ и производственная функция $F(K,L)$, описывающая выпуск продукта.

Предполагается, что известна нормативная численность рабочей силы $L^*(K)$, требуемой при данных фондах K, т.е. нормативная фондовооруженность $\gamma^*(K)$. Н.Н.Моисеев считает также, что производственная функция определена лишь в некоторой окрестности кривой $L^*(K)$ и там достаточноточно аппроксимируется функцией Кобба - Дугласа, т.е. выражением вида $\gamma K^{\delta}L^{1-\delta}$, где параметр γ - эффективность использования фондов - может зависеть от времени (в этом случае γ отражает влияние научно-технического прогресса), а параметр δ неизменен.

Основные уравнения модели имеют вид

$$P=y+w;\quad \dot{K}=y-\mu K;\quad P=F(K,L). \tag{I}$$

Кроме того, принимается гипотеза о том, что потребление пропорционально численности рабочей силы

$$w=\omega L, \tag{2}$$

где ω - параметр, характеризующий "уровень жизни", который можно рассматривать так же, как ставку заработной платы. В случае нормативной фондовооруженности для замыкания модели требуется ввести еще ту или иную гипотезу об изменении ω (разные гипотезы приводят к разным вариантам модели).

ЗАМЕЧАНИЕ. В [I] отмечено, что в более точной модели последнее из 3 равенств (I) следует заменить на неравенство. Это вызвано тем, что производственные функции указывают лишь на предельные возможности производства.

2. Дискретный вариант модели Моисеева. Дадим описание модели, изучаемой здесь. Предполагается, что информация о состоянии экономики поступает лишь в моменты времени $t=0,1,\ldots$ Считаем, что для каждой точки $x=(K,L)$ и моента времени t определена производственная функция $F_{x,t}$, имеющая вид

$$F_{x,t}(\tilde{K},\tilde{L})=\gamma(K,L,t)F(\tilde{K},\tilde{L}), \tag{3}$$

где F - некоторая заданная производственная функция, определенная при всех $K,L\geqslant 0$, $\gamma(K,L,t)$ - число, указывающее эффективность использования фондов в состоянии $x=(K,L)$ и момент времени t.

Предполагается заданной нормативная фондовооруженность

$r_t^*(K)$ и коэффициент выбытия фондов μ_t $(0<\mu_t<1)$.

Пусть P', K', L', w', y' – количества продукта, фондов, рабочей силы, потребления и инвестиций в момент $t+1$, возможные при наличии фондов K и рабочей силы L в момент t. Разностный аналог уравнений (I) имеет вид

$$P' = y' + w' \; ; \; K' = (1-\mu_t)K + y';$$
$$P' = F_{x,t}(K, L), \quad x = (K, L).$$

Учитывая замечание в п.I, последнее равенство заменим на неравенство, кроме того, второе равенство также заменим на неравенство (это означает возможность неиспользования выделенных инвестиций). Окончательно придем к следующей системе соотношений:

$$P' = y' + w'; \quad K' \leq (1-\mu_t)K + y';$$
$$P' \leq F_{x,t}(K,L); \; K' \geq 0, y' \geq 0, w' \geq 0. \tag{4}$$

Пусть ω_{t+1} – ставка заработной платы в момент $t+1$. Вместо равенства (2) напишем неравенство

$$w' \geq \omega_{t+1} L'. \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) вместе с некоторой гипотезой о выборе коэффициентов ω_{t+1} и задают рассматриваемую модель[ж)], которая в дальнейшем обозначается через $\mathfrak{M}_1$.

Положим $\nu_t = 1-\mu_t$. Для вектора $x=(K,L)$ и момента времени t определим суперлинейное отображение $a_{x,t}$, где

$$a_{x,t}(\tilde{K}, \tilde{L}) = \{(K', L') : 0 \leq K' \leq \nu_t \tilde{K} + K_0;$$
$$K_0 \geq 0; \quad 0 \leq L' \leq L_0; \; K_0 + \omega_{t+1} L_0 \leq F_{x,t}(\tilde{K}, \tilde{L})\}. \tag{6}$$

(По поводу суперлинейных многозначных отображений см., например, [2].)

Легко проверить, исключая из системы (4), (5) переменные P', w', y', что вектор (K', L') удовлетворяет этой системе в том и только том случае, когда $(K', L') \in a_{x,t}(K, L)$. Таким образом, траектории модели $\mathfrak{M}_1$ можно изучать с помощью суперлинейных отображений $a_{x,t}$.

