Выпуклый анализ

УДК 519.233.3

О КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ, СВЯЗАННЫХ С НАИЛУЧШИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ МЕР

Э.О.Рапопорт

При построении критериев согласия рассматриваются различные расстояния между гипотетической функцией распределения и выборочной функцией, определяемой для выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \le x_{i+1}$, по формуле

$$S_n(x) = \left\{ \frac{i-1}{n} \right., \quad x \in [x_{i-1}, x_i),$$

независимо от функции распределения. Представляет интерес построение по данной выборке кусочно-постоянной функции, связанной с гипотетическим распределением. Полученные при таком подходе критерии обладают хорошими асимптотическими свойствами и удобны для приложений.

I. Рассмотрим множество Ξ вероятностных мер φ на прямой и соответствующие им функции распределения $F_\varphi(x) = \varphi((-\infty, x))$. Фиксируя некоторую монотонно возрастающую непрерывную функцию g, для произвольных $\varphi, \psi \in \Xi$ положим

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_R |F_\varphi - F_\psi| \, dg.$$

Через Ξ_g обозначим множество мер $\varphi \in \Xi$, для которых $\rho(\varphi, \psi_0) < \infty$ при некоторой (а тогда и при любой) мере ψ_0 с компактным носителем. Функция ρ, очевидно, является метрикой на Ξ_g. Отметим, что эта метрика является частным случаем метрики Канторовича – Рубинштейна, сходимость по которой эквивалентна слабой сходимости мер [1].

Вопрос о наилучшем приближении в такой метрике вероятностных мер мерами с конечным носителем при $g(x) = x$ изучался автором в [2]. Полученные там результаты легко переносятся на случай произвольной монотонно-возрастающей непрерывной функции g. В частности, для любой $\varphi \in \Xi_g$ наименее уклоняющаяся от нее мера $\bar{\mu}$ из множества M_S мер с конечным носителем $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, $\alpha_i \le \alpha_{i+1}$, определяется по формулам

$$g(y_i)=\frac{1}{2}(g(\alpha_i)+g(\alpha_{i+1})),\ i=\overline{1,n-1},$$
$$y_0=-\infty,\ y_n=+\infty, \qquad \text{(I)}$$
$$\bar{\mu}(\alpha_i)=F_\varphi(y_i)-F_\varphi(y_{i-1}).$$

Если при этом F_φ строго монотонна и непрерывна, то, полагая $g=F_\varphi$, получим

$$F_{\bar{\mu}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(F_\varphi(\alpha_i)+F_\varphi(\alpha_{i+1})), & x\in[\alpha_i,\alpha_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1},\\ 0, & x<\alpha_1,\\ 1, & x\ge \alpha_n.\end{cases}$$

2. Пусть имеется некоторая выборка $K=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$, и необходимо проверить гипотезу H_0 : K является совокупностью независимых наблюдений случайной величины ξ с непрерывной функцией распределения F.

Рассмотрим упорядоченное множество $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, образованное элементами из K, и сопоставим ему меру $\bar{\mu}$, определяемую из (I) при F_φ и g, равных F. В качестве критерия согласия с гипотезой H_0 можно принять величину

$$\rho_p(F,F_{\bar{\mu}})=\int_R |F-F_{\bar{\mu}}|^{p-1}dF,$$

где $p>0$ – фиксированное число.

Учитывая вид функции $F_{\bar{\mu}}$, при $a_i=F(\alpha_i)$ получаем

$$\rho_p(F,F_{\bar{\mu}})=(p\cdot 2^p)^{-1}(a_1^p+2(a_2-a_1)^p+\dots+2(a_n-a_{n-1})^p+(1-a_n)^p).$$

Удобнее рассмотреть видоизмененный критерий

$$\rho_{p,n}=a_1^p+(a_2-a_1)^p+\dots+(a_n-a_{n-1})^p+(1-a_n)^p.$$

В случае $p=2$ этот критерий совпадает с критерием, предложенным Гринвудом [3] при изучении статистики инфекционных заболеваний.

ТЕОРЕМА I*). Если гипотеза H_0 справедлива, то

$$E(\rho_{p,n})=\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)(\Gamma(n+p+1))^{-1},$$
$$E(\rho_{p,n})^2=\Gamma(n+2)(n(\Gamma(p+1))^2+\Gamma(2p+1))(\Gamma(n+2p+1))^{-1},$$

где, как обычно, $\Gamma(\nu)$ – гамма-функ-

*) При $p=2$ этот результат приведен Мораном в [4].

