Выпуск 25 (42) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Численные методы

УДК 519.852.6

МЕТОД ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ОКАЙМЛЕНИЯ ДЛЯ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

В.Н.Мягков

Пусть заданы конечные множества M, N, вещественные векторы $b[M], r[N]$ и матрица $A[M,N]$, определяющие непустой многогранник T векторов из $R^{|N|}$, удовлетворяющих ограничениям

$$A[M,N]\cdot x[N]=b[M]\ ,\ o[N]\leqslant x[N]\leqslant r[N]. \qquad (1)$$

Рассмотрим экстремальную задачу с линейными ограничениями на переменные и непрерывно дифференцируемой целевой функцией: минимизировать $f(x[N])$ при условии $x[N]\in T$.

Известно, что во многих методах спуска по возможным направлениям (как и в методе последовательных улучшений для решения линейной задачи) при определении допустимого из $x[N]\in T$ направления необходимо решать систему уравнений относительно двойственных переменных $v[M]$:

$$v[M]\cdot A[M,N']=c[N'],\ N'\subset N, \qquad (2)$$

где $c[N]$ – градиент целевой функции в точке $x[N]$. При решении задач большой размерности существенное значение для эффективности применяемых методов имеет учет специфики матрицы ограничений и, прежде всего, использование этой специфики для решения системы (2).

В этой статье исследуется метод декомпозиции для решения системы (2), основанный на веделении части ограничений в отдельный блок и использовании специфики этого блока. Такой метод известен как прямой метод декомпозиции для матриц ограничений с горизонтальным окаймлением [1]. Метод является эффективным, если известен нетрудоемкий алгоритм построения базисных векторов ядра линейного оператора, который задается подматрицей выделенного блока ограничений. В данной работе векторы базиса указанного ядра используются для характеристики крайних точек многогранника T и, как следствие такой характеристики, указывается способ решения системы (2) и определения допустимого направления убывания целевой функции.

Применение метода демонстрируется на примере экстремальной задачи с линейными ограничениями, среди которых можно выделить блок, матрица которого является двухкомпонентной. Известно, что двухкомпонентной матрице можно поставить в соответствие неориентированный граф. Приводится теорема о сетевой структуре базисных векторов ядра оператора, задаваемого двухкомпонентной матрицей, и показан способ использования этой информации в предлагаемом методе. Частным случаем такой задачи являются транспортная и распределительная задачи с дополнительными ограничениями. Описываемый метод решения двухкомпонентной задачи с дополнительными ограничениями (как и ее частных случаев) является обобщением метода потенциалов решения транспортной задачи линейного программирования.

I. Характеристика крайних точек многогранника T

Пусть множество M представимо в виде $M = m \cup \ell$. Тогда определены подматрицы $A[m,N]$ и $A[\ell,N]$ матрицы $A[M,N]$, и ограничения (I) записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} A[m,N]\cdot x[N] &= b[m], \\ A[\ell,N]\cdot x[N] &= b[\ell], \\ 0[N] \leqslant x[N] &\leqslant r[N]. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}')$$

Обозначим через $\mathcal{K}(A[m,N])$ ядро оператора $A[m,N]$. Пусть P – некоторое множество одномерных линейных пространств (прямых) из $R^{|N|}$, принадлежащих ядру $\mathcal{K}(A[m,N])$. Образуем матрицу $E[P,N]$, строками которой являются произвольные фиксированные векторы $E[i,N]$, $i \in P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Матрицей дефицитов множества P назовем матрицу $\mathcal{D}[P,\ell]$, определяемую следующим образом:

$$\mathcal{D}[P,\ell] = E[P,N]\cdot A^T[\ell,N]. \qquad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество P называется компенсирующим, если ранг матрицы $\mathcal{D}[P,\ell]$ меньше $|P|$.

Пусть вектор $x[N]$ принадлежит T. Через N_x будем обозначать множество $\{i \mid i\in N, 0<x[i]<\tau[i]\}$, а через $R(N_x)$ – подпространство в $R^{|N|}$, определяемое системой уравнений $x[i]=0$, $i\in N\setminus N_x$.