ж) Точнее говоря, предполагается, что функция r_{t+1}^* и числа ω_{t+1} и μ_{t+1} определяются по состоянию модели в момент t. В данной статье основное внимание уделено гипотезе о выборе ставки заработной платы ω_{t+1}.

В рамках модели $\mathfrak{M}_1$ можно выявить взаимосвязи динамики величин $K_t, L_t, \gamma(K_t, L_t, t), \omega_{t+1}$, а также величины $r_t = K_t / L_t$ - фондовооруженности в момент t. Кроме того, поскольку отображения $a_{x,t}$ суперлинейны, представляет интерес указать связь этих величин с неймановскими темпами роста α_t.

В заключение этого пункта сформулируем требования, предъявляемые к производственной функции F. Как обычно, ниже предполагается, что $F(K,L)$ определена на конусе R^ℓ_+, неотрицательна, строго суперлинейна, т.е. положительно однородна (первой степени), вогнута и $F(K+K', L+L') > F(K,L) + F(K',L')$, если точки (K,L) и (K',L') не лежат на одном луче и хотя бы одна из них не имеет нулевых координат. Предполагается, что F непрерывно дифференцируема. Кроме того, считаем, что

$$F(0,L) = F(K,0) = 0.$$

Всюду ниже используется обозначение $f(r) = F(r,1)$. Если $r = K/L$, то $f(r) = F(K,L)/L$, поэтому в рамках рассматриваемой модели уместно трактовать число $f(r)$ как производительность труда при фондовооруженности r. Отметим, что $f(r)$ - вогнутая возрастающая функция, $\lim\limits_{r \to \infty} f(r)/r = 0, f(0) = 0.$

3. Стационарный случай. Рассмотрим вначале простейший случай: считаем, что производственная функция не зависит ни от состояния, ни от времени, т.е. функция γ в (3) равна единице. Считаем, кроме того, что ставка заработной платы ω и коэффициент выбытия фондов μ не зависят от времени. В этом случае модель $\mathfrak{M}_1$ определяется одним суперлинейным отображением a:

$$a(K,L) = \{(K',L') : 0 \leq K' \leq \nu K + K_0,\ K_0 \geq 0,$$
$$0 \leq L' \leq L_0;\ K_0 + \omega L_0 \leq F(K,L)\},$$

где $\nu = 1 - \mu$, и потому обращается в модель Неймана - Гейла (по поводу этих моделей см. [2]).

Основной величиной, характеризующей модель Неймана - Гейла, является неймановское состояние равновесия. Нас будут интересовать лишь 2 элемента этого состояния: неймановский темп роста $\alpha = \alpha(\omega)$ и неймановский луч $(\lambda(\bar{K},\bar{L})), \lambda \geq 0$, характеризуемый фондовооруженностью $\bar{r} = \bar{r}(\omega) = \bar{K}/\bar{L}$. Величины $\alpha(\omega)$ и $\bar{r}(\omega)$ могут быть легко найдены непосредственно. Мы воспользуемся, однако, результатами работы [3], в которой рассматривалась несколько более общая модель Неймана – Гейла. Согласно [3], темп роста $\alpha=\alpha(\omega)$ определяется равенством

$$\alpha=\max\{\nu K+F(K,L): K+\omega L=1, K,L\geq 0\}=$$
$$=\sup\{g_\omega(z): z\geq 0\}, \qquad (7)$$

где положено $g_\omega(z)=\dfrac{\nu z+f(z)}{z+\omega}$. В дальнейшем предполагаем, что ω выбрано так, чтобы функция g_ω достигала своего максимума на $[0,+\infty]$. Дифференцируя g_ω, нетрудно убедиться в том, что это предположение выполняется для $\omega\in(0,\Omega)$, где $\Omega=\sup\limits_{z>0}\dfrac{f(z)-zf'(z)}{\nu+f'(z)}$. Легко проверить, что $\Omega>0$. В случае, когда f дважды непрерывно дифференцируема, можно доказать равенство $\Omega=\frac{1}{\nu}\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)$. Если $\omega\in(0,\Omega)$, то точка $\bar z=\bar z(\omega)$ определяется из соотношения $g_\omega(\bar z)=\alpha$. Так как функция F строго суперлинейна, то рассматриваемая модель Неймана – Гейла имеет строгое состояние равновесия, откуда следует, что точка $\bar z(\omega)$ определяется единственным образом.