ц и я Э й л е р а.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что

$$E\rho_{p,n}=n!\int_{\Omega_n(1)}\rho_{p,n}\,da_1\,da_2\dots da_n,$$

где

$$\Omega_n(\beta)=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)/0\le a_1\le a_2\le\dots\le a_n\le\beta\},\quad (2)$$

Введем функцию $\alpha_n(\beta)$ по формуле

$$\alpha_n(\beta)=n!\int_{\Omega_n(\beta)}(a_1^p+(a_2-a_1)^p+\dots+(a_n-a_{n-1})^p+(\beta-a_n)^p)\,da_1\dots da_n.$$

Тогда

$$\alpha_1(\beta)=\frac{2\beta^{p+1}}{p+1};\quad \alpha_n(\beta)=n\int_0^\beta\alpha_{n-1}(a)\,da+n\int_0^\beta a^{n-1}(\beta-a)^p\,da.$$

По индукции легко показать, что

$$\alpha_n(\beta)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+p+1)}\beta^{n+p}$$

и

$$\alpha_n(1)=E\rho_{p,n}=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Для вычисления второго момента воспользуемся тем же методом. Пусть

$$\delta_n(\beta)=n!\int_{\Omega_n(\beta)}(a_1^p+\dots+(\beta-a_n)^p)^2\,da_1\dots da_n.$$

Тогда

$$\delta_n(\beta)=n!\int_0^\beta da_n\dots\int_0^{a_2}da_1[a_1^p+\dots+(\beta-a_n)^p]^2=$$

$$=n\int_0^\beta\delta_{n-1}(a)\,da+2n\int_0^\beta(\beta-a)^p\alpha_{n-1}(a)\,da+n\int_0^\beta a^{n-1}(\beta-a)^{2p}\,da.$$

Замена $a_i=\beta c_i$ показывает, что $\delta_n(\beta)=\beta^{n+2p}\delta_n(1)$. Поэтому

$$\delta_n(\beta)=n\delta_{n-1}(1)\int_0^\beta a^{n-1+2p}\,da+$$

$$+2n\alpha_{n-1}(1)\int_0^\beta(\beta-a)^p a^{n+p-1}\,da+n\int_0^\beta a^{n-1}(\beta-a)^{2p}\,da=$$

$$=\beta^{n+2p}\left[\frac{n}{n+2p}\delta_{n-1}(1)+\frac{2n\Gamma(p+1)\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+2p+1)}\alpha_{n-1}(1)+\frac{n\Gamma(2p+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2p+1)}\right].$$

Как показано выше, $\alpha_{n-1}(1)=\dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p)}$, отсюда

$$\delta_n(1)=\frac{n}{n+2p}\delta_{n-1}(1)+\frac{2n\Gamma(n+1)((\Gamma(p+1))^2+\Gamma(2p+1))}{\Gamma(n+2p+1)}.$$

Но

$$\delta_1(1)=\int_0^1(a^p+(1-a)^p)^2=\frac{2((\Gamma(p+1))^2+\Gamma(2p+1))}{\Gamma(2p+2)}.$$

Индукционный переход и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Случайная величина $n^{p-1}\rho_{p,n}$ сходится по вероятности к числу $\Gamma(p+1)$ при $n\to\infty$.

Действительно,

$$\sigma_n^2=E(n^{p-1}\rho_{p,n})^2-(E(n^{p-1}\rho_{p,n}))^2=n^{2p-2}\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2p+1)}-$$

$$-n^{2p-2}(\Gamma(p+1))^2\left[\left(\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+p+1)}\right)^2-\frac{n\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2p+1)}\right].$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением гамма-функции, можно получить следующую формулу:

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}=\frac{1}{n^{b-a}}\left(1-\frac{(b-a)(a+b-1)}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right). \qquad (3)$$

Поэтому окончательно получим, что

$$\sigma_n^2=\frac{\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

откуда и следует утверждение.

Вычислим производящую функцию случайной величины $\rho_{p,n}$. Пусть

$$\varphi_n(\beta,t)=n!\int_{\Omega_n(\beta)}e^{-t(a_1^p+\ldots+(a_n-a_{n-1})^p+(\beta-a_n)^p)}da_1\ldots da_n.$$

Тогда $\varphi_n(1,t)=Ee^{-t\rho_{p,n}}$ и $\varphi_n(\beta,t)$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$\varphi_n(\beta,t)=n\int_0^\beta e^{-t(\beta-a)^p}\varphi_{n-1}(a,t)da;\ \varphi_0(\beta,t)=\int_0^\beta e^{-ta^p}da.$$

Умножив это равенство на $e^{-\beta s}$ и проинтегрировав по β на промежутке $[0,\infty)$, получим

$$\int_0^\infty e^{-s\beta}\varphi_n(\beta,t)d\beta=n\int_0^\infty e^{-s\beta}d\beta\int_0^\beta e^{-t(\beta-a)^p}\varphi_{n-1}(a,t)da.$$

Положим

$$\Phi_n(s,t)=\int_0^\infty e^{-s\beta}\varphi_n(\beta,t)d\beta.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\Phi_n(s,t)=n\,\Phi_{n-1}(s,t)\int_0^\infty e^{-ta^p-as}da.$$

Поэтому

$$\Phi_n(s,t)=n!\left(\int_0^\infty e^{-ta^p-as}\,da\right)^{n+1}$$

и

$$\varphi_n(\beta,t)=L^{-1}\left(n!\left(\int_0^\infty e^{-ta^p-as}\,da\right)^{n+1}\right),$$

где оператор L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа (по s). При $\beta=1$ получаем производящую функцию случайной величины $\rho_{p,n}$. Применяя к $\varphi_n(1,t)$ обратное преобразование Лапласа, получим функцию распределения случайной величины $\rho_{p,n}$.

