Выпуск 25 (42) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

ВЫПУКЛЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПСЕВДОТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Г.Кусраев, С.С.Кутателадзе

§ I. Введение

В последние годы существенное развитие получило субдифференциальное исчисление – раздел нелинейного анализа, изучающий односторонние выпуклые аппроксимации негладких операторов. Для построения хороших субдифференциальных приближений к общим операторам необходимо, прежде всего, иметь удовлетворительную локальную теорию выпуклых операторов. При этом изучение выпуклых операторов во внутренних точках областей определения, как легко видеть, является алгебраическим вопросом. В этой связи не удивительно, что локальную теорию выпуклых операторов во внутренних точках можно считать в основном построенной [I,2]. Что же касается топологического случая, то он рассмотрен явно недостаточно. Единственное (на нужном уровне общности, разумеется) продвижение в этом направлении достигнуто в [3], где установлены правила субдифференцирования максимума и суммы операторов, непрерывных на своих областях определения.

Настоящая статья примыкает к упомянутым выше работам и посвящена получению всех основных правил субдифференциального исчисления в псевдотопологических векторных пространствах. Такая общность, к сожалению, минимально необходима для включения алгебраического случая, в котором существенную роль играет (о)-сходимость в областях прибытия рассматриваемых операторов.

Основная мысль, заложенная в статью, состоит в том, что естественно понимаемое (в духе теории Банаха) общее положение надграфиков операторов влечет автоматическую "полунепрерывность" инфимальной конволюции. Иными словами, при нужном понимании слов "общее положение" в непрерывном случае полностью сохраняются все результаты локального выпуклого анализа в стандартных формулировках. За основу изложения мы взяли операторный вариант свертки бифункций, предложенный в свое время Рокафелларом. Соответствующая операция - свертка Рокафеллара - является, по всей видимости, кратчайшим путем вывода формул субдифференцирования и т.п. из формул Моро. Помимо этого, изучение свертки Рокафеллара существенно в теории двойственности многозначных отображений и, в частности, моделей экономической динамики. В этой связи мы иллюстрируем полученные результаты только элементарным вариантом теоремы об ε-характеристике в конечно-шаговых терминальных задачах, так как подробное исследование этих связей носит достаточно рутинный характер.

Отметим, что некоторые результаты этой статьи анонсированы в [4].

Всюду в этой работе буквами X, Y, Z обозначаются вещественные отделимые псевдотопологические векторные пространства, буквами E_1, E - предупорядоченные псевдотопологические векторные пространства, причем всегда считается, что E является K-пространством и решеточные операции в нем непрерывны. Дополнительная квалификация рассматриваемых пространств будет особо оговариваться в нужных случаях. Символы $\mathcal{L}(X,Y)$ и $\mathcal{L}^+(E_1,E)$ обозначают соответственно пространства всех линейных непрерывных операторов из X в Y и непрерывных положительных операторов из E_1 в E.

Непустое подмножество K векторного пространства X называется конусом, если $K+K\subset K$ и $\lambda K\subset K$ для любого числа $\lambda>0$. Конус K называется собственным, если $K\cap(-K)=\{0\}$. Множество $E^+=\{e\in E : e\geq 0\}$ называется конусом положительных элементов.

Присоединим к упорядоченному векторному пространству наибольший и наименьший элементы $+\infty$ и $-\infty$ или только наибольший элемент $+\infty$ и частично распространим операции сложения и умножения на число так, как это делается для множества вещественных чисел R (см., например, [1]). Полученные пространства обозначим $E\cup\{\infty\}$ и $E\cup\{+\infty\}$ соответственно. Для отображения $F: X \to E \cup \{\infty\}$ определим надграфик $epi\, F$ и эффективную область определения $dom\, F$ равенствами

$$dom\, F = \{x \in X : Fx < +\infty\},$$

$$epi\, F = \{(x, e) \in X \times E : e \geq Fx\}.$$

Индикаторной функцией множества $M \subset X$ называется отображение $\delta_E(M): X \to E \cup \{+\infty\}$, равное нулю на M и $+\infty$ на дополнении множества M.

Будем рассматривать также отображения: I_X – тождественный оператор на X, $\Delta_{X^n}: X \to X^n$, $\Delta_{X^n}: x \to (x, \dots, x) \in X^n$ – диагональное отображение, при этом $\Delta(X^n) = \{(x, \dots, x) \in X^n : x \in X\}$ – диагональ X^n.

Подмножество F декартова произведения $X \times Y$ будем называть соответствием (многозначным отображением из X в Y, графиком которого является F, т.е. $F[x] = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$. При этом $F^{-1}[y] = \{x \in X : (x, y) \in Y\}$. Если $G \subset Y \times Z$, то композиция $F \circ G$ соответствий F и G определяется следующим образом: $F \circ G = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y : (x, y) \in F, (y, z) \in G\}$. В дальнейшем без дополнительных пояснений используется терминология монографий [I] и [5].

§2. Топологическое общее положение систем конусов и выпуклых множеств

Рассмотрим пару конусов K_1 и K_2 в псевдотопологическом пространстве X и определим операции разложения $d^1 = d^1_{K_1, K_2}$ и $d = d_{K_1, K_2}$ относительно этой пары равенствами

$$d^1(U) = U \cap K_1 - U \cap K_2, \quad d(U) = d^1(U) \cap (-d^1(U)),$$

где U – некоторое подмножество X. Если $\mathcal{X}$ – фильтр в X, то обозначим символом $d(\mathcal{X})$ фильтр с базисом $\{d(U) : U \in \mathcal{X}\}$. Фильтр $\mathcal{X}$ называется разложимым относительно рассматриваемой пары конусов, если $\mathcal{X} < d(\mathcal{X}_1)$ для некоторого сходящегося к нулю фильтра $\mathcal{X}_1$. Очевидно, что в этом случае $\mathcal{X}$ также сходится к нулю.

Если существует дополняемое подпространство $X_0 \subset X$, в котором всякий сходящийся к нулю фильтр разложим относительно конусов K_1 и K_2, то говорят, что эти конусы н а х о д я т с я в (псевдо)топологическом о б щ е м п о л о ж е н и и и воспроизводят при этом пространство X_0. Система конусов $K_1, \dots, K_n$ находится в топологическом общем положении, если существует такая перестановка $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$, что конусы K_{i_m} и $\bigcap_{s=m+1}^{n} K_{i_s}$ находятся в топологическом общем положении при всех $m = 1, \dots, n-1$. В дальнейшем, допуская некоторую вольность, будем говорить просто об общем положении системы конусов, опуская слово "топологически".