Число $\bar z=\bar z(\omega)$ удовлетворяет равенству $g'_\omega(\bar z)=0$, откуда сразу вытекает соотношение

$$\omega=\frac{f(\bar z)-\bar z f'(\bar z)}{\nu+f'(\bar z)}. \qquad (8)$$

Из (8) и соотношения $g_\omega(\bar z)=\alpha$ легко следует равенство

$$\alpha=\nu+f'(\bar z). \qquad (9)$$

Выясним характер зависимостей между ω,α и $\bar z$. Из строгой суперлинейности функции F следует строгая вогнутость функции f, поэтому производная f' строго убывает. Тем самым, функция $\bar z\to\alpha=\alpha(\bar z)=\nu+f'(\bar z)$ строго убывает. Функция $\omega\to\alpha=\alpha(\omega)$ также строго убывает (если $\omega_1>\omega_2$, то $g_{\omega_1}<g_{\omega_2}$). Отсюда следует, что функция $\omega\to\bar z=\bar z(\omega)$ строго возрастает. Из сказанного вытекает, в частности, что каждая из трех величин $\alpha,\omega,\bar z$ однозначно определяет остальные две величины.

Вычислим предельную производительность труда $\partial F/\partial L$ в точке неймановского равновесия $(\bar K,\bar L)$. Воспользовавшись теоремой Эйлера об однородных функциях, получим

$$\frac{\partial F}{\partial L}(\bar K,\bar L)=1/\bar L\cdot F(\bar K,\bar L)-\frac{\partial F}{\partial K}(\bar K,L)\,\bar K/\bar L\,.$$

Поскольку $\dfrac{\partial F}{\partial K}(\bar K,\bar L)=f'(\bar z)$, то $\dfrac{\partial F}{\partial L}(\bar K,\bar L)=f(\bar z)-f'(\bar z)\bar z\,.$

Поэтому, как следует из (8) и (9),

$$\frac{\partial F}{\partial L}(\bar{K},\bar{L})=\alpha\omega.$$

Итак, справедливо следующее утверждение:

Неймановский темп роста α стационарной модели совпадает с отношением предельной производительности труда в состоянии равновесия и ставки заработной платы.

Хорошо известно, что с точки зрения теории предельной полезности должно выполняться равенство $\omega=\frac{\partial F}{\partial L}$. Это равенство в рамках рассматриваемой модели выполняется лишь в случае $\alpha=1$. Ниже показывается, что только в этом случае стационарная модель имеет самостоятельный интерес.

Однако в общем (не стационарном) случае равенство $\frac{\partial F}{\partial L}=\omega$, вообще говоря, не имеет места.

Из (8) следует, что для стационарной модели справедливо соотношение

$$\omega=\frac{\partial F}{\partial L}(\bar{K},L)\Big/\nu+\frac{\partial F}{\partial K}(\bar{K},\bar{L}).$$

Напомним, что средняя (за единичный промежуток времени) производительность труда при фондовооруженности ξ совпадает с числом $f(\xi)$. Из (8) и (9) вытекает, что

$$f(\bar{\xi})=\alpha\omega+\bar{\xi}(\alpha-\nu).$$

Отсюда следует, что равенство $f(\bar{\xi})=\omega$ можно гарантировать в случае, когда $\alpha=1$ и фонды не выбывают (т.е. $\mu=0$). Заметим, что величина

$$\bar{\xi}(\alpha-\nu)=\bar{\xi}f'(\bar{\xi})=\frac{F(\bar{K},\bar{L})}{\bar{L}}-\frac{\partial F}{\partial L}(\bar{K},L)$$

выражает различие между средней и предельной производительностью труда в состоянии равновесия.

С точки зрения предыдущего пункта, стационарная модель представляет самостоятельный интерес лишь в той ситуации, когда экономика не растет, точнее говоря, находится в застое (равновесии в смысле моделей глобального развития). Действительно, в этой ситуации научно-технический прогресс отсутствует, поэтому эффективность фондов $\gamma(K,L,t)$ не зависит от t. Кроме того, предполагая справедливым[*)] равенство $\bar{L}=L_t^*(K)$, где

---

[*] Доводы в пользу этой гипотезы приводятся ниже.