ТЕОРЕМА I. Вектор $x[N]$, принадлежащий T, является крайней точкой этого многогранника тогда и только тогда, когда в линейном подпространстве $\mathcal{K}_x=\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)$ никакое множество линейно-независимых прямых не является компенсирующим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость докажем от противного: пусть $x[N]$ – крайняя точка T и пусть в $\mathcal{K}_x$ нашелся набор из k линейно-независимых прямых $P=\{p_1,\dots,p_k\}$ такой, что ранг соответствующей матрицы дефицитов $\mathcal{D}[p,\ell]$ меньше k. Тогда существует отличный от $O[P]$ вектор $y[P]$, который является решением системы уравнений

$$y[P]\cdot\mathcal{D}[P,\ell]=O[\ell]. \qquad (4)$$

Образуем вектор $z[N]=y[P]\cdot E[P,N]$, который в силу линейной независимости прямых из P отличен от $O[N]$ и, очевидно, $z[N]\in\mathcal{K}(A[m,N])$. Покажем, что векторы $x_\varepsilon[N]=x[N]+\varepsilon z[N]$ принадлежат T, т.е. удовлетворяют (I′) при всех ε, для которых $|\varepsilon|$ достаточно мало. Действительно, так как $p_1,\dots,p_k$ принадлежат $R(N_x)$, то существует $\varepsilon^0=\min_i(\tau[i]-x[i], x[i])>0$ такое, что $0\le x_\varepsilon[N]\le\tau[N]$ для всех ε, удовлетворяющих неравенству $\max_i|\varepsilon z[i]|\le\varepsilon^0$.

Далее, $A[m,N]\cdot x_\varepsilon[N]=A[m,N]x[N]+\varepsilon A[m,N]z[N]=b[m]$, так как $z[N]\in\mathcal{K}(A[m,N])$. И, наконец, $A[\ell,N]\cdot x_\varepsilon[N]=A[\ell,N]x[N]+\varepsilon A[\ell,N]z[N]=b[\ell]$, так как в соответствии с (4)

$$A[\ell,N]z[N]=y[P]\cdot E[P,N]\cdot A^T[\ell,N]=y[P]\cdot\mathcal{D}[P,\ell]=O[\ell].$$

Итак, $x[N]$ не является крайней точкой и искомое противоречие получено.

Достаточность. Пусть $x[N]\in T$ и $\mathcal{K}_x$ не содержит компенсирующей системы линейно-независимых прямых. Докажем, что в этом случае $x[N]$ - крайняя точка. Предположим противное: пусть при этих условиях существует ненулевой вектор $z[N]$ такой, что $x_\varepsilon[N]=x[N]+\varepsilon z[N]$ принадлежит T при всех достаточно малых $|\varepsilon|$.

Отсюда следует, что

а) $z[N]\in R(N_x)$;

б) $A[m,N]\cdot z[N]=0[m]$, т.е. $z[N]\in\mathcal{K}(A[m,N])$;

в) $A[\ell,N]\cdot z[N]=0[\ell]$.

Из а) и б) следует, что в $\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)$ существует ненулевой вектор, следовательно, это подпространство не пусто и в нем существует базис, который мы обозначим через B . Тогда $z[N]=\beta[B]\cdot E[B,N]$, где $\beta[B]\neq 0[B]$, и из в) получаем

$$0[\ell]=A[\ell,N]\cdot z[N]=A[\ell,N](\beta[B]\cdot E[B,N])=\beta[B]\cdot\mathcal{D}[B,\ell].$$

Так как $\beta[B]\neq 0[B]$, то отсюда следует, что $\operatorname{rank}\mathcal{D}[B,\ell]<|B|$, т.е. B - компенсирующая система прямых из $\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)$, что по условию невозможно. Теорема доказана.

Пусть теперь T - невырожденный многогранник, т.е. такой, что в любой крайней точке $x[N]\in T$ ранг матрицы $A[M,N_x]$ равен $|M|$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x[N]$ принадлежит невырожденному многограннику T . Тогда для того, чтобы $x[N]$ была крайней точкой T , необходимо и достаточно, чтобы $\dim\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)=|\ell|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из условий, что $x[N]$ - крайняя точка и T - невырожден, следует, что $|N_x|=|m|+|\ell|$, т.е. $\dim R(N_x)=|m|+|\ell|$, $\dim\mathcal{K}(A[m,N])=|N|-|m|$, а размерность пересечения, как известно, для невырожденного случая равна сумме размерностей пересекающихся многообразий минус размерность объемлющего пространства:

$$\dim\mathcal{K}_x=\dim R(N_x)+\dim\mathcal{K}(A[m,N])-|N|=|\ell|. \qquad (5)$$

Достаточность. Пусть $x[N]\in T$, T - невырожден и $\dim\mathcal{K}_x=|\ell|$. Если бы $x[N]$ не была крайней точкой, то тогда, в соответствии с условием невырожденности T : $|N_x|>|m|+|\ell|$, $\dim\mathcal{K}(A[m,N])=|N|-|m|$, и, вычисляя $\dim\mathcal{K}_x$ аналогично (5), получаем $\dim\mathcal{K}_x\geq|\ell|$, что противоречит условию. Теорема доказана.

