УДК 519.6:517.988.8

ОПТИМАЛЬНОЕ ЧЕРЕДОВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СПОСОБОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Б.А.Вертгейм, Е.И.Ицкович

1. В статье рассматривается задача оптимального чередования нескольких способов решения, различающихся по трудоемкости и эффективности. Подобные задачи связаны с изучением и оптимизацией дискретного управляемого процесса с последействием [1]. Конкретизируя задачу на примере чередования методов Чебышева [2] и Ньютона [3], мы формулируем и исследуем некоторую дискретную задачу оптимизации и сравниваем полученные результаты с данными численного эксперимента.

2. Дадим общее описание задачи. На k-м шаге дискретного процесса происходит увеличение некоторой величины x_k одним из нескольких заданных способов, действие которых может зависеть от того, какие способы применялись на предыдущих шагах, и таким образом строится последовательность

$$(x_k)_{k=1,\ldots,m}.$$

Будем считать, что заданы общее количество шагов m, а также количества шагов, выполняемых каждым из упомянутых способов. Наша цель - найти чередование этих способов, дающее максимальную величину x_m.

Подобные задачи, относящиеся к исследованию операций, могут встретиться в различных областях; мы исходим из вопроса о приближенном решении уравнений (см.[1]). При этом число x_m характеризует достигнутую точность, $x_m = -\ln \delta_m$, где δ_m - погрешность на шаге m, и более "быстрый" способ (дающий бо́льшее увеличение x_m) требует обычно больших затрат ресурсов таких, как машинное время.

3. Конкретно рассматриваем следующую модель. Применяем 4 способа, чередование которых задаем вектором управления $w=(w_k)$, $k=1,\dots,m$, где для любого k имеем $w_k\in\{0,1,2,3\}=S_4$, $w_1=3$; соотношение $w_k=s\in S_4$ означает, что x_k получено применением s-го способа. Числа x_0 и m заданы. Пусть $T\subset S_4$, функция $\varphi(\cdot,T)$ определяется так:

$$i=\varphi(k,T)=\max\{q\,/\,q<k,\ w_q\in T\}.$$

Эта функция для заданного номера шага k указывает ближайший предшествующий номер шага i, на котором был применен способ s из списка T, $s\in T\subset S_4$.

Пусть еще заданы неотрицательные константы α,β,γ. Действие каждого из 4-х способов задается формулами:

$$s=0,\ \ x_k=x_{k-1}+x_i,\ i=\varphi(k,T),\ T=\{1,2,3\}, \qquad (1)$$

$$s=1,\ \ x_k=2x_{k-1}+\gamma, \qquad (2)$$

$$s=2,\ \ x_k=2x_{k-1}+x_i+\beta,\ \ i=\varphi(k,T),\ T=\{3\}, \qquad (3)$$

$$s=3,\ \ x_k=3x_{k-1}+\alpha. \qquad (4)$$

Такие соотношения получаются, когда применяется способ Чебышева третьего порядка ($s=3$) (см. далее п.7), связанный с вычислением первой и второй производных от функции, задающей уравнение, вместе с упрощенным его вариантом ($s=2$), когда вновь вычисляется лишь первая производная и используется ранее вычисленная вторая производная, и эти способы чередуются с основным ($s=1$) и модифицированным ($s=0$) методами Ньютона. Пусть для любого s заданы количества $m_s\geq 0$ элементов в каждом из множеств

$$M_s=\{k\,|\,w_k=s\}=w^{-1}(s),\ \ \sum_{s=0}^{3}m_s=m.$$

Наша цель – исследовать такую задачу.

ЗАДАЧА 1. Выбрать управление w так, чтобы выполнялись указанные ограничения $(m_s\geq 0,\ \sum_{s=0}^{3}m_s=m)$ и чтобы величина x_m, зависящая от выбора w, принимала наибольшее значение.

Очевидно, что общее число вариантов

$$(m-1)!\,/\,(m_0!\,m_1!\,m_2!\,(m_3-1)!)$$

быстро растет с ростом m, затрудняя или исключая их полный перебор.