Допустим, что X – топологическое векторное пространство. Конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении тогда и только тогда, если система множеств $\{d(V) : V$ – симметричная окрестность нуля$\}$ является базисом фильтра окрестностей нуля некоторого дополняемого подпространства $X_0 \subset X$. Если, кроме того, $X_0 = X$ и $K = K_1 = K_2$ – собственный конус, то условие общего положения для K_1 и K_2 равносильно тому, что упорядоченное топологическое векторное пространство (X, K) локально разложимо [6], или еще говорят, что K – не сплющен [7]. Итак, если конусы совпадают с несплющенным собственным конусом в топологическом векторном пространстве, то эти конусы находятся в общем положении.

Приведем еще один простой пример. Пусть $P_1, \dots, P_n : X \to X$ – коммутирующая система непрерывных проекторов и $K_i = P_i[X]$, $i = 1, \dots, n$. Тогда подпространства $K_1, \dots, K_n$ находятся в общем положении.

Из определений вытекает, что если конусы $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset X$ находятся в общем положении, воспроизводя при этом подпространство $X_0 \subset X$, то $K_1 - K_2 = K_2 - K_1 = X_0$, т.е. конусы K_1 и K_2 воспроизводяще расположены в X_0. Обратное, вообще говоря, неверно. Так, например, существуют воспроизводящие конусы, не являющиеся несплющенными [6].

Можно показать, что если векторное пространство X снабдить псевдотопологией конечномерной сходимости, то воспроизводящее расположение конусов влечет их общее положение. Псевдотопология конечномерной сходимости описывается следующим образом: фильтр сходится к нулю в том и только в том случае, если он обладает базисом, содержащемся в каком-либо конечномерном подпространстве и сходящемся к нулю в единственной отделимой линейной топологии этого подпространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $K_1, K_2 \subset X$ – конусы и $X_0 \subset X$ - дополняемое подпространство. Эквивалентны следующие условия:

I) K_1 и K_2 находятся в общем положении и воспроизводят при этом подпространство X_0;

2) для любого фильтра $\mathscr{X} \not\downarrow X_0$ найдутся фильтры $\mathscr{X}_1 \not\downarrow K_1$ и $\mathscr{X}_2 \not\downarrow K_2$ такие, что $\mathscr{X} < \mathscr{X}_1 - \mathscr{X}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I)$\Longrightarrow$2). Нужно лишь заметить, что если $\mathscr{X} < d(\mathscr{X}_1)$, то $\mathscr{X} < d'(\mathscr{X}_1) = \mathscr{X}_1 \cap K_1 - \mathscr{X}_1 \cap K_1$. 2)$\Longrightarrow$I). Пусть $\mathscr{X}' \not\downarrow X_0$ такой, что $\mathscr{X}' \cap K_i = \mathscr{X}_i$, $i=1,2$. Тогда для $\mathscr{X}_1 = \mathscr{X}' \wedge - \mathscr{X}'$ имеем $\mathscr{X} < d(\mathscr{X}_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ - псевдотопологические векторные пространства и для каждого $i=1,\dots,n$ задана пара конусов $K_i, H_i \subset X_i$. Если $K_0 = K_1 \times \dots \times K_n$ и $H_0 = H_1 \times \dots \times H_n$, то K_0 и H_0 находятся в общем положении в том и только в том случае, если для любого $i=1,\dots,n$ конусы K_i и H_i находятся в общем положении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Допустим, что конусы K_0 и H_0 находятся в общем положении, воспроизводя при этом дополняемое подпространство $Y \subset \prod_{j=1}^{n} X_j$. Поскольку $Y = K_0 - H_0$, для i-й проекции Y_i подпространства Y имеем $Y_i = K_i - H_i$. Отсюда вытекает равенство $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$. Тем самым, каждое из подпространств Y_i дополняемо в соответствующем X_i. Обратно, если K_i и H_i воспроизводят дополняемое подпространство $Y_i \subset X$, то $K_0 - H_0 = Y_1 \times \dots \times Y_n$ - дополняемое подпространство в $\prod_{j=1}^{n} X_j$. Осталось заметить, что фильтр $\mathscr{X}_1 \times \dots \times \mathscr{X}_n \not\downarrow Y$ разложим относительно K_0 и H_0 в том и только в том случае, если для любого $i=1,\dots,n$ фильтр $\mathscr{X}_i$ разложим относительно K_i и H_i.

Введем теперь понятие общего положения для системы выпуклых множеств. Пусть $G \subset X$ - выпуклое множество. Коническая оболочка множества $\{1\} \times G \subset R \times X$ называется преобразованием Хермандера множества G и обозначается символом H_G. Таким образом, $H_G = \{(t,x) \in R \times X : x \in tG\} = Co(\{1\} \times G)$. Выпуклые множества $G_1, \dots, G_n \subset X$

находятся в общем положении, если их преобразования Хермандера $H_{G_1}, \dots, H_{G_n}$ находятся в общем положении.

Для конусов $K_1, \dots, K_n$ это определение является новым лишь формально. В самом деле, $H_{K_i} = (R^+ \setminus \{0\}) \times K_i \cup \{0,0\}$, $i = 1, \dots, n$, следовательно, в силу предложения 2.2 $H_{K_1}, \dots, H_{K_n}$ находятся в общем положении тогда и только тогда, если находятся в общем положении конусы $K_1, \dots, K_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть выпуклые множества $G_1 \subset X$ и $G_2 \subset X$ находятся в общем положении и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда каждое из следующих условий а) и б) достаточно, чтобы $A[G_1]$ и $A[G_2]$ находились в общем положении:

а) A - псевдотопологический изоморфизм;

б) A - псевдотопологический гомоморфизм и, кроме того, $C_0(\{1\} \times G_1) - C_0(\{1\} \times G_2) = R \times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширим оператор A до оператора $\bar{A}$: $R \times X \to R \times X$, полагая $\bar{A}(t,x) = (t, Ax), (t,x) \in R \times X$. Пусть $\mathcal{Z} \subset R \times X$ - дополняемое подпространство, воспроизводимое конусами H_{G_1} и H_{G_2}. Если выполнено а), то $\bar{A}[\mathcal{Z}]$ дополняемо в $R \times Y$, так как $\bar{A}$ - изоморфизм, а при изоморфизме дополняемость сохраняется.

Если же б) выполняется, то $\mathcal{Z} = R \times X$. Заметим еще, что $\bar{A}[H_{G_i}] = H_{A[G_i]}$, $i = 1, 2$. Таким образом, можем считать, что G_1 и G_2 - конусы и $G_1 - G_2 = X$.