2. Алгоритм решения линейной задачи

Рассмотрим задачу линейного программирования $c[N]\cdot x[N]\to \min, x[N]\in T$. В предположении, что T определен ограничениями (2), сформулируем двойственную задачу: найти векторы $v[m], \delta[\ell], \gamma[N]$, доставляющие минимум функции $v[m]\cdot b[m]+\delta[\ell]\cdot b[\ell]+j[N]\cdot r[N]$ при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} v[m]\cdot A[m,N]+\delta[\ell]\cdot A[\ell,N]+j[N]&\geq -c[N],\\ j[N]&\geq 0[N].\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Условия дополняющей нежесткости для пары допустимых решений этих задач имеют вид:

$$-v[m]\cdot A[m,u]-\delta[\ell]\cdot A[\ell,u]\begin{cases}\geq c[u], x[u]=r[u]; & (7)\\ = c[u], \ u\in N_x; & (8)\\ \leq c[u], \ x[u]=0. & (9)\end{cases}$$

Пусть $x[N]$ - некоторая крайняя точка многогранника T. В соответствии с методом последовательных улучшений необходимо решить систему уравнений (8) и проверить условия оптимальности (7) и (9) для полученного решения. При условии, что T - невырожденный многогранник, ранг матрицы системы

$$-v[m]\cdot A[m,N_x]-\delta[\ell]A[\ell,N_x]=c[N_x] \qquad (8')$$

равен $|m|+|\ell|$. Таким образом, для каждой крайней точки $x[N]$ векторы $v[m]$ и $\delta[\ell]$, удовлетворяющие условиям (8), определяются однозначно. Покажем, как при известном базисе подпространства $\mathcal{K}_x=\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)$ система ($8'$) решается специальным методом декомпозиции.

Решение состоит из двух этапов. На первом вычисляется вектор $\delta[\ell]$. По теореме 2 в $\mathcal{K}_x$ найдутся $|\ell|$ линейно-независимых прямых из $\mathcal{K}(A[m,N])$, образующих базис $\mathcal{K}_x$.

Зафиксируем матрицу $E[B,N]$, строками которой являются векторы базиса $\mathcal{K}_x$, и образуем матрицу дефицитов $\mathcal{D}[B,\ell]$:

$$\mathcal{D}[B,\ell]=E[B,N]\cdot A^T[\ell,N], \qquad (10)$$

которая по теореме I представляет собой квадратную неособенную матрицу. Таким образом, система уравнений относительно $\delta[\ell]$

$$\mathcal{D}[B,\ell]\cdot\delta[\ell]=E[B,N]\cdot c[N] \qquad (11)$$

имеет единственное решение $\delta^\circ[\ell]$.

На втором этапе для определения $\vartheta[m]$ выберем произвольную квадратную неособенную подматрицу $A[m,N_{xm}]$ матрицы $A[m,N_x]$ и найдем $\vartheta^\circ[m]$ из системы

$$-\vartheta^\circ[m]\cdot A[m,N_{xm}]=c[N_{xm}]+\delta^\circ[\ell]\cdot A[\ell,N_{xm}], \qquad (12)$$

которая, очевидно, тоже однозначно определяет остальные двойственные переменные.

ТЕОРЕМА 3. Решения $\delta^\circ[\ell]$ системы (11) и $\vartheta^\circ[m]$ системы (12) в совокупности составляют решение системы (8′).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого столбца $A[M,j],\ j\in N_x\setminus N_{xm}$, выполнено соотношение

$$-\vartheta^\circ[m]A[m,j]=c[j]+\delta^\circ[\ell]\cdot A[\ell,j]. \qquad (13)$$

Напомним (см.[2]), что если $x[M]$ – решение системы $x[M]\cdot A[M,M]=b[M]$, то для того, чтобы $x[M]$ удовлетворял расширенной системе $x[M]\cdot A[M,M\cup j]=b[M\cup j]$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $b[M]\cdot\beta[M]=b[j]$, где $\beta[M]$ – разложение столбца $A[M,j]$ по столбцам матрицы $A[M,M]$, т.е. $A[M,j]=A[M,M]\cdot\beta[M]$.