Покажем теперь, что при больших n случайная величина $n^{p-1}\rho_{p,n}$ близка к нормальной.

ТЕОРЕМА 2. Случайная величина

$$\xi_n=\frac{(n^{p-1}\rho_{p,n}-\Gamma(p+1))\sqrt{n}}{\sqrt{\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2}}$$

распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m_n^k=E(n^{p-1}\rho_{p,n}-\Gamma(p+1))^k$. Докажем по индукции, что при четных k

$$m_n^k=\frac{(k-1)!!(\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2)^{k/2}}{n^{k/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

а при k нечетных

$$m_n^k={}^{c_k}\!/_{n^{(k+1)/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

База индукции доказана в теореме I и в следствии к ней.

Пусть

$$m_n^k(\beta)=n!\int_{\Omega_n(\beta)}(n^{p-1}\rho_{p,n}(\beta)-\Gamma(p+1)\beta^p)^k da_1\ldots da_n,$$

где $\Omega_n(\beta)$ определено по формуле (2), а $\rho_{p,n}(\beta)=a_1^p+(a_2-a_1)^p+$ $+\cdots+(a_n-a_{n-1})^p+(\beta-a_n)^p$. Тогда $m_n^k=m_n^k(1)$. Используя симметрию этого интеграла относительно разностей (a_i-a_{i-1}), можно показать, что

$$m_n^k(\beta)=(n+1)!\int_{\Omega_n(\beta)}n^{p-1}(\beta-a_n)^p(n^{p-1}\rho_{p,n}(\beta)-\Gamma(p+1)\beta^p)^{k-1}da_1\ldots$$
$$\ldots da_n-\Gamma(p+1)\beta^p n!\int_{\Omega_n(\beta)}(n^{p-1}\rho_{p,n}(\beta)-\Gamma(p+1)\beta^p)^{k-1}da_1\ldots da_n.$$

Для получения рекуррентной формулы преобразуем первое слагаемое

$$\int\limits_{\Omega_n(\beta)_\beta} (\beta-a_n)^p (n^{p-1} P_{p,n}(\beta) - \Gamma(p+1)\beta^p)^{k-1} da_1 \dots da_n =$$
$$= \int_0^\beta (\beta-a)^p da \int\limits_{\Omega_{n-1}(a)} [((\tfrac{n}{n-1})^{p-1}(n-1)^{p-1} P_{p,n-1}(a) - \Gamma(p+1)(\tfrac{n}{n-1})^{p-1} a^p) +$$
$$+ ((\tfrac{n}{n-1})^{p-1}\Gamma(p+1)a^p + n^{p-1}(\beta-a)^p - \Gamma(p+1)\beta^p)]^{k-1} da_1 \dots da_n =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s \int_0^\beta \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(p-1)(k+s-1)} m_{n-1}^{k-s-1}(a)(\beta-a)^p((\tfrac{n}{n-1})^{p-1}\Gamma(p+1)a^p - \Gamma(p+1)\beta^p + n^{p-1}(\beta-a)^p)^s da.$$

Поскольку $m_n^k(\beta) = m_n^k \beta^{n+kp}$, то окончательно имеем

$$m_n^k = -\Gamma(p+1) m_n^{k-1} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{k-1} n^p (n+1) C_{k-1}^s \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(p-1)(k-s-1)} m_{n-1}^{k-s-1} \int_0^1 a^{n-1+p(k-s-1)} (1-a)^p [n^{p-1}(1-a)^p -$$
$$- (1-a^p)\Gamma(p+1) + \frac{a^p(p-1)}{n}(1+O(1/\sqrt{n}))]^s da.$$

Но

$$\int_0^1 a^{n-1+p(k-s-1)} (1-a)^p [n^{p-1}(1-a)^p - \Gamma(p+1)(1-a^p) +$$
$$+ \frac{a^p(p-1)}{n}(1+O(1/\sqrt{n}))]^s da = \frac{c_s}{n^{p+s+1}}(1+O(1/\sqrt{n})).$$

Поэтому (учитывая индукционное предположение об асимптотике m_n^s) каждое слагаемое в сумме, стоящей под знаком $\sum$ в формуле (4), имеет вид

$$\frac{d_s}{n^{\frac{k+s-1}{2}}}(1+O(1/\sqrt{n})).$$

Поэтому сумма этих слагаемых при $s \geq 2$ равна $\frac{c}{n^{[\frac{k+2}{2}]}}(1+O(1/\sqrt{n}))$, где c_s, d_s, c – некоторые константы.