Рассмотрим фильтр $\mathcal{Y}$, сходящийся к нулю в Y. При выполнении любого из условий а) и б) найдется фильтр $\mathcal{X} \downarrow X$ такой, что $\mathcal{Y} < A(\mathcal{X})$. Пусть $\mathcal{X} < d(\mathcal{X}_1)$ для некоторого фильтра $\mathcal{X}_1 \downarrow X$, где $d = d_{G_1, G_2}$. Если $d_1 = d_{A[G_1], A[G_2]}$, то

$$\mathcal{Y} < A[d(\mathcal{X}_1)] < d_1(A(\mathcal{X}_1)).$$

В силу произвольности $\mathcal{Y} \downarrow Y$ это означает, что конусы $A[G_1]$ и $A[G_2]$ находятся в общем положении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ - псевдотопологические векторные пространства, $X_0 = X_1 \times \dots \times X_n$ и для любого $i = 0, 1, \dots, n$ задана пара выпуклых множеств $F_i, G_i \subset X_i$. Множества $F_1 \times \dots \times F_n$ и $G_1 \times \dots \times G_n$

находятся в общем положении в том и только в том случае, если при любом $i=1,\ldots,n$ находятся в общем положении множества G_i и F_i.

Если F_0 и G_0 находятся в общем положении, то для любой перестановки $\theta=\{i_1,\ldots,i_n\}$ множества индексов $\{1,\ldots,n\}$ находятся в общем положении множества $\Delta_\theta[F_0]$ и $\Delta_\theta[G_0]$, где $\Delta_\theta: X_0\to X_{i_1}\times\ldots\times X_{i_n}$ – отображение перестановки,

$$\Delta_\theta:(x_1,\ldots,x_n)\to(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что вторая часть утверждения вытекает из предложения 2.3, так как отображение Δ_θ – изоморфизм. Для доказательства первой части установим следующее вспомогательное утверждение. Выпуклые множества G_1 и G_2 находятся в общем положении в том и только в том случае, если для любого натурального числа n конические оболочки множеств $\{e\}\times G_1$ и $\{e\}\times G_2$, где $e=(1,\ldots,1)\in R^n$, находятся в общем положении. В самом деле, пусть $i: R\times X\to\Delta(R^n)\times X$ – изоморфизм, совпадающий с I_X на X и с диагональным отображением Δ_{R^n} на R. В силу предложения 2.3 G_1 и G_2 находятся в общем положении тогда и только тогда, если конусы $i[H_{G_1}]=Co(\{e\}\times G_1)$ и $i[H_{G_2}]=Co(\{e\}\times G_2)$ находятся в общем положении в $\Delta(R^n)\times X$, а значит, и в $R^n\times X$, так как $\Delta(R^n)\times X$ дополняемо в $R^n\times X$. Рассмотрим теперь отображение перестановки δ, устанавливающее изоморфизм между пространствами $R^n\times X_0$ и $(R\times X_1)\times\ldots\times(R\times X_n)$. Имеют место равенства $H_{F_1}\times\ldots\times H_{F_n}=\delta[Co\{e\}\times F_1\times\ldots\times F_n)]$, $H_{G_1}\times\ldots\times H_{G_n}=\delta[Co\{e\}\times G_1\times\ldots\times G_n]$.

Отсюда, ввиду предложений 2.2 и 2.3, без труда вытекает требуемая эквивалентность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если пересечение $G_1\cap\ldots\cap G_n$ содержит внутреннюю точку каждого, за исключением, быть может, одного из выпуклых множеств $G_1,\ldots,G_n$, то эти множества находятся в общем положении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, предположим, что $n=2$

и $x_0 \in G_1 \cap G_2$ - внутренняя точка G_1. Кроме того, в силу предложения 2.3 можем считать $x_0 = 0$. Если V - окрестность нуля, содержащаяся в G_1, и $\varepsilon > 0$, то окрестность $(1, 1+2\varepsilon) \times V$ точки $(1+\varepsilon, 0) \in R \times X$ содержится в H_{G_1}. Таким образом, наше утверждение вытекает из соответствующего результата для конусов (см. [8]).

Перейдем к характеризации условия общего положения в топологических векторных пространствах.

Подмножество $V \subset X$ называется (K_1, K_2)-разложимым, если для любого $x \in V$ найдутся $x_1 \in V \cap K_1, x_2 \in V \cap K_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in R^+$ такие, что $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Отметим, что в отличие от разложимости фильтра относительно конусов K_1 и K_2 понятие (K_1, K_2)-разложимости множества является "инверсионно" симметричным: если V (K_1, K_2)-разложимо, то $-V$ является (K_2, K_1)-разложимым. Полунорма p на пространстве X называется полуразложимой относительно K_1 и K_2, если найдутся положительное число C и положительный сублинейный функционал $\bar{p}: X \to R$, удовлетворяющий условиям:

1) $p(x) = \bar{p}(x) \vee \bar{p}(-x)$ для всех $x \in X$;

2) для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ такие, что $x = x_1 - x_2$ и $\bar{p}(x_1) + \bar{p}(x_2) \leq C(\bar{p}(x) + \varepsilon)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть X - локально-выпуклое пространство, X_0 - его дополняемое пространство, K_1 и K_2 - конусы в X. Эквивалентны следующие условия:*

1) конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении и воспроизводят при этом подпространство X_0;

2) существует базис окрестностей нуля пространства X_0, состоящий из выпуклых (K_1, K_2)-разложимых множеств;

3) топология пространства X_0 определяется некоторым семейством полунорм, полуразложимых относительно K_1 и K_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если V - выпуклая симметричная окрестность нуля, то множество $\delta(V) = co[(-K_2 \cap V) \cup (K_1 \cap V)]$ является (K_1, K_2)-разложимым. Кроме того, очевидно, что

$$\frac{1}{2} d^1(V) \subset \delta(V) \subset d^1(V),$$

и отсюда немедленно вытекает эквивалентность I)$\Leftrightarrow$2).

Докажем теперь импликации 2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$I). Прежде всего установим следующий факт. Положительный сублинейный функционал p удовлетворяет условию 2) из определения полуразложимой полунормы тогда и только тогда, если $V_p \subset \delta(V_p)\cdot C$, где $V_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. В самом деле, пусть $V_p \subset C\delta(V_p)$, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $z = [(p(x)+\varepsilon)\cdot C]^{-1}\cdot x \in \delta(V_p)$, поэтому имеет место представление $z = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$, где $x_1 \in K_1 \cap V_p$, $x_2 \in K_2 \cap V_p$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Отсюда для элементов $\bar{x}_i = \lambda_i C(p(x)+\varepsilon)x_i$, $i=1,2$, получаем $x = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ и $p(\bar{x}_1) + p(\bar{x}_2) = [\lambda_1 p(x_1) + \lambda_2 p(x_2)]\cdot C(p(x)+\varepsilon) \leq C(p(x)+\varepsilon)$.