Переносим это условие на рассматриваемый случай, получаем, что для проверки (13) достаточно установить выполнение соотношения

$$c[j]+\delta^\circ[\ell]\cdot A[\ell,j]=(c[N_{xm}]+\delta^\circ[\ell]\cdot A[\ell,N_{xm}])\cdot y[N_{xm}], \qquad (14)$$

где $y[N_{xm}]$ удовлетворяет системе

$$A[m,N_{xm}]\cdot y[N_{xm}]=A[m,j]. \qquad (15)$$

Определим вектор $\tilde y[N]$ таким образом, что $\tilde y[N_{xm}]$ удовлетворяет системе (15), $\tilde y[j]=-1$, а остальные компоненты $\tilde y[N]$ равны нулю. Соотношение (14) очевидно, следует из равенства

$$(c[N]+\delta^\circ[\ell]\cdot A[\ell,N])\cdot\tilde y[N]=0,$$

которое выполнено в силу того, что в соответствии с (15) $\tilde y[N]\in\mathcal{K}(A[m,N])\cap R(N_x)$, следовательно, $\tilde y[N]=\alpha[B]\cdot E[B,N]$, и, наконец, $\delta^\circ[\ell]$ является решение системы (11). Теорема доказана.

Теперь, после того как найдено решение системы (8′), поиск допустимого из $x[N]\in T$ направления, вдоль которого $f(x[N])$ убывает, сводится к проверке условия дополняющей неравенства (7)-(9).

Пусть нашелся индекс $i \in N \setminus N_x$, для которого нарушены условия (7) или (9). Определим тогда вектор $e[N]$ так, чтобы $e[N_x \cup i]$ было решением системы

$$A[m, N_x \cup i] \cdot e[N_x \cup i] = 0[m], \qquad (17)$$

причем потребуем, чтобы $e[i]=-1$ в случае, если на i нарушено условие (7), либо $e[i]=+1$, когда на i нарушается условие (9), остальные компоненты $e[N]$ равны нулю.

Определим дополнительную строку дефицитов $d[\ell]$:

$$d[\ell] = e[N] \cdot A^T[\ell, N]. \qquad (18)$$

Пусть вектор $\zeta[B]$ удовлетворяет системе уравнений

$$\zeta[B] \cdot \mathcal{D}[B, \ell] + d[\ell] = 0[\ell]. \qquad (19)$$

Тогда вектор $x[N] + \varepsilon z[N] = x[N] + \varepsilon\{\zeta[B] E[B,N] + e[N]$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ принадлежит многограннику T, причем $c[N] \cdot x[N] > c[N] \cdot (x[N] + \varepsilon z[N])$.

Действительно, допустимость вектора $x[N] + \varepsilon z[N]$ следует из соотношения $A[M,N](x[N] + \varepsilon z[N]) = b[M]$, которое выполнено в силу того, что имеют место два равенства: $A[m,N] \cdot z[N] = 0[m]$ и $A[\ell,N] \cdot z[N] = 0[\ell]$. Первое справедливо потому, что вектор $e[N]$ и строки матрицы $E[B,N]$ по определению принадлежат ядру $\mathcal{K}(A[m,N])$. Второе - в силу цепочки равенств, следующих из (18), (19) и определения матрицы дефицитов:

$$A[\ell,N] \cdot z[N] = A[\ell,N]\{\zeta[B] \cdot E[B,N] + e[N]\} = \zeta[B] \cdot \mathcal{D}[B,\ell] +$$
$$+ A[\ell,N] e[N] = \zeta[B] \cdot \mathcal{D}[B,\ell] + d[\ell] = 0[\ell].$$

Неравенства $0[N] \leq x[N] + \varepsilon z[N] \leq r[N]$ выполнены для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в силу того, что вектор $\zeta[B] \cdot E[B,N]$ принадлежит $R(N_x)$, а $x[N] + \varepsilon z[N]$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ является допустимым по определению $e[N]$. Тот факт, что при увеличении ε значение функции $c[N] \cdot (x[N] + \varepsilon z[N])$ убывает, следует из определения $z[N]$ и основных результатов теории линейного программирования (см., например, [1,3]).