Пусть k четно. При $s = 0$ получаем слагаемое $(n+1)n^p \cdot m_{n-1}^{k-1} \cdot$
$\cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{k-1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p(k-1))}{\Gamma(n+pk+1)}$. Вычитая из него $\Gamma(p+1) m_n^{k-1}$ и используя формулу (3), получим слагаемое вида

$$\frac{l_k}{n^{k/2}} O(1/\sqrt{n}).$$

Тем самым, основной вклад в m_n^k дает слагаемое A, соответствующее $s = 1$. Подсчитаем его отдельно:

$$A = n^p (n+1)(k-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(p-1)(k-2)} m_{n-1}^{k-2} \cdot$$
$$\cdot \int_0^1 a^{n-1+p(k-2)} (1-a)^p [n^{p-1}(1-a)^p - \Gamma(p+1) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1}\Gamma(p+1) a^p] da.$$

Используя формулу (3), легко проверить, что интеграл равен

$$\frac{\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2}{n^{p+2}}(1+O(1/\sqrt{n})).$$

Поэтому

$$A=(k-1)\cdot\frac{\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2}{n}(1+O(1/\sqrt{n}))m_{n-1}^{k-2}$$

и

$$m_n^k=(k-1)!!\left[\frac{\Gamma(2p+1)-(p^2+1)(\Gamma(p+1))^2}{n}\right]^{k/2}(1+O(1/\sqrt{n})).$$

Для нечетного k утверждение доказывается аналогично. Поэтому нечетные моменты случайной величины ξ_n стремятся к 0, а четные (порядка $2k$) к $(2k-1)!!$

Тем самым предельные моменты совпадают с моментами нормального распределения. Теорема доказана.

3. Рассмотрим теперь поведение $\rho_{p,n}$ при альтернативной гипотезе H : функция распределения G случайной величины ξ представима в виде $G=h(F)$, где h-строго монотонная непрерывная и дифференцируемая функция из $[0,1]$ в $[0,1]$, $h(0)=0, h(1)=1$.

Математическое ожидание при этой гипотезе будем в дальнейшем обозначать через E_h .

Введя, как и в п.2, параметр β , обозначим

$$\mathcal{J}_n(\beta)=n!\int_0^\beta h'(a_n)da_n\dots\int_0^{a_2}h'(a_1)da_1(a_1^p+\dots+(\beta-a_n)^p).$$

При этом $\mathcal{J}_n(1)=E_h(\rho_{p,n})$. Легко видеть, что справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\mathcal{J}_0(\beta)=\beta^p,$$

$$\mathcal{J}_n(\beta)=n\int_0^\beta h'(a)\mathcal{J}_{n-1}(a)da+n\int_0^\beta(\beta-a)^p h'(a)(h(a))^{n-1}da. \tag{5}$$

Пусть $\Phi(\beta,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{J}_k(\beta)z^k/k!$ - экспоненциальная производящая функция для последовательности $\mathcal{J}_k(\beta)$. Тогда из (5) следует, что $\Phi(\beta,z)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Phi(\beta,z)=\beta^p+z\int_0^\beta h'(a)\Phi(a,z)da+z\int_0^\beta(\beta-a)^p e^{zh(a)}h'(a)da,$$

решая которое, получаем

$$\Phi(\beta,z)e^{-zh(a)}=p\int_0^\beta a^{p-1}e^{-zh(a)}da+pz\int_0^\beta e^{-zh(a)}da\int_0^a(a-c)^{p-1}h'(c)e^{zh(c)}dc. \tag{6}$$

Поскольку $\mathcal{J}_n(\beta)$ - коэффициент при $z^n/n!$ в разложении $\Phi(\beta,z)$ по степеням z, и $h(1)=1$, то

$$\mathcal{J}_n(1)=p\int_0 a^{p-1}(1-h(a))^n da+$$

$$+pn\int_0^1 da\int_0^a dc(a-c)^{p-1}h'(c)(1-h(a)+h(c))^{n-1}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция h такова, что $h, h^{-1}\in C'([0,1])$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-1}J_n(1)=\Gamma(p+1)\int_0^1\frac{dt}{(h'(t))^{p-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала асимптотику первого слагаемого из (7) (с учетом множителя n^{p-1}). Если $p<1$, то

$$pn^{p-1}\int_0^1 a^{p-1}(1-h(a))^n da\le\frac{1}{n^{1-p}}\to 0.$$

Если $p>1$, то, взяв α в промежутке $\left(\frac{p-1}{p},1\right)$, разобьем интервал $[0,1]$ на две части: $\left[0,h^{-1}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$ и $\left[h^{-1}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),1\right]$. Поскольку $h^{-1}\in C'([0,1])$, то $(h^{-1})'$ ограничена. Поэтому

$$pn^{p-1}\int_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} a^{p-1}(1-h(a))^n da\le pn^{p-1}\int_0^{b/n^\alpha}a^{p-1}da=\frac{b^p n^{p-1}}{n^{\alpha p}}\to 0. \quad (8)$$

Кроме того,

$$pn^{p-1}\int_{h^{-1}(1/n^\alpha)}^1 a^{p-1}(1-h(a))^n da\le pn^{p-1}(1-1/n^\alpha)^n\int_0^1 a^{p-1}da\to 0. \quad (9)$$

Поэтому первое слагаемое стремится к нулю.