Обозначения, принятые в статье, близки к обозначениям, принятым в [4]:

множество целых чисел от k до ℓ обозначим через $k:\ell = \{z\in\mathcal{Z} \mid k\le z\le \ell\} = \{k:\ell\}$; $\mathcal{J}\subset\mathcal{Z}$ – упорядоченное множество индексов, $\mathcal{V}[\mathcal{J}]$ – вектор (массив), т.е. переменная с индексом i, пробегающим множество $\mathcal{J}$, $i\in\mathcal{J}$. Запись $u, v, w[\mathcal{J}]$ означает, что даны 3 вектора с общим множеством индексов $\mathcal{J}$.

Отметим возможность применения для расчетов методов динамического программирования, которые в этой статье не рассматриваются.

4. Будем сначала считать, что $w_1=3, m_3=1$ (изучаем серию шагов с единственным способом Чебышева, применяемым на I-м шаге). Для детального описания управления w построим таблицу целых положительных чисел (k_{ij}), составленную из векторов-строк вида:

$$k(i)=(k_{i1}, k_{i2},\dots, k_{ip_i}),\ p_i\ge 1,\ i=1,2,\dots,m_2+1\ (m_2\ge 0). \tag{5}$$

Эти числа k_{ij} равны последовательным расстояниям (разностям) между соседними элементами множества $\{1:(m+1)\}\setminus\{W^{-1}(0)\}=P_{123}$, объединенными в массивы $k(i)$, описывающие чередование методов Ньютона (сравн. с [I]), между двумя последовательными применениями метода Чебышева: если

$$P_{23}=P_{123}\setminus\{w^{-1}(1)\}=\{t_1,t_2,\dots,t_{m_2+1}\},\ t=1,\ t_{m_2+1}=m+1, \tag{6}$$

$$P_{23}=P_{123}\setminus\{w^{-1}(1)\}=\{1,t_2,\dots,t_{m_2},m_2+1\},$$

то массив $k(i)$ составлен из длин p_i серий итераций по модифицированному методу Ньютона ($s=0$), где каждая серия идет от одного элемента из $P_{123}\cap[t_i,t_{i+1}]$ до следующего элемента этого множества.

Далее, пусть $\ell_{11}=k_{11}+2\ge 3$, остальные $\ell_{ij}=k_{ij}+1\ge 2$. Таблицы $\mathcal{K}=(k_{ij})$ и $\mathcal{L}=(\ell_{ij})$ иногда удобно рассматривать и как одномерные векторы (массивы) $k,\ell[1:n_0]$, упорядоченные по номерам строк i с сохранением порядка в каждой строке.

Введем следующие величины, обозначения и функции:

$$u_i=\prod_{j=2}^{p_i}\ell_{ij},\quad z_i=\ell_{i1}\cdot u_i, \tag{7}$$

здесь и далее $\prod_{\alpha}^{\beta}=1$, $\sum_{\alpha}^{\beta}=0$, если верхний предел для индекса меньше нижнего, $\beta<\alpha$; в данном случае

$$u_i=1 \quad \text{при} \quad p_i=1. \tag{8}$$

Функция φ двух векторных аргументов $v, w[p:q]$ определяется так:

$$\varphi(v, w[p:q]) = \sum_{\mu=p}^{q} v_\mu \prod_{\nu=\mu+1}^{q} w_\nu . \qquad (9)$$

Если $e = e[p:q]$ – вектор, составленный из единиц, $e_\nu = 1$, $\nu = p, \dots, q$, то

$$\mathcal{X}_i = \varphi(e, \ell[2:p_i]) = \sum_{\mu=2}^{p_i} \prod_{\nu=\mu+1}^{p_i} \ell_\nu ; \qquad (10)$$

$\mathcal{X}_i = 0$ при $p_i = 1$;

$$A_i = u_1 \prod_{\lambda=2}^{p_i} z_\lambda , \ A_1 = u_1 ; \qquad (11)$$

$$B_i = \varphi(u, z[2:p_i]), \ B_1 = 0; \qquad (12)$$

$$C_i = \varphi(\mathcal{X}, z[1:p_i]), \ C_1 = \mathcal{X}_1 ; \qquad (13)$$

$$\mathcal{D}_i = \prod_{\lambda=1}^{p_i} z_\lambda + B_i . \qquad (14)$$

С помощью этих величин выражаем значения $x_{t_i - 1}$ (см. формулы (1)-(4)), доказывая методом математической индукции следующее предложение.