Обратно, пусть $x \in V_p$, а $\varepsilon > 0$ и $x_i \in V_p \cap K_i$, $i=1,2$, подберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$p(x) + \varepsilon < 1, \quad x = x_1 - x_2,$$

$$p(x_1) + p(x_2) \leq C[p(x)+\varepsilon].$$

Если теперь $\lambda_1, \lambda_2 \in R^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i C \geq p(x_i)$ и $\bar{x}_i = (C\lambda_i)^{-1} x_i$, $i=1,2$, то $x = C(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) \in C\delta(V_p)$. 2)$\Rightarrow$3). Если $\mathscr{X}$ - базис фильтра окрестностей нуля в X_0, состоящий из выпуклых (K_1,K_2)-разложимых множеств, то система множеств $\{V \cap (-V) : V \in \mathscr{X}\}$ также образует базис фильтра окрестностей нуля. Отсюда следует, что функционалы Минковского множеств вида $V \cap (-V)$, $V \in \mathscr{X}$, образуют совокупность полунорм, определяющую топологию пространства X_0. Осталось заметить, что функционал Минковского множества $V \cap -V$ полуразложим относительно K_1 и K_2, так как $\delta(V) \supset V$ для любого (K_1,K_2)-разложимого множества V. 3)$\Rightarrow$I). Пусть $\{p_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ - определяющее топологию X_0 семейство полунорм, полуразложимых относительно K_1 и K_2, а $\{\bar{p}_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ - соответствующее семейство положительных сублинейных функционалов. Тогда совокупность множеств вида $V_\sigma = V_{\bar{p}_\sigma} = \{x \in X : \bar{p}_\sigma(x) < 1\}$ является базисом окрестностей нуля, причем для любого $\sigma_1 \in \Sigma$ найдется $\sigma_2 \in \Sigma$ такой, что $V_{\sigma_1} - V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$. Для таких σ_1 и σ_2 имеют место включения $V_{\sigma_1} \subset C_{\sigma_1}\delta(V_{\sigma_1}) \subset C_{\sigma_1}(V_{\sigma_1} \cap K_1 - V_{\sigma_1} \cap K_2) \subset C_{\sigma_1}(V_{\sigma_1} - V_{\sigma_1}) \subset C_{\sigma_1} V_{\sigma_2}$, что и доказывает требуемую импликацию.

Рассмотрим воспроизводяще расположенную пару конусов K_1 и K_2 в топологическом векторном пространстве (X,τ). Если

V - закругленная окрестность нуля в (X,τ), то множество $d(V)$ закруглено и поглощающе. Кроме того, $V+V\subset U$ влечет $d(V)+d(V)\subset d(U)$. Таким образом, система множеств $\{d(V)\}$, где V пробегает базис закругленных окрестностей нуля в X, является базисом окрестностей нуля некоторой линейной топологии $d(\tau)$. Очевидно, что конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении относительно $d(\tau)$, причем $d(\tau)$ является наименьшей из всех векторных топологий, обладающих этим свойством и мажорирующих топологию τ.

ТЕОРЕМА КЛИ. Пусть (X,τ) - метризуемое топологическое векторное пространство, K_1 и K_2 - воспроизводящая пара конусов в X. Тогда $(X,d(\tau))$ также метризуемо. Если, кроме того, K_1 и K_2 полны относительно топологии τ, то $(X,d(\tau))$ - полное топологическое векторное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[ж)]. Пусть $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ - счетный базис замкнутых закругленных окрестностей нуля в (X,τ) такой, что

$$V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n,\ n=1,\ldots$$

Тогда семейство $\{d(V_n): n=1,2,\ldots\}$ есть базис окрестностей нуля в топологии $d(\tau)$ и поэтому $(X,d(\tau))$ метризуемо. Покажем, что пространство $(X,d(\tau))$ полно в том случае, когда полны конусы K_1 и K_2. Рассмотрим для этого последовательность Коши $\{x_n\}$ и найдем такую ее подпоследовательность $\{x'_n\}$, что $\{x'_{n+1}-x'_n\}\in d(V_n),\ n=1,2,\ldots$ Докажем теперь, что последовательность $\{x'_n\}$ сходится, установив тем самым полноту $(X,d(\tau))$.

Пусть для каждого n имеет место представление

$$x'_{n+1}-x'_n=x^1_n-x^2_n=y^2_n-y^1_n,$$

где $x^1_n, y^1_n\in V_n\cap K_1,\ x^2_n, y^2_n\in V_n\cap K_2$. Положим

$$u^i_n=\sum_{j=1}^{n}x^i_j,\quad v^i_n=\sum_{j=1}^{n}y^i_j,\ i=1,2.$$

Тогда $u^1_n\in K_1$, и для всякого $s\in N$ имеем

ж) Доказательство приводится для полноты изложения.

$$u^1_{n+1}-u^1_n=\sum_{j=n}^{n+1}x^1_j\in V_{n+1}\cap K_1+\ldots+V_{n+1}\cap K_1\subset V_n\cap K_1.$$

Отсюда видно, что $\{u_n\}$ – последовательность Коши в (X,τ) и, в силу полноты конуса K_1, сходится к некоторому элементу $u^1\in K_1$. Переходя к пределу при $s\to\infty$, получим

$$u^1-u^1_n\in V_n\cap K_1,\ n=1,2,\ldots$$

Рассуждая аналогично относительно последовательностей $\{u^2_n\}$, $\{v^1_n\}$ и $\{v^2_n\}$, будем иметь $u^2-u^2_n\in V_n\cap K_2, v^1-v^1_n\in V_n\cap K_1$ и $-v^2_n+v^2\in V_n\cap K_2$, $n=1,\ldots$, где

$$u^i=\sum_{j=1}^{\infty}x^i_j,\ v^i=\sum_{j=1}^{\infty}y^i_j,\ i=1,2.$$

Кроме того, очевидно, что $x_0\overset{df}{=}u^1-u^2=v^2-v^1$. Из всего сказанного следует справедливость следующих представлений:

$$x'_{n+1}-x'_1-x_0=u^1_n-u^1-u^2_n+u^2\in V_n\cap K_1-V_n\cap K_2,$$

$$x'_{n+1}-x'_1-x_0=v^2_n-v^1-v^2_n+v^2\in V_n\cap K_2-V_n\cap K_1.$$

Последнее означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ сходится в топологии $d(\tau)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Теоремой Кли обычно называют тот частный случай установленного факта, когда $K_1=K_2$ [6]. Однако рассмотрение различных конусов не приводит к существенному усложнению ситуации и приведенные рассуждения являются несложной модификацией доказательства оригинальной теоремы Кли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Пусть K_1 и K_2 – полные конусы в метризуемом топологическом векторном пространстве, $X_0\subset X$ – дополняемое подпространство. Следующие условия эквивалентны:*

I) конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении, воспроизводя при этом подпространство X_0;

2) для любой окрестности нуля V в X_0 множество $d^1(V)$ – также окрестность нуля в X_0 и $K_1-K_2=X_0$.