Рассмотрим теперь второе слагаемое из (7). Разобьем область интегрирования $\Omega=\{(a,c)/0\le c\le a\le 1\}$ на две части: Ω_ε и $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$, где $\Omega_\varepsilon=\{(a,c)\in\Omega/h(a)-h(c)\le 1/n^\varepsilon\}$, $\frac12<\varepsilon<1$. Тогда

$$pn^p\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} da\,dc(a-c)^{p-1}h'(c)(1-h(a)+h(c))^{n-1}\le b_1 n^p\left(1-\frac{1}{n^\varepsilon}\right)^{n-1}\to 0. \quad (10)$$

В интеграле по области Ω_ε сделаем замену переменных $h(a)=u$, $h(c)=v$ и обозначим $h^{-1}=g$. Тогда его можно записать в виде

$$K_n=pn^p\int_0^1 g'(u)du\int_{u-n^{-\varepsilon}}^{u}(g(u)-g(v))^{p-1}(1-u+v)^{n-1}dv.$$

Но поскольку $g\in C'([0,1])$, то $\forall\delta\exists N\forall n>N\forall u,v\left(0<u-v<\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$ выполняются неравенства $(u-v)(g'(u)-\delta)\le g(u)-g(v)\le(u-v)(g'(u)+\delta)$. Поэтому для $K_n(p>1)$ справедлива следующая двухсторонняя оценка:

$$pn^p\int_0^1 g'(u)(g'(u)-\delta)^{p-1}du\int_{u-n^{-\varepsilon}}^{u}(u-v)^{p-1}(1-u+v)dv\le K_n\le$$

$$\le pn^p\int_0^1 g'(u)(g'(u)+\delta)^{p-1}du\int_{u-n^{-\varepsilon}}^{u}(u-v)^{p-1}(1-u+v)^{n-1}dv.$$

Внутренний интеграл в этих оценках заменой $n(u-v)=z$ можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{n^p}\int_0^{n^{1-\varepsilon}}\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1} z^{p-1}dz.$$

Используя очевидное неравенство

$$e^{-n^{1-2\varepsilon}}e^{-z}\le e^{-z^2/n}e^{-z}\le(1-z/n)^n<(1-z/n)^{n-1}\le e^{-z}e^{z/n}\le e^{-z}e^{n^{-\varepsilon}},$$

справедливое для $z\in(0,n^{1-\varepsilon}]$, получим, что

$$e^{-n^{1-2\varepsilon}}\int_0^{n^{1-\varepsilon}}e^{-z}z^{p-1}dz\le\int_0^{n^{1-\varepsilon}}(1-z/n)^{n-1}z^{p-1}dz\le e^{n^{-\varepsilon}}\int_0^{n^{1-\varepsilon}}e^{-z}z^{p-1}dz.$$

Поскольку $\frac{1}{2}<\varepsilon<1$, этот интеграл стремится к $\Gamma(p)$. Поэтому

$$\Gamma(p+1)\int_0^1 g'(u)(g'(u)-\delta)^{p-1}du\le\underline{\lim}\,K_n\le\overline{\lim}\,K_n\le$$
$$\le\Gamma(p+1)\int_0^1 g'(u)(g'(u)+\delta)^{p-1}du.$$

Так как δ произвольно, то

$$\lim K_n=\Gamma(p+1)\int_0^1(g'(u))^p du. \tag{II}$$

Возвращаясь к функции h^0 и учитывая (8)-(II), получаем

$$\lim_{n\to\infty}n^{p-1}J_n(1)=\Gamma(p+1)\int_0^1\frac{da}{(h'(a))^{p-1}}.$$

При $p<1$ меняются лишь знаки в неравенствах.

Аналогичными методами можно исследовать и предельное поведение второго момента случайной величины $\rho_{p,n}$ при гипотезе H.

Пусть

$$J_n(\beta)=n!\int_0^\beta h'(a_n)da_n\ldots\int_0^{a_2}h'(a_1)da_1(a_1^p+\ldots+(\beta-a_n)^p)^2.$$

Тогда $E_h(\rho_{p,n})^2=J_n(1)$.