$(\bar{K},\bar{L})$ - равновесный вектор, $L_t^*(K)$ - нормативная численность рабочей силы, отвечающая фондам K в момент t, и полагая начальное состояние (K_0, L_0) близким к точке $(\bar{K},\bar{L})$, можем считать в силу теорем о магистрали, что и вся траектория, исходящая из (K_0,L_0), близка к этой точке. Предполагая, что функция $\gamma(K,L,t)$ "медленно" меняется с изменением (K,L), можно считать, что производственные функции, относящиеся к различным точкам траектории, приближенно равны между собой и совпадают (с небольшой погрешностью) с функцией $\gamma(\bar{K},\bar{L},t)\cdot F(K,L)$. Таким образом, модель $\mathfrak{M}_1$ переходит в стационарную модель. При этом поскольку вектор $(\bar{K},\bar{L})$ не меняется со временем, то $\alpha = 1$.

Из результатов работы [3] следует, что эффективная (в смысле модели Неймана - Гейла) траектория в рассматриваемой ситуации за конечное число шагов попадает в точку равновесия.

Возможность выбирать эффективные траектории в данной модели неявно опирается на гипотезу о допустимости неполной занятости. Примем теперь противоположную гипотезу. При $\alpha = 1$ естественно считать, что население (и, в частности, рабочая сила) стационарно. Гипотеза полной занятости означает поэтому, что рассматривается траектория вида (K_t, L_t), где $L_t = L = const$, а K_t определяется из рекуррентных соотношений

$$K_{t+1} = \nu K_t + F(K_t, L) - \omega L.$$

Нетрудно показать, что если для начального состояния (K_0,L_0) выполняется $z_0 = K_0/L_0 \geqslant \bar{z}$, то фондовооруженности $z_t = K_t/L_t = z_t$, монотонно убывая, стремятся к $\bar{z}$. Если же $z_0 < \bar{z}$, то требуемой траектории не существует (при некотором t выполняется $K_t < 0$). Таким образом, бесконечно долгое существование в условиях застоя (и выход на равновесие) возможно лишь при достаточно больших фондовооруженностях.

Если $\alpha = 1$, то средняя производительность труда в равновесии $f(\bar{z})$ совпадает с $\omega + \bar{z}\mu$ и, следовательно, превышает ставку заработной платы ω.

4. Гипотеза о выборе ставки заработной платы. Перейдем к рассмотрению общей модели $\mathfrak{M}_1$, описанной в п.2. Предположим, что мы находимся в момент t в некоторой точке $x_t = (K_t, L_t)$; требуется определить параметры экономики в момент $t+1$. Основное внимание обратим на выбор ставки заработной платы ω_{t+1}. Предположим на минуту, что эта ставка каким-то об-

разом уже выбрана. Рассмотрим в момент времени t модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}_{x_t,t}$, определяемую при данном ω_{t+1} суперлинейным отображением $a_{x_t,t}$, заданным формулой (6).

Модель $\mathcal{Z}_{x_t,t}$ аппроксимирует модель $\mathcal{M}_1$ в точке x_t в том смысле, что одношаговые траектории моделей $\mathcal{Z}_{x_t,t}$ и $\mathcal{M}_1$, исходящие из этой точки в момент t, совпадают. Предположим, что $x_t = (K_t, L_t^*(K_t))$, где $L_t^*(K) = K/z_t^*(K)$ - нормативное количество рабочей силы, отвечающей фондам K в момент t; здесь $z_t^*(K)$ - нормативная фондовооруженность. Это означает, что количество рабочей силы L_t соответствует структуре имеющихся фондов K_t. Так как $\mathcal{Z}_{x_t,t}$ аппроксимирует $\mathcal{M}_1$ в точке x_t, то можно считать, что нормативная фондовооруженность $z^*(K_t)$ (в рамках модели $\mathcal{M}_1$) мало отличается от нормативной фондовооруженности $\bar{z}(K_t)$, отвечающей тем же фондам K_t в рамках модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$.