ЛЕММА 1.

$$x_{t_i - 1} = A_i \alpha + B_i \beta + C_i \gamma + \mathcal{D}_i x_0 . \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (1)-(4) выводим, что $x_{k_{11}} = (k_{11}+2)x_0 + \alpha$. Далее, до итерации t_1 чередуются способы Ньютона ($s = 0, 1$), и мы выводим (сравн. с [1]), что к началу первого применения способа $s = 2$

$$x_{t_1 - 1} = u_1 x_{k_{11}} + \mathcal{X}_1 \gamma = u_1 \alpha + 0 \cdot \beta + \mathcal{X}_1 \gamma + z_1 x_0 .$$

При этом если $p_1 = 1$, то $u_1 = 1, \mathcal{X}_1 = 0$. Это доказывает формулу (15) при $i = 1$. Индукционный шаг проводится аналогично: если формула (15) верна для некоторого значения $i \geq 1$, то, применив упрощенный метод Чебышева ($s = 2$), получаем

$$x_{t_i + k_{(i+1)1} - 1} = (k_{(i+1)1} + 1) x_{t_i - 1} + x_0 + \beta = x_i' ,$$

а после проведения $p_{i+1} - 1$ серий чередования методов Ньютона (основного и модифицированного) получаем

$$x_{t_{i+1} - 1} = u_{i+1} x_i' + \mathcal{X}_{i+1} \gamma$$

и с помощью формул (1)-(4) приходим к выражению вида (15) для $i + 1$, причем (приводим в виде примера результаты и для $i = 1, 2$)

$$A_{i+1}=A_i z_{i+1}; \quad A_1=u_1; \quad A_2=u_1 z_2;$$
$$B_{i+1}=B_i z_{i+1}+u_{i+1}; \quad B_1=0; \quad B_2=u_2;$$
$$C_{i+1}=C_i z_{i+1}+\pi_{i+1}; \quad C_1=\pi_1; \quad C_2=\pi_1 z_2+\pi_2;$$
$$D_{i+1}=D_i z_{i+1}+u_{i+1}; \quad D_1=z_1; \quad D_2=D_1 z_2+u_2.$$

Теперь очевидно, что соотношение (I5) справедливо для $i+1$. Это завершает индукцию и доказательство леммы.

Докажем следующее полезное неравенство.

ЛЕММА 2. Пусть дан целочисленный массив $z \geq 2e$. Тогда

$$R_n=\prod_{\lambda=1}^{n} z_\lambda - \varphi(e, z[1:n]) \geq \prod_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda-1) \geq 1, \qquad (I6)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $z[1:(n-1)]=2e$, т.е. $z_1=z_2=\ldots=z_{n-1}=2$.

Доказательство проводим по индукции. При $n=1$ имеем $R_1=z_1-1$. Индукционный шаг основан на соотношениях:

$$R_n=z_n R_{n-1}-1;$$
$$\Delta_n=R_n-\prod_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda-1)=z_n\Delta_{n-1}+\prod_{\lambda=1}^{n-1}(z_\lambda-1).$$

Переход от $n-1$ к n теперь очевиден, как и остальные утверждения леммы.

Заметим, что в правой части формулы (I5) имеем сумму произведений вида $\xi_j \prod_{\nu=j}^{p} \ell_\nu$ (начиная с $j=1$), $j \in J \subset \{1:p\}$, $S=\sum_{j\in J}\xi_j \prod_{\nu=j}^{p}\ell_\nu$, где коэффициент ξ_j равен одному из чисел x_0, α, β, γ. Будем говорить, что два индекса $\nu_1<\nu_2$ разделены в выражении для суммы S, если в этой сумме найдется такое слагаемое, в которое входит ℓ_{ν_2}, а ℓ_{ν_1} не входит.

Рассмотрим следующую задачу, постановка которой вытекает из задачи I.

ЗАДАЧА 2. Найти вектор $\ell[1:p]\geq 2e$ $(\ell_1\geq 3, \ell_\nu\geq 2, \nu=2,\ldots,p)$, максимизирующий сумму S при условии, что $\sum_{\nu=1}^{p}\ell_\nu=M$, а $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$, $x_0\geq 0$ заданы.