Для $J_n(\beta)$ справедливы рекуррентные соотношения

$$J_0(\beta)=\beta^{2p},$$
$$J_n(\beta)=n\int_0^\beta h'(a)J_{n-1}(a)da+$$
$$+2n\int_0^\beta(\beta-a)^p h'(a)J_{n-1}(a)da+n\int_0^\beta(\beta-a)^{2p}h'(a)(h(a))^{n-1}da.$$

Введя экспоненциальную производящую функцию последовательности $J_n(a)$ по формуле

$$\Psi(\beta,z)=\sum_{k=0}^\infty J_k(\beta)\,z^k/k!,$$

получим, что $\psi(\beta,z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(\beta,z)=\beta^{2p}+z\int_0^\beta h'(a)\psi(a,z)\,da+$$

$$+2z\int_0^\beta(\beta-a)^p h'(a)\,\varphi(a,z)\,da+z\int_0^\beta(\beta-a)^{2p}h'(a)e^{zh(a)}da,$$

где $\overset{0}{\varphi}(\beta,z)$ определено формулой (5). Решая это уравнение, получим

$$\psi(\beta,z)e^{-zh(\beta)}=2p\int_0^\beta a^{2p-1}e^{-zh(a)}da+2pz\int_0^\beta e^{-zh(a)}da\int_0^a(a-c)^{p-1}h'(c)\,\varphi(c,z)\,dc+2pz\int_0^\beta e^{-zh(a)}da\int_0^a(a-c)^{2p-1}h'(c)e^{zh(c)}dc.$$

Используя вид функции φ, можно получить, что

$$J_n(1)=2p\int_0^1 a^{p-1}(1-h(a))^n da+2p^2n\int_0^1 da\int_0^a(a-c)^{p-1}h'(c)\,dc\int_0^c v^{p-1}(1-h(a)+h(c)-h(v))^{n-1}dv+n(n-1)2p^2\int_0^1 da\int_0^a(a-c)^{p-1}h'(c)\,dc\int_0^c dv\int_0^v(v-t)^{p-1}h'(t)(1-h(a)+h(c)-h(v)+h(t))^{n-2}dt+$$

$$+2pn\int_0^1 da\int_0^a(a-c)^{2p-1}h'(c)(1-h(a)+h(c))^{n-1}dc. \qquad (12)$$

ТЕОРЕМА 4. Если $h, h^{-1}\in C'([0,1])$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^{2p-2}J_n(1)=(\Gamma(p+1))^2\left(\int_0^1\frac{dt}{(h'(t))^{p-1}}\right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, легко показать, что первое слагаемое в формуле (12) (с учетом множителя n^{2p-2}) стремится к нулю. Четвертое слагаемое (как следует из теоремы 2), умноженное на n^{2p-1}, стремится к константе. Поэтому произведение четвертого слагаемого и n^{2p-2} будет стремится к нулю.

Для оценки второго слагаемого сделаем в нем замену переменных $h(a)=x$, $h(c)=y$, $h(v)=z$. Тогда его можно записать в виде

$$T_n^1=2p^2n^{2p-1}\int_0^1 g'(x)\,dx\int_0^x(g(x)-g(y))^{p-1}dy\int_0^y(g(z))^{p-1}g'(z)(1-x+y-z)^{n-1}dz,$$

где, как и раньше, $g=h^{-1}$. Поскольку g' ограничена, то

$$T_n^1\le Cn^{2p-1}\int_0^1 dx\int_0^x(x-y)^{p-1}dy\int_0^y z^{p-1}(1-x+y-z)^{n-1}dz.$$

Пусть $0<\frac{2p-1}{2p}<\alpha<1$. Тогда, если $z>\frac{1}{n^\alpha}$ или $x-y>\frac{1}{n^\alpha}$, то

$$0<(1-(x-y)-z)^{n-1}<\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n-1}.$$

Заметим, что $(1-1/n^\alpha)^{n-1}$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень $1/n$. Поэтому для оценки T_n^1 остается рассмотреть интеграл по области $\Omega_\alpha=\{(x,y,z)/0\le x-y\le 1/n^\alpha, z\le 1/n^\alpha\}$. Но

$$Cn^{2p-1}\int_0^1 dx\int_{x-1/n^\alpha}^{1}(x-y)^{p-1}dy\int_0^{n^{-\alpha}}z^{p-1}(1-(x-y)-z)^{n-1}dz\le$$
$$\le Cn^{2p-1}\int_0^1 dx\int_0^{n^{-\alpha}}s^{p-1}ds\int_0^{n^{-\alpha}}z^{p-1}dz=c_1 n^{-(2\alpha p+1-2p)}\to 0.$$

Таким образом, и второе слагаемое стремится к нулю.

Аналогичными оценками можно показать, что третье слагаемое T_n^2 можно представить в виде

$$T_n^2=2n^{2p-1}(n-1)p^2\int_0^1 g'(x)dx\int_{x-n^{\alpha}}^{x}(g(x)-g(y))^{p-1}dy\cdot\int_0^y g'(z)dz\cdot$$
$$\cdot\int_{z-n^{-\varepsilon}}^{z}(g(z)-g(t))^{p-1}(1-x+y-z+t)^{n-2}dt+o(1),\ \frac{1}{2}<\varepsilon<1.$$