Если, кроме того, X_0 второй ка-

тегории, то каждое из утверждений I) и 2) эквивалентно следующему:

3) конусы K_1 и K_2 воспроизводяще расположены в X_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации I)$\Rightarrow$2) и I)$\Rightarrow$3) тривиальны. 2)$\Rightarrow$I). Пусть $K_1-K_2=X_0$ и i - тождественное отображение из $(X_0, d(\tau))$ в (X_0, τ). По теореме Кли $(X_0\, d(\tau))$ - полное метризуемо топологическое векторное пространство. Если V - окрестность нуля в (X,τ), то $i[d'(V)]$ также является окрестностью нуля в (X,τ); следовательно, i - непрерывное почти открытое отображение. Тогда i есть гомеоморфизм, поэтому $d(\tau)=\tau$. 3)$\Rightarrow$I). Если выполнено 3), то $K_1-K_2=X_0$, а i - непрерывное линейное отображение полного метризуемого пространства $(X_0, d(\tau))$ на пространство второй категории (X_0,τ). По теореме об открытом отображении i - гомеоморфизм и $d(\tau)=\tau$.

В качестве следствия приведем один результат из [9].

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Замкнутые конусы K_1 и K_2 в полном метризуемом т.в.п. образуют несплющенную пару в том и только в том случае, если эти конусы воспроизводяще расположены.

§3. Опорные множества сублинейных операторов

Сублинейные операторы играют важную роль в различных приложениях функционального анализа (см. [I,IO,II]). При этом одним из основных вопросов теории сублинейных операторов является вычисление опорного множества составного оператора. Топологическое рассмотрение этого вопроса тесно связано с понятием общего положения. Прежде всего выясним, что означает общее положение надграфиков сублинейных операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть надграфики сублинейных операторов P_1 и $P_2: X\to E\cup\{+\infty\}$ находятся в общем положении и воспроизводят при этом дополняемое подпространство $\mathcal{X}_0\subset X\times E$.

Тогда $dom\,P_1$ и $dom\,P_2$ находятся в общем положении и если $X_0 \subset X$ — воспроизводимое ими дополняемое подпространство, то $\mathcal{Z}_0 = X_0 \times E$ или, что то же самое, $epi\,P_1 - epi\,P_2 = [dom\,P_1 - dom\,P_2] \times E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\{0\} \times E \subset \mathcal{Z}_0$. В самом деле, в силу очевидного включения $\{0\} \times E^{+} \subset epi\,P_1 \cap epi\,P_2$ имеем

$$\{0\} \times E \subset epi\,P_1 - epi\,P_2 = \mathcal{Z}.$$

Пусть $Q: X \times E \to X \times E$ — оператор проектирования на $\mathcal{Z}_0$, $P: X \times E \to X \times E$ — канонический проектор на пространство $X \times \{0\}$ и, кроме того, $X_0 = P[\mathcal{Z}_0]$.

Если $(x, y) \in X_0 \times E$, то $(x, y_0) \in \mathcal{Z}_0$ для некоторого $y_0 \in E$, и в силу предыдущего

$$(x, y) = (x, y_0) + (0, y - y_0) \in \mathcal{Z}_0.$$

Следовательно, $X_0 \times E = \mathcal{Z}_0$.

Ясно, что линейный непрерывный оператор $Q_1: X \to X$, определенный соотношением

$$(Q_1(x), 0) = P \circ Q(x, 0) \quad (x \in X),$$

является проектором, причем $Q_1[X] = X_0$.

Рассмотрим теперь фильтр $\mathfrak{X} \downarrow X_0$. Тогда $\mathfrak{X} \times [0] \downarrow X \times E$ и, следовательно, найдется фильтр $\mathfrak{Y} \downarrow X \times E$ такой, что $\mathfrak{X} \times [0] < d(\mathfrak{Y})$, где d — оператор разложения относительно конусов $epi\,P_1$ и $epi\,P_2$.

Но тогда $\mathfrak{X} < P(d(\mathfrak{Y})) < d_1(P(\mathfrak{Y}))$, где d_1 — оператор разложения относительно $dom\,P_1 = P[epi\,P_1]$ и $dom\,P_2 = P[epi\,P_2]$. Таким образом, конусы $dom\,P_1$ и $dom\,P_2$ находятся в общем положении и предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть сублинейные операторы $P_1, P_2: X \to E \cup \{+\infty\}$ непрерывны в нуле на конусах $dom\,P_1$ и $dom\,P_2$, а эти последние находятся в общем положении. Тогда надграфики $epi\,P_1$ и $epi\,P_2$ находятся в общем положении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_0 — дополняемое подпространство, воспроизводимое конусами $dom\,P_1$ и $dom\,P_2$. Докажем, что пространство $X_0 \times E$ воспроизводится (вместе со своей топологией) надграфиками операторов P_1 и P_2. Рассмотрим фильтры $\mathfrak{X} \downarrow X_0$

и $\mathfrak{L} \notin E$. Допустим, что $\mathfrak{X} < d(\mathfrak{X}_1)$ для некоторого $\mathfrak{X}_1 \notin X$, и положим

$$\mathfrak{L}_1 = |\mathfrak{L}| + |P_1(\mathfrak{X}_1)| + |P_2(\mathfrak{X}_1)|,$$

где $|\mathfrak{L}|$ - фильтр, порожденный множествами вида $|A| = \{|y| : y \in A\}$, когда A пробегает $\mathfrak{L}$.

Для произвольных $V \in \mathfrak{X}_1$ и $U \in \mathfrak{L}_1$ найдем такие $U_1 \in \mathfrak{L}$ и $V_1 \in \mathfrak{X}$, чтобы

$$V_1 \subset d(V), \quad |U_1| + |P_1(V_1)| + |P_2[V_1]| \subset U.$$

Если $(x, y) \in V_1 \times U_1$, то имеет место представление $(x, y) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, где $x_i \in V \cap dom\, P_i$, $i = 1, 2$, а $y_1, y_2 \in U$ имеют вид

$$y_1 = y^+ + |P_1(x_1)| + |P_2(x_2)| \geq P_1(x_1),$$

$$y_2 = y^- + |P_1(x_1)| + |P_2(x_2)| \geq P_2(x_2).$$

Следовательно,

$$V_1 \times U_1 \subset V \times U \cap epi\, P_1 - V\, U \cap epi\, P_2.$$

Аналогично доказывается включение

$$V_1 \times U_1 \subset V \times U \cap epi\, P_1 - V \times U \cap epi\, P_2,$$

а это и означает, что $\mathfrak{X} \times \mathfrak{L} < d(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{L}_1)$, где $d = d_{epi\, P_1, epi\, P_2}$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если P_1 и $P_2 : X \to E$ - непрерывные сублинейные операторы, то $epi\, P_1$ и $epi\, P_2$ находятся в общем положении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть X - полное метризуемое топологическое векторное пространство, E - полное метризуемое топологическое K-пространство, а сублинейные операторы P_1 и $P_2 : X \to E \cup \{+\infty\}$ обладают замкнутыми надграфиками. Тогда конусы $epi\, P_1$ и $epi\, P_2$ находятся в общем положении в том и только в том случае, если найдется такое дополняемое подпространство $X_0 \subset X$, что $dom\, P_1 - dom\, P_2 = X_0$.