ЛЕММА 3. Пусть вектор ℓ решает задачу 2. Тогда при $2\leq\sigma<\tau$, где индексы σ и τ разделены в S, $\ell_\sigma\leq\ell_\tau$;

если σ и τ не разделены в S, то $|l_\sigma - l_\tau| \le 1$, исключая случай $l_1 = 3$, $l_2 = l_3 = \dots = l_s = 2$, $s \ge 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Сравн. с [I], лемма I) Если индексы $\sigma < \tau$ разделены в S и $l_\sigma > l_\tau$, то, полагая $l'_\sigma = l_\tau$, $l'_\tau = l_\sigma$ (т.е. меняя местами две компоненты), мы увеличим те слагаемые, в которые l_τ входило, а l_σ – нет; остальные слагаемые в S не изменятся. Если же σ, τ не разделены, то малость разности чисел l_σ и l_τ доказываем, как в лемме I из [I], уменьшая большее из них на I и увеличивая меньшее на I.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие

$$x_0 > \gamma - \beta. \tag{I7}$$

Тогда каждая строка массива $\mathcal{L} = (l_{ij})$ составлена из единственного элемента l_{i1} ($p_i = 1$, где $i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$), т.е. шаги по упрощенному способу Чебышева идут раньше шагов по методу Ньютона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравним две таблицы:

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1p_1} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2p_2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}'_2 = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12}\, l_{13} \dots l_{1p_1} l_{21} \dots l_{2p_2} \end{pmatrix}.$$

Для первой из них упрощенный метод Чебышева применяется на j-й итерации, $j = \sum_{\nu=1}^{p_1} k_{1\nu}$, для второй $j = k_{11}$. Обозначим через y_2 и y'_2 значения x_k в процессе (I)-(4) при управлениях w и w', определяемых таблицами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Тогда с помощью формул (I0)-(I4) находим (после преобразований, которые мы здесь опускаем), что

$$y'_2 - y_2 = (x_0 + \beta - \gamma)\Big(l_{21} \prod_{\mu=3}^{p_1} l_{1\mu} - 1\Big) \prod_{\mu=2}^{p_2} l_{2\mu}. \tag{I8}$$

(Если $p_1 = 2$, то, как выше сказано, произведение $\prod_{\mu=3}^{2} = 1$.)

Итак, $y'_2 > y_2$. Аналогичный рост имеет место, если передвинуть – с сохранением порядка – все элементы, начиная со второго, из второй строки таблицы (массива) $\mathcal{L}$ в третью, из третьей – в четвертую и т.д., пока не дойдем до последней строки; лишь одна эта строка может иметь длину больше I.

Для вычислений удобно использовать формулу (I5), из которой следует, что (для второй и третьей строк $\mathcal{L}$)

$$y_2 = z_2 y_1 + u_2(x_0+\beta) + \mathcal{X}_2\gamma;$$
$$y_3 = z_2 z_3 y_1 + (u_2 z_3 + u_3)(x_0+\beta) + (\mathcal{X}_2 z_3 + \mathcal{X}_3)\gamma.$$

Далее, для разности $y_3' - y_3$ выводим представление типа (I8). Лемма доказана.

Массив $\mathcal{L}$ теперь удобно представить в виде одномерного массива (вектора) $\ell[1:p]$, где

$$p = m_1 + m_2; \quad \ell_1 = k_{11} + 2; \quad \ell_i = k_{i1} + 1, \quad i[2:m_2]$$

(как было определено выше),

$$\ell_{m_2+j} = k_{(m_2+1)(j+1)} + 1, \quad j[1:(p-m_2)].$$

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие леммы 3 и

$$x_0 > \max(2\beta + \gamma - \alpha, (3\alpha + \beta + \gamma)/2).$$

Тогда для максимальности x_m необходимо, чтобы

$$\ell_p \le \ell_1 + 1, \quad \ell_2 \le \ell_3 \le \ldots \le \ell_{m_2} \le \ell_{m_2+1} \le \ldots \le \ell_p \le \ell_2 + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (I5) и леммы 3 выводим, что

$$x_m = x_0 \prod_{i=1}^{p} \ell_i + (x_0+\beta) \sum_{j=3}^{m_2} \prod_{i=j}^{p} \ell_i + \alpha \prod_{i=2}^{p} \ell_i + \gamma \varphi(e, \ell[(m_2+2):p]).$$

Пусть $2 \le i < j$. Докажем, что $\ell_i \le \ell_j$. Допустим противное и обозначим $\ell_i' = \ell_j$, $\ell_j' = \ell_i$ (т.е. поменяем компоненты местами). Те слагаемые, в которые они входят вместе, при этом не изменятся, а те, в которые ℓ_i не входит, а ℓ_j входит, увеличатся [I]; в итоге получим $x_m' > x_m$.