Как и выше, $\forall\delta>0\,\exists N\,\forall n>N\,\forall x,y,z,t$ таких, что $x-y<n^{-\varepsilon}$, $z-t<n^{-\varepsilon}$, справедливы двухсторонние оценки

$$(g'(x)-\delta)(x-y)\le g(x)-g(y)\le(g'(x)+\delta)(x-y)$$

и

$$(g'(z)-\delta)(z-t)\le g(z)-g(t)\le(g'(z)+\delta)(z-t),$$

которые дают для T_n^2 двухсторонние оценки, отличающиеся друг от друга лишь знаком перед δ. Выпишем оценку сверху при $p>1$:

$$T_n^2\le 2p^2n^{2p-1}(n-1)\int_0^1 g'(x)(g'(x)+\delta)^{p-1}\int_{x-n^{-\varepsilon}}^{x}(x-y)^{p-1}dy\cdot$$
$$\int_0^y g'(z)(g'(z)+\delta)^{p-1}dz\int_{z-n^{-\varepsilon}}^{z}(z-t)^{p-1}(1-x+y-z+t)^{n-2}dt+o(1).$$

Замена $x-y=u$ и $z-t=v$ показывает, что

$$T_n^2\le 2p^2n^{2p-1}(n-1)\int_0^1 g'(x)(g'(x)+\delta)^{p-1}\int_0^x g'(z)(g'(z)+\delta)^{p-1}dz\cdot$$
$$\cdot\int_0^{n^{-\varepsilon}}u^{p-1}du\int_0^{n^{-\varepsilon}}v^{p-1}(1-u-v)^{n-2}dv+o(1).$$

Нетрудно убедиться, что

$$p^2n^{2p-1}(n-1)\int_0^{n^{-\varepsilon}}u^{p-1}du\int_0^{n^{-\varepsilon}}v^{p-1}(1-u-v)^{n-2}dv\to(\Gamma(p+1))^2.$$

Переход к пределу в двухсторонних оценках и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теорем 3 и 4 случайная величина $n^{p-1}\rho_{p,n}$ сходится по вероятности к числу $\Gamma(p+1)\int\limits_0^1 (h'(a))^{1-p}da$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $G(x)=h(F(x))$, замена $a=F(x)$ приводит к формуле

$$\int\limits_0^1 (h'(a))^{1-p}da=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(F'(x))^p(G'(x))^{1-p}dx.$$

4. Представляет интерес случай $h(a)=a^s$ (часто рассматриваемый в литературе). Такие функции не удовлетворяют условиям теорем 3 и 4.

Математическое ожидание при этой гипотезе будем обозначать символом E_s.

Для дальнейшего потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА I. Пусть даны две последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, удовлетворяющие условиям

I) $\alpha_n \searrow 0$;

2) $\sum\alpha_n=\infty$;

3) $\beta_n/\alpha_n \to a$;

4) $\sum\alpha_n(a-\beta_n/\alpha_n)<\infty$.

Пусть последовательность C_n задается рекуррентным соотношением

$$C_n=(1-\alpha_n)C_{n-1}+\beta_n.$$

Тогда $\lim C_n=a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C_n-C_{n-1}=-\alpha_n C_{n-1}+\beta_n$, то при $C_n\leq\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ получаем, что $C_n\geq C_{n-1}$, а при $C_{n-1}>\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ справедливо $C_n<C_{n-1}$.

Предположим сначала, что для всех n, бо́льших некоторого n_0, последовательность C_n монотонна. Не ограничивая общности, можно считать, что в этом случае $C_{n-1}>\frac{\beta_n}{\alpha_n}$, и последовательность C_n – монотонно убывающая, ограниченная. Покажем, что она сходится к a.

Положим $\gamma_n=C_n-a$. Ясно, что γ_n – монотонная ограниченная последовательность, имеющая предел. Предположим, что $\lim\gamma_n=c>0$. Тогда $\forall\varepsilon>0\,\exists k\;\forall p>0$ справедливо $0<c-\varepsilon<\gamma_{k+p}<c+\varepsilon$. Выпишем рекуррентные соотношения для γ_{k+s}, $s=1,2,\dots,r$:

$$\gamma_{k+1}=\gamma_k-\alpha_{k+1}\gamma_k-\alpha_{k+1}\left(a-\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\right),$$

$$\gamma_{k+2}=\gamma_{k+1}-\alpha_{k+2}\gamma_{k+1}-\alpha_{k+2}\left(a-\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{k+r}=\gamma_{k+r-1}-\alpha_{k+r-1}-\alpha_{k+r}\left(a-\frac{\beta_{k+r}}{\alpha_{k+r}}\right).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\gamma_{k+r}=\gamma_k-\sum_{s=1}^{r}\alpha_{k+s}\gamma_{k+s-1}-\sum_{s=1}^{r}\alpha_{k+s}\left(a-\frac{\beta_{k+s}}{\alpha_{k+s}}\right).$$

Поскольку для всех справедливо $\gamma_{k+s}>C-\varepsilon>0$, то

$$\gamma_{k+r}<\gamma_k-(C-\varepsilon)\sum_{s=0}^{r}\alpha_{k+s}-\sum_{s=1}^{r}\alpha_{k+s}\left(a-\frac{\beta_{k+s}}{\alpha_{k+s}}\right).$$

Устремляя r к ∞, получаем, что $\gamma_{k+r}\to-\infty$. Таким образом, предположение о положительности C неверно. Аналогично опровергается и предположение об отрицательности C.