3. Алгоритм решения выпуклой задачи на T

Рассмотрим нелинейную задачу $\min f(x[N]), x[N] \in T$ в предположении, что $f(x[N])$ - выпуклая функция, имеющая непрерывные на T частные производные $\partial f/\partial x[u]=c_u(x[N]), u\in N$.

В этом случае теорема Куна - Таккера может быть сформулирована следующим образом (см.[4]).

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы в точке $x[N]\in T$ функция $f(x[N])$ имела минимум, необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы $\vartheta[m]$ и $\delta[\ell]$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$-\vartheta[m]A[m,u]-\delta[\ell]A[\ell,u]\begin{cases}\geq c_u(x[N]), x[u]=r[u]; & (20)\\ =c_u(x[N]), \quad u\in N_x; & (21)\\ \leq c_u(x[N]), x[u]=0. & (22)\end{cases}$$

Опишем один шаг метода последовательного улучшения для выпуклой задачи на многограннике T с использованием описанной декомпозиции. Предположим, что задана начальная точка $x[N]$, принадлежащая невырожденному многограннику T. Пользуясь теоремой I и тем фактом, что любая точка из T представима в виде линейной комбинации его крайних точек, можно утверждать, что $dim(R(N_x)\cap\mathcal{K}(A[m,N]))\geq|\ell|$. Это означает, что для любой точки $x[N]\in T$ в N_x можно выбрать подмножество N_x' такое, что $|N_x'|=|m|+|\ell|$ и размерность подпространства $\mathcal{K}_x'=R(N_x')\cap$ $\cap\mathcal{K}(A[m,N])$ равна $|\ell|$. Выбрав базис B подпространства $\mathcal{K}_x'$, образуем матрицы $E[B,N]$ и $\mathcal{D}[B,\ell]$ и решим системы (II) и (I2). Если при найденных значениях векторов $\vartheta[m]$ и $\delta[\ell]$ выполнены условия (20)-(22), то $x[N]$ - решение задачи.

Пусть нашелся элемент $i\in N\setminus N_x'$, на котором нарушено одно из этих условий. Так же, как и в линейном случае (см. (I7)-(I9)), используя матрицы $E[B,N]$ и $\mathcal{D}[B,\ell]$, найдем возможное направление $z[N]$, вдоль которого функция $f(x[N])$ убывает. Для завершения итерации остается решить задачу на минимум функции одной переменной ε : $f(x[N]+\varepsilon z[N])\to min$ при ограничениях $\varepsilon>0$, $x[N]+\varepsilon z[N]\in T$.

Таким образом, если существует нетрудоемкий алгоритм построения строк матрицы $E[B,N]$ и решения системы уравнений с матрицей $A[m,N_{xm}]$, то предлагаемый метод декомпозиции позволяет эффективно проверять признаки оптимальности и отыскивать допустимые направления убывания целевой функции.

4. Экстремальные задачи, содержащие двухкомпонентный блок

Рассмотрим класс условно экстремальных задач с ограничениями вида (I), содержащими двухкомпонентный горизонтальный блок $A[m,N]$. Напомним, что двухкомпонентной называют матрицу, в каждом столбце которой содержится не более двух ненулевых компонент. Задача линейного программирования с двухкомпонентной матрицей ограничений (λ -задача, обобщенная транспортная или распределительная задача) исследовалась во многих работах (см. [I,3,5], наиболее полное изложение в книге [I]); в частности, для решения двухкомпонентной задачи М.А.Яковлевой был предложен обобщенный метод потенциалов [6].

Если $A[m,N]$ – матрица инциденций некоторого графа $G=(m,N)$, то T – область допустимых решений транспортной задачи с дополнительными ограничениями, для решения которой обобщенный метод потенциалов был предложен Э.А.Мухачевой [7] и К.В.Кимом [8] (сетевой вариант см.[9]). Если $A[m,N]$ содержит в каждом столбце два ненулевых элемента с разными знаками, то T – область решений некоторой λ-задачи с дополнительными ограничениями. В каждом из этих случаев $x[N]$ – поток в сети, $b[m]$ – вектор интенсивностей производства и потребления в узлах сети, а $r[N]$ – пропускные способности дуг. В общем случае двухкомпонентной матрице сопоставляется граф $G(m,N)$ с $|m|$ вершинами и $|N|$ неориентированными дугами, определяемый матрицей инциденций $\|sign|A[i,j]|\|$, $i\in m$, $j\in N$, причем столбцам, имеющим лишь одну ненулевую компоненту, соответствует в графе G петля.