Докажем, что $\ell_p \le \ell_2 + 1$. Допустим противное [I]. Если $\ell_p - \ell_2 \ge 2$, то, заменяя ℓ_2 на $\ell_2' + 1$, ℓ_p – на $\ell_p' = \ell_p - 1$, после преобразования получим при условии, что

$$\sum_{i=1}^{p} \ell_i = M = m + m_1 + m_2 + 2m_3 - 1,$$

$$x_m' - x_m = \prod_{i=3}^{p-1} \ell_i \Big[\ell_1 x_0 + \alpha - (x_0+\beta) \sum_{j=2}^{m_2} \prod_{\nu=3}^{j} \ell_\nu^{-1} - \gamma \sum_{j=1}^{p-m_2} \prod_{\nu=3}^{m_2+j} \ell_\nu^{-1}\Big](\ell_p - \ell_2 - 1).$$

Так как $\ell_1 \ge 3$, $\ell_\nu \ge 2$, то неравенство $x_m' - x_m > 0$ будет гарантировано, если потребовать, чтобы $3x_0 + \alpha > 2(x_0+\beta) + \gamma$ или $x_0 > 2\beta - \alpha + \gamma$, а это выполнено по условию леммы.

Из условия $x_0 > \alpha$ следует, что $\ell_2 \le \ell_1 + 1$. В самом деле, рассмотрим I-ю и 2-ю строки массива $\mathcal{L}$. Если $\ell_2 > \ell_1 + 1$, то, полагая $l_2'=l_2-1$, $l_1'=l_1+1$, получим $y_2=l_1l_2x_0+x_0+\beta+l_2\alpha$, $y_2'-y_2=x_0+\alpha>0$. Очевидно, что $l_1\le l_2$ (см. лемму 3). Поэтому для доказательства неравенства $l_p\le l_1+1$ предположим противное: $l_2=l_1+1\ge 4$, $l_p=l_1+2$. Пусть $l_p'=l_p-1$, $l_1'=l_1+1$. Тогда неравенство $x_m'-x_m>0$ выполняется при условии, что $x_0\ge(3\alpha+\beta+\gamma)/2$. Это доказывает лемму.

Собирая воедино полученные факты, приходим к такому результату.

ТЕОРЕМА I. Если выполнены условия лемм 4,5, то оптимальное решение задачи I определяется таблицей $\mathcal{L}$ (см. лемму 4), причем все l_i равны либо q, либо $q+1$, где q – целое положительное число, $q\ge 2$, $l_1\ge 3$, причем $\nu<\mu\Rightarrow l_\nu\le l_\mu$, кроме случая, когда $q=2$, в этом случае

$$l_2=l_3=\ldots=l_s=2,\quad s\le p.$$

Далее, если в рассматриваемой серии имеется $n=m_2$ шагов упрощенного метода Чебышева и $h=m_1$ шагов основного метода Ньютона, то при этом число q встречается t раз, а число $q+1$ встречается $s+h$ раз ($s+t=n$), x_m выражается формулой (I5), и

$$\mathcal{D}_m=(1/q)[(q+1)^s(Aq^t-B)-1](q+1)^h=(\mathcal{D}_1),\qquad (I9)$$

где

$$A=(q^2-q+1)/(q-1),\ B=1/(q-1),\ h\ge 0,\ s\ge 0,\ t\ge 1,\ q\ge 2.$$

5. Переходим к случаю $m_3>1$, в котором основной метод Чебышева применяется несколько раз.

В задаче I требуется выбрать вектор

$$l=(l^{(1)},l^{(2)},\ldots,l^{(m_3)})$$

так, чтобы максимизировать x_m (здесь $l^{(i)}$ – вектор типа п.4). Рассмотрим здесь лишь одно необходимое условие максимальности x_m.