Перейдем теперь к исчислению опорных множеств.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $P_1,\dots,P_n : X \to E\cup\{+\infty\}$ – сублинейные операторы и конусы $epi\,P_1,\dots,epi\,P_n$ находятся в общем положении. Тогда имеет место представление

$$\partial(P_1+\dots+P_n)=\partial P_1+\dots+\partial P_n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $n=2$ и установить, что $\partial(P_1+P_2)\subset\partial P_1+\partial P_2$, поскольку обратное включение выполняется очевидным образом.

Так как $epi\,P_1$ и $epi\,P_2$ находятся в общем положении, найдется дополняемое подпространство $X_0\subset X$ такое, что $X_0\times E$ воспроизводится надграфиками операторов P_1 и P_2. Пусть $A\in\partial(P_1+P_2)$ и определим оператор $P: X_0\to E$, действующий по формуле

$$P(x)=\inf\{P_1(h_1)+P_2(h_2)-A(h_2):$$
$$h_1\in dom\,P_1,\ h_2\in dom\,P_2\},\ x\in X.$$

Корректность определения и сублинейность оператора P нетрудно проверяется (см., например, [10]). Очевидно также, что если $A_1\in\partial P$, а $Q: X\to X$ – непрерывный проектор на X_0, то $A_1\circ Q\in\partial P_1$ и $A-A_1\circ Q\in\partial P_2$. Поэтому осталось установить непрерывность оператора P в нуле, так как в этом случае в силу теоремы Хана – Банаха – Канторовича опорное множество $\partial P = \{A\in \mathcal{L}(X,E): Ax\le Px, x\in X\}$ непусто.

Рассмотрим произвольную пару фильтров $\mathcal{X}\downarrow X_0$ и $\mathcal{U}\downarrow E$. Пусть фильтры $\mathcal{X}_1\downarrow X$ и $\mathcal{U}_1\downarrow E$ удовлетворяют соотношению $\mathcal{X}\times\mathcal{U}<d(\mathcal{X}_1\times\mathcal{U}_1)$, где d – оператор разложения относительно конусов $epi\,P_1$ и $epi\,P_2$. Положим $\mathcal{U}_2=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_1-A(\mathcal{X}_1)$ и докажем, что $P(\mathcal{X})<[\mathcal{U}_2']$, где $\mathcal{U}_2'=\mathcal{U}_2\vee(-\mathcal{U}_2)$. Зафиксируем для этого произвольное множество $U_2\in\mathcal{U}_2$ и найдем такие $U_1\in\mathcal{U}_1$ и $V_1\in\mathcal{X}_1$, что $U_1+U_1-A[V_1]\subset U_2$. Далее, для некоторых $V\in\mathcal{X}$ и $U\in\mathcal{U}$ будем иметь $V\times U\subset d(V_1\times U_1)$, т.е. $V\times U\subset V_1\times U_1\cap epi\,P_1-V_1\times U_1\cap epi\,P_2$. Если теперь $(x,y)\in V\times U$, то справедливо представление $(x,y)=(h_1,k_1)-(h_2,k_2)$, где $h_1,h_2\in V_1$, $k_1,k_2\in U_1$, $k_i\ge P_i(h_i)$, $i=1,2$. Следовательно,

$$P(x)\le k_1+k_2-A(h_2)\in U_1+U_1-A[V_1]\subset U_2$$

для любых $x\in V$ или, что то же самое, $P[V]\subset U_2-E^+$. Аналогично устанавливается, что $P[V]\subset -U_2+E^+$. Таким образом,

$P(x) < [\mathcal{B}'_2]$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в силу предложения 3.2 теорема 3.5 обобщает установленный в [3] результат для операторов, непрерывных на своих областях определения. Положим

$$\mathcal{T}_E(K) = \{A \in \mathcal{L}(X,E) : Ax \leq 0, x \in K\}.$$

Пространство $\mathcal{L}(X \times Y, E)$ будем отождествлять с пространством $\mathcal{L}(X,E) \times \mathcal{L}(Y,E)$, сопоставляя каждому оператору $A \in \mathcal{L}(X \times Y, E)$ пару операторов $A_1 \in \mathcal{L}(X,E), A_2 \in \mathcal{L}(Y,E)$ таких, что $A(x,y) = A_1 x - A_2 y$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Если конусы $K_1, \ldots, K_n$ в псевдотопологическом векторном пространстве находятся в общем положении, то

$$\mathcal{T}_E(K_1 \cap \ldots \cap K_n) = \mathcal{T}_E(K_1) + \cdots + \mathcal{T}_E(K_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P_i = \delta_E(K_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\operatorname{epi} P_i = K_i \times E^+$, $i = 1, \ldots, n$, и в силу предложения 2.3 конусы $\operatorname{epi} P_1, \ldots, \operatorname{epi} P_n$ находятся в общем положении. Осталось применить теорему 3.5.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $P_1, \ldots, P_n : X \to E \cup \{+\infty\}$ – сублинейные операторы и конусы $\operatorname{epi} P_1, \ldots, \operatorname{epi} P_n$ находятся в общем положении. Тогда имеет место представление

$$\partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = I_E}} \{\partial(\alpha_1 \circ P_1) + \cdots + \partial(\alpha_n \circ P_n)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предыдущее следствие к системе конусов $\operatorname{epi} P_1, \ldots, \operatorname{epi} P_n$. Тогда, учитывая соотношение $\operatorname{epi}(P_1 \vee \cdots \vee P_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{epi} P_i$, получим

$$\mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_1) + \cdots + \mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_n).$$

Если $A \in \partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$, то $(A, I_E) \in \mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_1 \vee \ldots \vee P_n)$ и, стало быть, $(A, I_E) = (A_1, \alpha_1) + \cdots + (A_n, \alpha_n)$, где $(A_i, \alpha_i) \in \mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $A = A_1 + \cdots + A_n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = I_E$. Положительность оператора α_i вытекает из включения $\{0\} \times E^+ \subset \operatorname{epi} P_i$, а включения $(A_i, \alpha_i) \in \mathcal{T}_E(\operatorname{epi} P_i)$ и $A_i \in \partial(\alpha_i \circ P_i)$ эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть $P_1, P_2 : X \to E \cup \{+\infty\}$ – суболинейные операторы, $P_1(x)+P_2(x)\geq 0$ для любого $x\in X$ и надграфики $epi\,P_1$ и $epi\,P_2$ находятся в общем положении. Тогда найдется непрерывный линейный оператор $A:X\to E$ такой, что

$$-P_2(x)\leq Ax\leq P_1(x)$$

для всех $x\in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $0\in\partial(P_1+P_2)$ и в силу теоремы 3.5 $0=A_1+A_2$ для некоторых $A_1\in\partial P_1$ и $A_2\in\partial P_2$. Оператор $A=A_1=-A_2$ искомый.