Будем считать, что граф G, порожденный $A[m,N]$, связен. Назовем λ-циркуляцией на графе G ненулевой вектор $x[N]$, удовлетворяющий уравнению

$$A[m,N]\cdot x[N]=0[m]. \qquad (23)$$

Напомним, что циклом называется замкнутая неориентированная цепь из дуг графа. Цикл и множество входящих в него дуг будем обозначать одинаково. Ненулевой вектор $x[N]$, удовлетворяющий (23), будем называть λ-циркуляцией на цикле K, если множество дуг $N_x=\{i\in N/x[i]\neq 0\}$ совпадает с K.

При каких условиях существуют λ-циркуляции на циклах? Во-первых, всегда, когда $A[m,N]$ – матрица инциденций связного ориентированного графа. В случае же произвольной двухкомпонентной матрицы $A[m,N]$ λ-циркуляция на цикле $K=(m_k,K)$ существует лишь при условии, что ранг подматрицы $A[m_k,K]$ меньше $|m_k|$. Некоторые соотношения между элементами матрицы $A[m,N]$, при которых выполняется это условие, приведены в работе [6]. Если же матрица $A[m,N]$ имеет ранг $|m|$, то λ-циркуляций на циклах не существует и общее решение системы (23) связано с более сложными циклическими структурами графа G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Связный подграф графа G назовем бициклом, если он содержит ровно два независимых цикла и не содержит концевых вершин (т.е. вершин, инцидентных ровно одной дуге).

ТЕОРЕМА 5. Если ранг двухкомпонентной матрицы $A[m,N]$ равен $|m|$, то ненулевой вектор, удовлетворяющий системе (23), может быть представлен в виде линейной комбинации λ-циркуляцией на бициклах графа G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x[N]$ - ненулевой вектор такой, что $A[m,N]\,x[N]=0[m]$. Тогда, очевидно, справедливы следующие утверждения:

а) подграф $G(x)$, задаваемый матрицей инциденций $A[m,n_x]$, не имеет концевых вершин и поэтому не является деревом;

б) $G(x)$ содержит по крайней мере два цикла.

Из а), б) и условия $rank\,A[m,N]=|m|$ следует, что $G(x)$ содержит по крайней мере один бицикл. Выберем некоторый бицикл W в $G(x)$. Пусть W содержит w дуг и, в соответствии с определением бицикла, $w-1$ вершину. Зафиксируем произвольную дугу k бицикла W. Заметим, что $x[k]\neq 0$, так как $k\in n_x$. По условию теоремы и определению бицикла, ранг матрицы $A[m,N]$ равен $w-1$ и, следовательно, существует I-мерное пространство решений системы $A[m,W]\,y[W]=0[m]$, элементы которого имеют вид $y[W]=\alpha\cdot y^0[W]$. Найдем теперь такую λ-циркуляцию на W $x^1[N]$, что $x^1[k]=x[k]$. Для этого достаточно найти α^1 из условия $\alpha^1\cdot y^0[k]=x[k]$ и положить $x^1[W]=\alpha^1 y^0[W]$, $x^1[N\setminus W]=0[N\setminus W]$. Если $x^1[N]\neq x[N]$, то вектор $x[N]-x^1[N]$ является λ-циркуляцией, поскольку таковой являются $x[N]$ и $x^1[N]$. Далее, из определения $x^1[N]$ следует, что граф $G(x)$ строго включает в себя граф $G(x-x^1)$, который удовлетворяет условиям а) и б), следовательно, содержит некоторый бицикл W_2, и разложение $x[N]$ в сумму λ-циркуляций может быть продолжено.