ЛЕММА 6. Пусть

$$l^{(i)}=(l_1^{(i)},\ldots,l_{n_i}^{(i)},l_{n_i+1}^{(i)},\ldots,l_{p_i}^{(i)}),$$

где n_i-1 – количество шагов упрощенного метода Чебышева ($n_i\ge 1$)

в i-той серии, и пусть $\alpha, \beta, \gamma, x_0 \geq 0$. Если вектор ℓ решает задачу I, то $0 \leq p_i - n_i \leq 1$ для $i = 1, \ldots, m_3 - 1$, а $p_{m_3} - n_{m_3} = m_1 - m_3 + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две смежные серии, определяемые векторами $\ell^{(1)}$ и $\ell^{(2)}$. Векторы $\bar{\ell}^{(1)}$ и $\bar{\ell}^{(2)}$ обозначим через

$$\bar{\ell}^{(1)} = (\ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n_1}^{(1)}, \ell_{n_1+1}^{(1)}), \quad \bar{\ell}^{(2)} = (\ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{p_2}^{(2)}, \ell_{n_1+2}^{(2)}, \ldots, \ell_{p_1}^{(1)}).$$

Найдем разность $\bar{y}_2 - y_2$ (сравн. обозначения в лемме 4). Заметим, что $\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$, $\bar{A}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 = A_1 \mathcal{D}_2$, $\bar{B}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 = B_1 \mathcal{D}_2$ (см. формулы (10)-(11)), а $\bar{A}_1 > A_2$, $\bar{B}_2 > B_2$, $\bar{C}_1 > C_2$,

$$\mathcal{D}_2 = \left(\prod_{\nu=1}^{n_2} \ell_\nu^{(2)} + \sum_{\mu=3}^{n_2+1} \prod_{\nu=\mu}^{n_2} \ell_\nu^{(2)}\right) \prod_{\nu=n_2+1}^{p_2} \ell_\nu^{(2)}, \quad \bar{\mathcal{D}}_2 = \mathcal{D}_2 \prod_{\nu=n_1+2}^{p_1} \ell_\nu^{(1)},$$

$$C_1 = \sum_{\mu=n_1+3}^{p_1+1} \prod_{\nu=\mu}^{p_1} \ell_\nu^{(1)}, \quad \bar{C}_1 = 1.$$

Из этих соотношений следует, что (в силу леммы 2)

$$\bar{y}_2 - y_2 = (\bar{A}_2 - A_2)\alpha + (\bar{B}_1 - B_2)\beta + (\bar{C}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 + \bar{C}_2 - C_1 \mathcal{D}_2 - C_2)\gamma > 0.$$

Рассмотрим теперь (для $m_3 > 1$) упрощенную задачу о максимизации произведения $\prod_{i=1}^{m_3} \mathcal{D}_i$, имея в виду основную роль члена с x_0 в (15).

ЗАДАЧА 3. Найти вектор $\ell = (\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(m_3)})$, максимизирующий произведение $\prod_{i=1}^{m_3} \mathcal{D}_i$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m_3} \sum_{\nu=1}^{p_i} \ell_\nu^{(i)} = m_1 + m_2 + 2m_3 + m - 1 = M,$$

$$\sum_{i=1}^{m_3} p_i = m_1 + m_2 = P.$$

Рассмотрим две смежные серии итераций, начинающихся с основного метода Чебышева.

Из п.4 имеем, что числа $\ell_\nu^{(i)}$, $i[1:m_3]$ внутри i-й серии отличаются друг от друга не более, чем на I. Следующая лемма 7 дает связь между $\ell_\nu^{(i)}$ двух различных серий.