Пусть теперь неверно предположение о монотонности последовательности C_n, т.е. найдется монотонная подпоследовательность $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ такая, что для всех натуральных точек интервала (n_i, n_{i+1}) последовательность C_n монотонна и меняет направление монотонности при переходе из одного интервала в другой. Но в этом случае элементы последовательности C_n ограничены с двух сторон соответствующими членами последовательности β_{n_i}/α_{n_i} и $\beta_{n_{i+1}}/\alpha_{n_{i+1}}$, которые стремятся к a. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следует из доказательства леммы, последовательность γ_n обладает следующими свойствами: ряд $\sum\alpha_n\gamma_n$ сходится.

ТЕОРЕМА 5. Пусть a_i распределены независимо и одинаково в $[0,1]$ с плотностью $h'(a)=sa^{s-1}$. Тогда если $p>1$ и $s>\frac{p}{p-1}$, то $E_s(n^{p-1}\rho_{p,n})\to\infty$ при $n\to\infty$. Если $p\le 1$ или $p>1$, $0<s<p/_{p-1}$, то

$$E_s(n^{p-1}\rho_{p,n})\to\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)},$$

$$E_s(n^{p-1}\rho_{p,n})\to\left(\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$x_n=E_s\rho_{p,n}=n!\int_0^1 sa_n^{s-1}da_n\cdots\int_0^{a_2}sa_1^{s-1}(a_1^p+\cdots+(1-a_n)^p)\,da_1.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы I, можно получить, что

$$\varkappa_n = \frac{sn}{sn+p}\varkappa_{n-1} + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(sn+1)}{\Gamma(sn+p+1)}.$$

Исследуем поведение последовательности $\delta_n = n^{p-1}\varkappa_n$. Рекуррентное соотношение для нее можно записать в виде

$$\delta_n = \left(1 - \frac{p+s-ps}{sn+p} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\delta_{n-1} + \frac{\Gamma(p+1)}{ns^p}(1+O(1)).$$

Пусть $p>1$ и $s \geq \frac{p}{p-1}$. Так как ряд $\sum \frac{\Gamma(p+1)}{ns^p}$ расходится, то $\delta_n \to \infty$. Пусть $0<s<\frac{p}{p-1}$ или $p \leq 1$. В этом случае мы находимся в условиях леммы I, где $\alpha_n = \frac{p-ps+s}{sn+p} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\beta_n = \frac{\Gamma(p+1)}{ns^p}(1+o(1))$. Поэтому $\lim \delta_n = \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}$. Первая часть теоремы доказана.

Учитывая замечание к лемме I, $\delta_n = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)} + \varepsilon_n$, причем ряд $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ сходится. Пусть $\omega_n = E_s(n^{p-1}\rho_{p,n})$. Для ω_n можно получить следующее рекуррентное соотношение:

$$\omega_n = \left(1 - \frac{2(p+s-ps)}{ns} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\omega_{n-1} + \delta_{n-1}\frac{2n^p s\,\Gamma(p+1)}{(ns)^{p+1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Но $\delta_{n-1} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)} + \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_n \to 0$, $\sum \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty$. Поэтому

$$\omega_n = \left(1 - \frac{2(p-ps+s)}{ns} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\omega_{n-1} +$$
$$+ \frac{2(\Gamma(p+1))^2}{s^{2p-1}\cdot n(p+s-ps)}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{c\varepsilon_n}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Мы снова находимся в условиях леммы 2. Поэтому

$$\lim \omega_n = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ. При гипотезе $h(a)=a^s$ случайная величина $n^{p-1}\rho_{p,n}$ сходится по вероятности к числу $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}$.

5. Свойства критерия $\rho_{2,n}$ изучались Мораном в [4]. Он получил частные случаи теорем I и 2 и исследовал поведение $\rho_{2,n}$ лишь для ограниченного класса функций h, возникающих при переходе от распределения χ^2 с двумя степенями свободы к распределению χ^2 с произвольным числом степеней свободы.

Таким образом, предложенный класс является состоятельным для весьма широкого класса альтернатив и может быть использован при проверке статистических гипотез. При этом для каждого h

можно подбирать ρ , наилучшим образом различающее гипотезы.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ, 1958, №7. Сер. математика, механика, астрономия, вып.2, с.52-59.
2. РАПОПОРТ Э.О. О наилучшем приближении вероятностных мер дискретными. - Оптимизация, 1979, вып. 23 (40), с.17-24.
3. GREENWOOD M. The statistical study of infections diseases. - J. Roy. Statist. Soc., 1946, v.109, p.85-103.
4. MORAN P.A.P. The random division of an interval. Part I. - J. Roy. Statist. Soc., Suppl., 1947, v. 9, p.92-96. Part II.- J. Roy. Statist. Soc., B, 1951, v.13, p.147-150.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.06.1980 г.