В силу конечности исходного графа $G(x)$ процесс разложения завершится тогда, когда на очередном n-м шаге граф $G(x-x^1-\ldots-x^n)$ окажется пустым. Таким образом, всякая λ-циркуляция $x[N]$ представима в виде $x[N]=\sum_1^n x^t[N]$, где $x^t[N]$ - λ-циркуляция на бицикле W_t, принадлежащем $G(x)$.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 5. Если ранг матрицы $A[m,$ равен $|m|$ и связный граф $G=(m,N)$ допускает λ-циркуляцию, то в G найдутся $|N|-|m|$ бициклов, фиксированные λ-циркуляции на которых образуют базис пространства $\mathcal{K}(A[m,N])$.

Теперь, когда выяснены условия, допускающие λ-циркуляцию на циклах и бициклах, введем еще одно определение, обобщающее эти понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. λ-циклом в графе G назовем всякий связный подграф L этого графа, являющийся носителем однопараметрической λ-циркуляции и такой, что никакое подмножество дуг L этим свойством не обладает.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ I. Вектор $x[N]$, принадлежащий T, является крайней точкой этого многогранника тогда и только тогда, когда граф $G(x)=(m,N_x)$ не содержит компенсирующей системы линейно-независимых λ-циклов.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $x[N]$ принадлежит невырожденному многограннику T. Для того чтобы $x[N]$ был крайней точкой T, необходимо и достаточно, чтобы граф $G(x)=(m,N_x)$ содержал ровно $|\ell|$ независимых бициклов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Граф $G(x)$ в общем случае содержит $r\leq|m|$ компонент связности, никакая из которых не является деревом. Действительно, в противном случае подматрица $A[M,N_x]$ содержала бы блок $A[m_i,N_{x_i}]$ ранга $|m_i-1|$ и, следовательно, $\det A[M,N_x]=0$, что по условию невырожденности невозможно.

Используя этот факт, обозначим через m_i число вершин, а через m_i+n_i - число дуг в i-й компоненте связности графа $G(x)$ $(1\le i\le v\le |m|)$. По условию невырожденности имеем: $\sum m_i=|m|, \sum n_i=|\ell|$; число независимых циклов в i-й компоненте связности равно n_i+1, а общее число независимых циклов графа $G(x)$ равно $|\ell|+v$.

Используем следствия теорем I и 2 для построения специального способа решения систем (II) и (I2) и для отыскания допустимого направления убывания целевой функции невырожденной линейной задачи, содержащей двухкомпонентный блок.

Для решения системы (II) определим матрицу $E[B,N]$, строками которой в рассматриваемом случае являются λ-циркуляции на $|\ell|$ независимых бициклах, содержащихся в $G(x)$. Пусть, к примеру, $G(x)$ - связный граф. Искомые бициклы могут быть найдены тогда следующим образом.

Представим множество $\mathcal{N}_x$ в виде $\mathcal{N}_x=H_x\cup S_x$ так, чтобы H_x было деревом; множество S_x содержит тогда $|\ell|+1$ дугу s_1, $s_2,\dots,s_{|\ell|+1}$. Присоединяя поочередно дуги $s_2,s_3,\dots,s_{|\ell|+1}$ к множеству $H_x\cup s_1$, получим искомые $|\ell|$ бициклов. Для определения некоторой λ-циркуляции $E[b,N]$ на бицикле b следует положить на одной из дуг первого цикла, скажем на s_1, $E[b,s_1]=1$ и, "обходя" бицикл, последовательно определить остальные значения $E[b,N]$, решив получающееся при обходе второго цикла уравнение с одним неизвестным.

Перемножая матрицы $E[B,N]$ и $A^T[\ell,N]$, получим матрицу дефицитов $\mathcal{D}[B,\ell]$. Далее следует решить систему (II), что и составляет наиболее трудоемкую часть алгоритма.

На втором этапе определяется вектор $v[m]$. Если известна одна из его компонент, то в силу связности графа $G(x)$ и двухкомпонентности матрицы $A[m,N]$ остальные элементы $v[m]$ легко находятся по формуле

$$v[j(u)]=(A[i(u),u]\cdot v[i(u)]+A[\ell,N]\delta[\ell]+c[u])/A[j(u),u] \qquad (24)$$

где $i(u)$ и $j(u)$ - вершины графа G, инцидентные дуге $u\in N$.

Для определения первой компоненты $v[i], i\in m$, достаточно рассмотреть любой простой цикл $\mathcal{J}\in G(x)$ и, положив $v[i]=\varkappa$, $i\in\mathcal{J}$, "обойти" вокруг цикла $\mathcal{J}$, определяя компоненты $v[m]$ в вершинах $\mathcal{J}$ в соответствии с формулой (24). После обхода цикла определим значение $\varkappa$ из получившегося уравнения для $v[i]$ (см. аналогичный прием в [I,6]).