ЛЕММА 7. Если вектор $\ell = (\ell^{(1)}, \ell^{(2)})$ решает задачу 2, то для всех i, j $(i[1:p_1], j[1:p_2])$ имеем $|\ell_i^{(1)} - \ell_j^{(2)}| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\mathcal{D}_1$ в следующем виде:

$$\mathcal{D}_1 = \ell^{(1)} E_1 + G_1.$$

Заметим, что по лемме 2 $E_1 > G_1$. В аналогичной форме представляем и $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_2 = \ell_2^{(j)} E_2 + G_2 .$$

Допустим, что $\ell_i^{(1)} - \ell_j^{(2)} \geq 2$, и обозначим $\bar{\ell}_i^{(1)} = \ell_i^{(1)} - 1, \bar{\ell}_j^{(2)} = \ell_j^{(2)} + 1$. Тогда легко видеть, что

$$\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = (\ell_i^{(1)} - \ell_j^{(2)} - 1) E_1 E_2 - E_1 G_2 + E_2 G_1 \geq E_1 (E_2 - G_2) + E_2 G_1 > 0.$$

Лемма доказана.

Отсюда следует (см. теорему I из [I]), что все $\ell_y^{(i)}$ равны q или $q+1$, причем если общее количество шагов равно m, а $m_1 + m_2 = P$, то

$$qP + \tau = M, \; 0 \leq \tau < P, \; q = [M/P], \tag{20}$$

причем число q встречается $P-\tau$ раз, число $q+1$ встречается τ раз.

Рассмотрим, далее, две смежные серии. Согласно формуле (I9)

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = (1/q)^2 (1+q)^{1+h_2} F(s_1, t_1, s_2, t_2),$$

где

$$F(s_1, t_1, s_2, t_2) = [(q+1)^{s_1} (Aq^{t_1} - B) - 1][(q+1)^{s_2} (Aq^{t_2} - B) - 1].$$

Пусть $s_1 + s_2 = a \geq 0, \; t_1 + t_2 = b \geq 2, \; \sum_{i=1}^{m_3} s_i = \tau - h_2 - 1, \; \sum_{i=1}^{m_3} t_i = P - \tau$, где a, b постоянны для двух данных серий.

Следующая лемма дает связь между числами s_1 и s_2, t_1 и t_2 при максимальном $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$.

ЛЕММА 8. При максимальном $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ и заданных a, b

$$|s_1 - s_2| \leq 1, \; |t_1 - t_2| \leq 1, \; |(s_1 + t_1) - (s_2 + t_2)| \leq 1. \tag{2I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале первые два неравенства. Допустим, что одно из них (или оба сразу) нарушены. В силу симметрии произведения $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ относительно пар (s_1, t_1) и (s_2, t_2) можно при доказательстве ограничиться следующими четырьмя случаями и показать возможность увеличения F в каждом из них:

I) $s_1 - s_2 \geq 2, \quad |t_1 - t_2| \leq 1;$

2) $|s_1 - s_2| \leq 1, \quad t_1 - t_2 \geq 2;$

3) $s_1 - s_2 \geq 2, \quad t_1 - t_2 \geq 2;$

4) $s_1 - s_2 \geq 2, \quad t_2 - t_1 \geq 2.$

В первом случае проверяем, что

$$\Delta F = F(s_1-1, t_1, s_2+1, t_2) - F(s_1, t_1, s_2, t_2) > 0.$$

Второй случай аналогичен первому. В третьем случае рассматриваем $F(s_1-1, t_1-1, s_2+1, t_2+1)$, в случае 4 – $F(s_1-1, t_1+1, s_2+1, t_2-1)$, что доказывает первые два неравенства леммы. Из них следует, что $|(s_1+t_1)-(s_2+t_2)| \le 2$. Допустим, что при максимальном F выполняется равенство $s_1+t_1-(s_2+t_2)=2$. Это возможно лишь тогда, когда $s_2=s_1-1, t_2=t_1-1$. Покажем, как в этом случае увеличить F:

$$\Delta F = F(s_1-1, t_1, s_2+1, t_2) - F(s_1, t_1, s_2, t_2) > 0,$$

что доказывает третье неравенство леммы.

Обозначим через $n_i = s_i + t_i$ число шагов упрощенного метода Чебышева в i-й серии итераций (между двумя соседними шагами по основному методу Чебышева). Справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{m_3} n_i = m_2,$$

где в силу леммы 8 все числа n_i равны либо n, либо $n+1$, причем

$$n = [m_2/m_3],\ m_2 = n m_3 + r,\ 0 \le r < m_3, \qquad (23)$$

число n встречается $m_3 - r$ раз, а число $n+1$ встречается r раз (сравн. (20)).