Выясним, что представляет собой нормативная фондовооруженность на языке модели Неймана - Гейла $\mathcal{Z}_{x_t,t}$. Пусть $\tilde{x} = (\tilde{K}, \tilde{L})$ - вектор, лежащий в момент времени $\tau = 1$ на эффективной траектории, исходящей из точки x_t в модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$. Обозначим фондовооруженности, отвечающие векторам x_t и $\tilde{x}$, через $\bar{z}$ и $\tilde{z}$ соответственно $(\bar{z} = z^*(K_t) = K_t/L_t^*(K_t);\ \tilde{z} = \tilde{K}/\tilde{L})$. Если x_t - неймановский вектор модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$, то $\bar{z} = \tilde{z}$. Это означает, что фондовооруженность $\bar{z}$ обеспечивает оптимальное функционирование в модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$, не изменяясь при этом. Если же x_t не является неймановским вектором, то $\bar{z} \neq \tilde{z}$. Дело в том, что оптимальное, впрочем, как и любое "разумное" функционирование в рамках модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$, заключается в выходе на магистраль, который и влечет указанное неравенство, точнее говоря, выход на магистраль влечет предельный переход $z_t \to z_0$, где z_0 - равновесная фондовооруженность. Тем самым равенство $\bar{z} = z_0$ означает устойчивость фондовооруженности $\bar{z}$; эту устойчивость и можно трактовать как нормативность.

Сказанное выше позволяет считать достаточно правдоподобной следующую гипотезу: ставка заработной платы ω_{t+1} в момент $t+1$ должна выбираться так, чтобы данный в момент t вектор x_t являлся бы неймановским в модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$. Такой выбор ставки всегда был возможен и притом единственным образом. В силу (8)

$$\omega_{t+1}=\frac{f_t(\varrho_t)-\varrho_t f_t'(\varrho_t)}{\nu_t+f_t'(\varrho_t)}, \qquad (10)$$

здесь $\varrho_t = K_t/L_t$, $f_t(\varrho)=\gamma(K_t,L_t,t)F(\varrho,1)$.

После того, как ω_{t+1} выбрано, встает вопрос о выборе нормативной фондовооруженности в момент $t+1$. Эта фондовооруженность определяется по сути дела структурой фондов. Распоряжаясь этой структурой, можно построить функцию $\varrho^*_{t+1}(K)$.

Считая, что функция ϱ^*_{t+1} уже построена, можно определить элемент $x_{t+1}=(K_{t+1},L_{t+1})$, лежащий на траектории модели $\mathfrak{M}_1$ в момент $t+1$, если эта траектория в момент t проходит через точку x_t. При этом естественно предполагать, что в соотношениях (4)-(5) реализуются точные равенства. Если это предположение принято, то состояние x_{t+1} однозначно определяется по состоянию x_t с помощью соотношений

$$K_{t+1}=\nu_t K_t+\gamma(K_t,L_t,t)F(K_t,L_t)-\omega_{t+1}L_{t+1}; \qquad (11)$$

$$L_{t+1}=K_{t+1}/\varrho^*_{t+1}(K_{t+1}). \qquad (12)$$

Предложенная выше гипотеза о выборе ставки заработной платы означает, что траектория (x_t) проходит по неймановским равновесным векторам соответствующих моделей Неймана - Гейла $Z_{x_t,t}$.

5. Сбалансированный рост в случае функции Кобба - Дугласа. Предположим, что $F(K,L)=K^\delta L^{1-\delta}$, $0<\delta<1$, траектория $x_t=(K_t,L_t)$ модели $\mathfrak{M}_1$ построена по формулам (11) и (12), причем ставка заработной платы вычисляется по формуле (10). Предположим, далее, что $\nu_t=\nu$ при всех t. Обозначая $\gamma(K_t,L_t,t)$ через γ_t и $\varrho^*_t(K_t)$ через ϱ_t, имеем из (11) и (12)

$$K_{t+1}=K_t\,\frac{\nu+\gamma_t/\varrho_t^{1-\delta}}{1+\omega_{t+1}/\varrho_{t+1}}$$

Предполагая, что эффективность фондов γ_t и ставка заработной платы ω_{t+1} растут экспоненциально

$$\gamma_t=\gamma_0\pi^t,\quad \omega_{t+1}=\omega_1\rho^t \quad (\pi\geq 1,\ \rho\geq 1),$$

выясним динамику фондовооруженности ϱ_t, неймановских темпов роста α_t моделей $Z_{x_t,t}$, фондов K_t и рабочей силы L_t. Рассмотрим отдельно 3 случая.