Введем операцию "свертки" сублинейных операторов. Рассмотрим сублинейные операторы $P_1:X\times Y\to E\cup\{+\infty\}$ и $P_2:Y\times Z\to E\cup\{+\infty\}$ и определим их свертку $P_1\vartriangle P_2:X\times Z\to E\cup\{+\infty\}$ по формуле

$$P_1\vartriangle P_2(x,z)=\inf_{y\in Y}\{P_1(x,y)+P_2(y,z)\}.$$

При этом предполагается, что правая часть имеет смысл для $(x,z)\in dom\,P_1\circ dom\,P_2$.

Если $x=x_1+x_2,\ y=y_1+y_2$ и $z=z_1+z_2$, то

$$P_1\vartriangle P_2(x,z)\leq P_1(x_1,y_1)+P_2(y_1,z_1)+P_1(x_2,y_2)+P_2(y_2,z_2)$$

и, переходя к точной нижней границе сначала по $y_1\in Y$, а затем по $y_2\in Y$, убеждаемся в субаддитивности оператора $P_1\vartriangle P_2$. Положительная однородность проверяется так же просто. Таким образом, оператор $P_1\vartriangle P_2$ сублинеен. Обозначим

$$W=X\times Y\times Z\times E,$$

$$(epi\,P_1)_Z=\{(x,y,z,e)\in W: e\geq P_1(x,y)\},$$

$$(epi\,P_2)_X=\{(x,y,z,e)\in W: e\geq P_2(y,z)\}=X\times epi\,P_2.$$

ТЕОРЕМА 3.9. Если конусы $(epi\,P_1)_Z$ и $(epi\,P_2)_X$ находятся в общем положении, то имеет место представление

$$\partial(P_1\vartriangle P_2)=\partial P_1\circ\partial P_2.$$

Напомним, что согласно введенным обозначениям

$$\partial P_1\circ\partial P_2=\{(A,B)\in\mathcal{L}(X,E)\times\mathcal{L}(Z,E):\exists C\in\mathcal{L}(Y,E),$$

$$Ax-Cy\leq P_1(x,y),\ Cy-Bz\leq P_2(y,z),\ (x,y,z)\in X\times Y\times Z\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(A,B)\in\partial P_1\circ\partial P_2$, а оператор $C\in\mathcal{L}(Y;E)$ таков, что $(A,C)\in\partial P_1$ и $(C,B)\in\partial P_2$, то для любых $x \in X$, $y \in Y$ и $z \in Z$ имеем:

$$Ax - Bz = Ax - Cy + Cy - Bz \le P_1(x,y) + P_2(y,z).$$

Следовательно, $(A,B) \in \partial(P_1 \Delta P_2)$. Докажем обратное включение. Определим операторы $Q_1, Q_2 : X \times Y \times Z \to E \cup \{+\infty\}$ и $\Delta : X \times Y \times Z \to X \times Z$ соотношениями

$$\Delta(x,y,z) = (x,z),\ Q_1(x,y,z) = P_1(x,y),\ Q_2(x,y,z) = P_2(y,z).$$

Очевидно, что если $(A,B) \in \partial(P_1 \Delta P_2)$, то $(A,B)\circ\Delta \in \partial(Q_1 + Q_2)$. Далее, так как $epi\, Q_1 = (epi\, P_1)_Z$ и $epi\, Q_2 = (epi\, P_2)_X$, то применима теорема 3.5 и, стало быть, $(A,B)\circ\Delta \in \partial Q_1 + \partial Q_2$. Пусть $(A,B)\circ\Delta = T_1 + T_2$, где $T_i \in \partial Q_i$, $i=1,2$. Положим $(A_1,B_1) = T_1(\cdot,\cdot,0)$, $(A_2,B_2) = T_2(0,\cdot,\cdot)$. Тогда $(A_i,B_i) \in \partial P_i$, $i=1,2$, и для всех $(x,y,z) \in X\times Y\times Z$ будем иметь

$$Ax - Bz = A_1x - B_1(y) + A_2y - B_2z.$$

Отсюда следует, что $A = A_1$, $B_1 = A_2$ и $B = B_2$. Иными словами, $(A,B) \in \partial P_1 \circ \partial P_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Рассмотрим пару конусов $K_1 \subset X\times Y$ и $K_2 \subset Y \times Z$ и предположим, что конусы $K_1 \times Z$ и $X \times K_2$ находятся в общем положении. Тогда

$$\mathcal{X}_E(K_1 \circ K_2) = \mathcal{X}_E(K_1) \circ \mathcal{X}_E(K_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P_i = \delta_E(K_i)$, $i=1,2$, и заметим, что $P_1 \Delta P_2 = \delta_E(K_1 \circ K_2)$, $epi\, P_1 = K_1 \times Z$ и $epi\, P_2 = X \times K_2$. Остается сослаться на теорему 3.9.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть E_1 - упорядоченное псевдотопологическое векторное пространство, $P_1 : X \to E \cup \{+\infty\}$ - сублинейный оператор, $P_2 : E_1 \to E \cup \{+\infty\}$ - возрастающий сублинейный оператор. Если конусы $epi\, P_1 \times E$ и $X \times epi\, P_2$ находятся в общем положении, то справедливо представление

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \cup\{\partial(A \circ P_1) : A \in \partial P_2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K_i = epi\, P_i$, $i=1,2$. Тогда в силу монотонности оператора P_2 имеем $K_1 \circ K_2 = epi(P_2 \circ P_1)$ и согласно предыдущему следствию $\mathcal{X}_E(K_1 \circ K_2) = \mathcal{X}_E(epi\, P_1) \circ \mathcal{X}_E(epi\, P_2)$. Если $A \in \partial(P_2 \circ P_1)$, то $(A, I_E) \in \mathcal{X}_E(K_1 \circ K_2)$, и поэтому для некоторого $B \in \mathcal{L}(E_1, E)$ справедливы соотношения $(A,B) \in$

$\in \pi_E(\operatorname{epi} P_1)$, $(B, I_E) \in \pi_E(\operatorname{epi} P_2)$.