На основании проведенного в п.5 анализа можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть вектор l решает задачу 3. Тогда все компоненты $l_\nu^{(i)}$ векторов $l^{(i)}$ равны либо q, либо $q+1$, где q определяется по формуле (20). Количество шагов упрощенного метода Чебышева в каждой из серий равно либо n, либо $n+1$, где число n определяется по формуле (23) и справедливы утверждения лемм 6–8.*

6. Для численного эксперимента и иллюстрации предыдущих свойств были выбраны следующие данные:

$$m_3=2,\ m_2=4,\ m_1=1,\ m=11,\ m_0=m-7=4.$$

Число вариантов полного перебора оказывается равным $30C_{m-1}^6 = 6300$. Параметрам присвоены следующие значения:

$$\alpha=1,\ \beta=0{,}5,\ \gamma=0{,}69=\ln 2,\ x_0=1.$$

Приведем результаты расчета на ЭВМ:

$$w=(3,2,2,0,3,2,0,2,0,1,0),\ x_{11}=2823,69.$$

7. Вывод формул (I)-(4). Пусть даны функция $f\in C^3(\mathbb{R})$, уравнение

$$f(u)=0, \tag{24}$$

$u_0\in\mathbb{R}$, и приближения к решению u^* уравнения определяются так:

$$u_{k+1}=u_k-f(u_k)/f'(u_k)-f^2(u_k)f''(u_i)/(2f'^3(u_k)),$$
$$k=0,1,\ldots,n,\ i=\Psi(k,\{3\})<k \quad \text{при} \quad s=2; \tag{25}$$
$$i=k \quad \text{при} \quad s=3$$

(см. формулы п.3).

Пусть $u_n\to u^*$ (см., например, [2]). Приведем вывод оценок быстроты сходимости. Обозначим $\Delta=u-u^*$ $(\Delta_n=u_n-u^*)$, $f^m(u^*)=f_m$ (сравн. [5]), $m=0,1,2,3$ $(f^{(0)}(u^*)=f(u^*)=0)$. Применим формулу Тейлора ($\Delta\to 0$):

$$f^{(m)}(u)=\sum_{l=0}^{3-m}f_{m+l}\Delta^l/l!+o(\Delta^{3-m}),\ m=0,1,2. \tag{26}$$

Заметим, что при $i<n$ имеем $\Delta_n=O(\Delta_i)$. Подставляя выражения (26) в формулу (25), получаем, что при $i=n$

$$\Delta_{n+1}=u_{n+1}-u^*=\Delta_n^3((f_2/f_1)^2/2-(f_3/f_1)/6)+o(\Delta_n^3).$$

Очевидно, что $\Delta_{n+1}=o(\Delta_n)$; отсюда при $i<n$ имеем $\Delta_n=o(\Delta_i)$. Учитывая это, выводим из (25),(26), что при $s=2$

$$\Delta_{n+1}=-\Delta_n^2\Delta_i(f_3/(2f_1)+o(\Delta_i)).$$

Следуя [I], с. I4, перейдем к "безразмерной" форме этих соотношений, полагая $\tilde\theta=\Delta_n f_2/f_1$. Выделяя главные части $|\tilde\theta_n|\sim\theta_n$, приходим к соотношениям

$$\theta_{n+1}=\theta_n^3(1/2-g) \quad \text{при} \quad i=n,$$

$$\theta_{n+1}=\theta_n^2\theta_i\cdot 3g \quad \text{при} \quad i<n,$$

где $g=f_1f_3/(6f_2^2)$. Полагая $x_n=-\ln|\theta_n|$, $\alpha=-\ln|1/2-g|$, $\beta=-\ln|3g|$, $\gamma=\ln 2$ и учитывая формулы (I0) из [I], приходим к формулам (I)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. ВЕРТГЕЙМ Б.А. Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона - Канторовича. - Оптимальное планирование, 1970, вып. 17, с.10-31.
2. НЕЧЕПУРЕНКО М.И. О методе Чебышева для функциональных уравнений. - УМН,1954, т.9, вып. 2 (60), с.163-170.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
4. РОМАНОВСКИЙ И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. - М.:Наука, 1977.
5. ОСТРОВСКИЙ А.М. Решение уравнений и систем уравнений. - М.: ИЛ, 1963.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.01.1980 г.