1) $\pi<\rho^{1-\delta}$. В этом случае, как нетрудно проверить, темп роста последовательности (ϱ_t) совпадает с $(\rho\pi^{-1})^{1/\delta}$, ины-

ми словами, при всех t

$$0 < c \leq \frac{r_t}{(\rho \mathcal{X}^{-1})^{t/\delta}} \leq C < +\infty .$$

Темп роста последовательности $(\alpha_t - \nu)$ совпадает с $(\mathcal{X}^{1/\delta} \rho^{1-1/\delta})^t$. Кроме того, $K_{t+1}/K_t \to \nu$; $L_{t+1}/L_t \to \nu(\mathcal{X}/\rho)^{1/\delta}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае фондовооруженность растет как геометрическая прогрессия с показателем $(\rho \mathcal{X}^{-1})^{1/\delta}$, темпы роста α_t, убывая, стремятся к ν, причем последовательность $(\alpha_t - \nu)$ убывает как геометрическая прогрессия, количество вновь производимых фондов $K_{t+1} - \nu K_t$ стремится к нулю. Понятно, что рассматриваемая ситуация неприемлема.

2) $\mathcal{X} > \rho^{1-\delta}$. В этом случае темп роста последовательности (r_t) совпадает с (ρ^t), последовательности (α_t) - с $(\mathcal{X} \rho^{\delta-1})^t$. Кроме того,

$$K_{t+1}/K_t \to +\infty; \quad L_{t+1}/L_t \to +\infty .$$

Таким образом, количество фондов растет сверхэкспоненциально, что вызывает потребность в сверхэкспоненциальном росте рабочей силы. Поэтому данная ситуация также неприемлема.

3) $\mathcal{X} = \rho^{1-\delta}$. Нетрудно проверить, что при указанном равенстве справедливы следующие соотношения:

$$r_t = r_0 \rho^t, \quad \alpha_t = const, \quad K_t = K_0 \sigma^t; \quad L_t = L_0 \tau^t .$$

Здесь

$$\alpha_t = \alpha_0 = \frac{\nu r_0 + \gamma_0 r_0^\delta}{r_0 + \omega_1};$$

$$\sigma = \frac{\nu r_0 + \gamma_0 r_0^\delta}{r_0 + \omega_1/\rho}; \quad \tau = \frac{\nu r_0 + \gamma_0 r_0^\delta}{\rho r_0 + \omega_1} .$$

Таким образом, равенство $\mathcal{X} = \rho^{1-\delta}$ равносильно сбалансированному росту экономики.

Сделаем ряд замечаний относительно сбалансированного роста.

1) Ставка заработной платы прямо пропорциональна фондовооруженности.

2) Темп роста превышает темп роста рабочей силы. Их отношение совпадает с темпом роста ставки заработной платы.

3) Отношение предельной производительности труда к ставке заработной платы постоянно.

4) Если в некоторый момент времени экономика стабилизи-

руется в том смысле, что ставка заработной платы перестанет зависеть от времени, а эффективность фондов – от времени и состояния, то экономика останется в состоянии сбалансированного роста. При этом темп роста фондов совпадает с темпом роста рабочей силы и будет одним и тем же, вне зависимости от того, когда произошла стабилизация. При стабилизации темп роста фондов упадет, а темп роста рабочей силы возрастет.

5) Предположим, что принята гипотеза полной занятости и известен темп роста рабочей силы τ. Выразим параметры ρ и ω_1, характеризующие ставку заработной платы через τ:

$$\rho q_0 + \omega_1 = (\nu q_0 + \gamma_0 q_0^{\delta}) \cdot \tau^{-1}.$$

Полученное равенство показывает, что увеличение начального состояния уровня жизни влечет уменьшение темпа роста этого уровня.

Условие сбалансированного роста $\pi = \rho^{1-\delta}$ совпадает с необходимым условием, найденным Н.Н.Моисеевым [I] для непрерывного случая. Проведенный здесь анализ позволяет уточнить результаты из [I]. При этом, разумеется, существенную роль играет гипотеза о выборе коэффициентов ω_{t+1}.

6. Ставка заработной платы как "золотое правило" (в случае функции Кобба – Дугласа). Здесь будет показано, что по крайней мере в случае функции Кобба – Дугласа выбор ставки заработной платы в соответствии с п.4 при гипотезе полной занятости приводит к "золотому правилу накопления" Е.Фелпса.