В общем случае, когда $G(x)$ не является связным, компоненты $v[m]$ вычисляются в соответствии с (24) независимо в каждой из компонент связности.

Если $A[m,N]$ – матрица инциденций связного ориентированного графа G, решение систем (II) и (I2) упрощается (см. [9]). Во-первых, матрица дефицитов в каждой крайней точке $x[N]\in T$ определяется по циркуляциям на $|\ell|$ независимых циклах, содержащихся в связном графе $G(x)$ (следствие теоремы 2). И, во-вторых, так как ранг матрицы $A[m,N]$ в этом случае равен $|m|-1$, то компоненты $v[m]$ ("потенциалы") определяются с точностью до параметра, поэтому "первый" потенциал может быть назначен произвольно, обычно его полагают равным нулю.

Вернемся к общему случаю. После того как определены векторы $\delta[\ell]$ и $v[m]$, проверяются условия дополняющей нежесткости (7), (9). Если они выполнены, то $x[N]$ – решение задачи. Пусть нашлась дуга $u\in N\setminus N_x$, на которой нарушено условие (7) или (9). В графе $G(x)=(m, N_x\cup u)$ рассмотрим компоненту связности, содержащую u. В соответсвии со следствием теоремы 2 и замечанием к нему, эта компонента такова, что содержит по крайней мере один бицикл b, в который входит дуга u. Граф $\bar{G}(x)$, следовательно, содержит $|\ell|+1$ независимых бициклов, которые образуют компенсирующую систему. Зафиксируем λ-циркуляцию $E[\bar{b},N]$ на $\bar{b}$ такую, что $E[\bar{b},u]>0$ в случае нарушения на u условия (7) либо $E[\bar{b},u]<0$ в случае нарушения (9) на u. Найдем строку дефицитов $d[\bar{b},\ell]=E[\bar{b},N]\cdot A^T[\ell,N]$ и определим вектор $\zeta[B]$, положив $\zeta[B]=-d[\bar{b},\ell]\mathcal{D}^{-1}[B,\ell]$. Вектор $x[N]+\varepsilon z[N]=x[N]+$ $+\varepsilon(\zeta[B]\cdot E[B,N]+E[\bar{b},N]$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ принадлежит многограннику T, причем $c[N]x[N]>c[N](x[N]+\varepsilon z[N])$. Далее необходимо найти ε° – максимальное значение ε, при котором вектор $x[N]+\varepsilon z[N]$ принадлежит T. Так как многогранник T предполагается невырожденным, то ровно на одной дуге w графа G значение $x[w]+\varepsilon^\circ z[w]$ достигает либо нуля, либо $\gamma[w^\circ]$. Следовательно, дуга w выйдет из множества $N_x+\varepsilon^\circ z$, и вектор $x[N]+\varepsilon^\circ z[N]$ – снова крайняя точка T.

Частный случай этого алгоритма для транспортной задачи с дополнительными ограничениями описан в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

I. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. М.: Наука, 1977.

2. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебы. – М.: Физматгиз, 1963.
3. РОМАНОВСКИЙ И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1977.
4. ХУ Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.
5. ГАБАСОВ Р., КОСТЮКОВА О.И. Об одном алгоритме решения сетевой распределительной задачи. – Изв. АН СССР, 1979, № 2. Сер. техническая кибернетика, с. 36–43.
6. ЯКОВЛЕВА М.А. Двухкомпонентная задача линейного программирования. – Оптимальное планирование, 1964, вып. 2, с.23–40,
7. МУХАЧЕВА Э.А. Транспортная задача на сети с дополнительными ограничениями. – Экономика и мат. методы, 1965, т.I, вып. 4, с.547–557.
8. КИМ К.В. Алгоритм с обратной матрицей для решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. – Экономика и мат. методы, 1967, т.3, вып.4, с.588–592.
9. МЯГКОВ В.Н. Обобщенная транспортная задача в сетевой постановке и ее применение в задачах диспетчеризации. – В кн.: Математические методы в управлении городскими транспортными системами. – Л.: Наука, 1979, с.121–138.

Поступила в ред.-изд. отдел
18.01.1980 г.