Прежде всего сформулируем в терминах модели Неймана – Гейла модель, приводящую к "золотому правилу". Предположим, что мы находимся в условиях, приводящих к стационарной модели, описанной в п.4 (производственная функция, коэффициент выбытия фондов и ставка заработной платы постоянны), и, кроме того, задана норма накопления s, $0 < s < 1$ (отношение инвестиций ко всему продукту). Динамика системы в этом случае задается соотношениями

$$P_t = y_t + \omega_t ;\; y_t = s P_t ;\; w_t = \omega L_t ,$$

$$0 \le P_{t+1} \le F(K_t, L_t);\; 0 \le K_{t+1} \le \nu K_t + y_{t+1},\; L_t \ge 0. \quad (I3)$$

Исключая отсюда переменные P, y, w, убедимся в том, что последовательность $(K_t, L_t$ удовлетворяет (I3) в том и только том случае, когда она является траекторией модели Неймана –

Гейла $\mathcal{Z}^{s}$, порожденной суперлинейным отображением a^{s}:

$$a^{s}(K,L)=\{(\tilde{K},\tilde{L}): 0\le\tilde{K}\le\nu K+sF(K,L);$$
$$0\le\tilde{L}\le\frac{1-s}{\omega}F(K,L)\}.$$

Нетрудно проверить, что равновесная фондовооруженность ρ^{s} в этой модели определяется как решение уравнения

$$\nu+s\frac{f(\rho)}{\rho}=\frac{1-s}{\omega}f(\rho).$$

(Это решение существует и единственно, если $\lim\limits_{\rho\to+\infty}f(\rho)=+\infty$. Считаем это условие выполненным.)

Темп роста α^{s} удовлетворяет соотношениям

$$\alpha^{s}=\nu+s\frac{f(\rho^{s})}{\rho^{s}}=\frac{1-s}{\omega}f(\rho^{s}). \qquad (14)$$

Предположим теперь, что принята гипотеза полной занятости и известен темп роста населения τ, так что рассматривается траектория модели вида (K_t,L_t), где $L_t=L_0\tau^{t}$. Так как в модели Неймана - Гейла траекторий, растущих темпом больше неймановского, не существует, то $\alpha^{s}\geqslant\tau$. Если параметры модели выбраны так, что $\tau<\alpha^{s}$, то траектория (K_t,L_t) растет темпом, меньшим максимально возможного. Поэтому естественно потребовать выполнения равенства $\alpha^{s}=\tau$. Если это равенство выполнено, то из соотношений (14) легко определить ρ^{s} и ω как функции s. В частности,

$$\omega=\omega(s)=\psi\left(\frac{\tau-\nu}{s}\right)\frac{1-s}{s}\,\frac{\tau-\nu}{\tau},$$

где ψ - функция, обратная к функции $\rho\longmapsto f(\rho)\cdot\rho^{-1}$. Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{s\to1}\omega(s)=\omega(1)=0$. Отсюда следует существование нормы накопления $\bar{s}\in(0,1)$, при которой ставка заработной платы $\omega(\bar{s})$ максимальна (в предположении, что $\alpha=\tau$ фиксировано).

Отдельно рассмотрим случай, когда $F(K,L)=\gamma K^{\delta}L^{1-\delta}$ $(0<\delta<1)$ - функция Кобба - Дугласа. В этом случае, как нетрудно проверить, $\bar{s}=\delta$. (Тот же результат получается при исследовании непрерывной модели Фелпса; см., например,[4].) Ставка заработной платы ω, отвечающая $\bar{s}$, имеет вид

$$\omega=\frac{\gamma(1-\delta)}{\tau}\left(\frac{\delta\gamma}{\tau-\nu}\right)^{\delta/1-\delta}. \qquad (15)$$

Вернемся теперь к стационарной модели, описанной в п.4. Предположим, что $F(K,L)=\gamma K^{\delta}L^{1-\delta}$ и принята гипотеза полной занятости: $L_t = L_0 z^t$. Так же, как и в рассмотренной модели, естественно считать, что ставка заработной платы ω выбрана так, что неймановский темп роста α совпадает с z. Из (8) и (9) в этом случае легко следует, что ω определяется по формуле (I5). Таким образом, можно считать, что в рассматриваемой ситуации ставка заработной платы выбирается исходя из "золотого правила накопления".

ЛИТЕРАТУРА

I. МОИСЕЕВ Н.Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования. - М.: Знание, I975.
2. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, I973.
3. РУБИНОВ А.М. Об одной макроэкономической модели. - Оптимизация, I978, вып. 2I (38), I39-I52.
4. Моделирование народно-хозяйственных процессов. /Под редакцией В.С.Дадаяна. - М.: Экономика, I973.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.02.I980 г.