Первое из этих включений влечет $A \in \partial(B \circ P_1)$, а второе – $B \in \partial P_2$. Обратное включение очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Пусть $P: X \to E \cup \{+\infty\}$ – сублинейный оператор, $A: Y \to X$ – линейный непрерывный оператор, а конусы $Y \times \operatorname{epi} P$ и $\operatorname{gr} A \times E$ находятся в общем положении. Тогда

$$\partial(P \circ A) = \partial P \circ A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 3.10, если положить $K_1 = \operatorname{gr} A$ и $K_2 = \operatorname{epi} P$.

Пусть $P: X \times Y \to E \cup \{+\infty\}$ – сублинейный оператор, $K \subset Y \times X$ – выпуклый конус. Определим оператор

$$Q(x) = \inf\{P(x, y) : y \in K(x)\},$$

где $K(x) = \{y \in Y : (x, y) \in K\}$. Очевидно, что $Q = [P \triangle \delta_E(K)] \circ \Delta$, где Δ – диагональное отображение $x \to (x, x)$. Если $\partial P \circ \pi_E(K) \neq \varnothing$, то $\partial Q \neq \varnothing$, и нетрудно проверить, что $Q: X \to E \cup \{+\infty\}$ – сублинейный оператор. Вычислим опорное множество ∂Q.

ТЕОРЕМА 3.13. Предположим, что при всяком $x \in X$ множество $P(x, K(x))$ ограничено снизу, а конусы $\operatorname{epi} P$ и $K \times E$ находятся в общем положении. Тогда

$$\partial Q = \partial P \circ \pi_E(K) \circ \Delta.$$

Пусть многозначное отображение $K: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ является веером[ж)], т.е. удовлетворяет следующим условиям:

1) $K(x_1 + x_2) \subset K(x_1) + K(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$,
2) $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ при $\lambda > 0$, $0 \in K(0)$.

Рассмотрим сублинейный оператор $P: X \times Y \to E \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющий соотношению:

$$\sup P(0, K(0)) = 0.$$

Тогда оператор $Q: X \to E \cup \{+\infty\}$, определенный формулой

$$Qx = \sup\{P(x, y) : y \in K(x)\},$$

как нетрудно проверить, является сублинейным. Строение опорно-

---

ж) Это определение введено А.Д.Иоффе.

го множества оператора ∂Q в общем случае нам неизвестно. Рассмотрим простейший веер K вида $K: x \to \mathfrak{A}(x)=\{A_1 x, \dots, A_n x\}$, где $A_1, \dots, A_n$ – линейные непрерывные операторы из X в Y. Тогда $Q=P_1 \vee \dots \vee P_n$, где $P_i = P \circ (I_X, A_i)$, $i=1,\dots,n$.

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть надграфики $epi\, P_1, \dots, epi\, P_n$ находятся в общем положении и при $i=1,\dots,n$ конусы $epi\, P_i$ и $(gr A_i)\times E$ также находятся в общем положении. Тогда

$$\partial Q = \bigcup_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=I_E\\ \alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}} \{\partial(\alpha_1\circ P)\circ(I_X, A_1)+\dots+\partial(\alpha_n\circ P)\circ(I_X; A_n)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.5 следует, что

$$\partial Q = \bigcup_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=I_E\\ \alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}} \{\partial(\alpha_1\circ P\circ(I_X, A_1))+\dots+\partial(\alpha_n\circ P\circ(I_X, A_n))\}.$$

Нетрудно показать, что если конусы $epi\, P$ и $gr A_i \times E$ находятся в общем положении, то в общем положении находятся и конусы $epi\,(\alpha\circ P)$ и $gr A_i \times E$ для любого мультипликатора α. Но отсюда видно, что в общем положении находятся также конусы $X\times epi(\alpha\circ P)$ и $epi\,(I_X, A_i)$; осталось сослаться на следствие 3.12.

§4. Преобразование Юнга выпуклых операторов

Здесь результаты предыдущего параграфа применяются к вычислению преобразования Юнга суперпозиции выпуклых операторов. Преобразованием Юнга отображения $F: X \to E\cup\{+\infty\}$ называется оператор $F^*: \mathcal{L}(X,E)\to E\cup\{+\infty\}$, определенный равенством

$$F^*(A) = \sup_{x\in X}(Ax - Fx),\ A\in\mathcal{L}(X,E).$$

Аналогично определяется второе преобразование $F^{**}: X\to E\cup\{\infty\}$. Именно,

$$F^{**}(x) = \sup_{A\in\mathcal{L}(X,E)}(Ax - F^*(A)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любого отображения F справедливо $F^{**}\leq F$. Равенство $F=F^{**}$ выполняется тогда и только тогда, если F представим в виде точной верхней границы некоторого семейства аффинных операторов. Иными словами, $F=F^{**}$ тогда и только тогда, если существуют семейства $\{A_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}\subset\mathcal{L}(X,E)$ и $\{y_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}\subset E$ такие, что

$$F(x)=\sup_{\sigma\in\Sigma}(A_\sigma x+y_\sigma) \quad \text{для всех } x\in X.$$

Элементарное доказательство этого факта содержится в [I].

Отображение $F:X\to E\cup\{+\infty\}$ называется замкнутым, если $F=F^{**}$.

Инфимальной конволюцией отображений $F_1,\dots,F_n:X\to E\cup\{\infty\}$ называется оператор $\bigoplus_{i=1}^{n}F_i=F_1\oplus\dots\oplus F_n$, определенный равенством

$$\bigoplus_{i=1}^{n}F_i(x)=\inf\{F_1(x)+\dots+F_n(x):x_1+\dots+x_n=x\}.$$

Имеют место формулы

$$(F_1\oplus\dots\oplus F_n)^*=F_1^*+\dots+F_n^*,$$

$$(cl\,F_1+\dots+cl\,F_n)^*=cl(F_1^*\oplus\dots\oplus F_n^*),$$

где $cl\,F$ обозначает второе преобразование Юнга оператора F. Доказательство этих формул не отличается от доказательства соответствующих формул для скалярных функций и сводится к простым вычислениям. Однако чтобы убрать операцию cl во второй формуле, нужно воспользоваться понятием общего положения.

ТЕОРЕМА 4.2. Если $F_1,\dots,F_n:X\to E\cup\{+\infty\}$ – выпуклые операторы и надграфики $epi\,F_1,\dots,epi\,F_n$ находятся в общем положении, то

$$(F_1+\dots+F_n)^*=F_1^*\oplus\dots\oplus F_n^*.$$

При этом для любого $A\in dom(F_1+\dots+F_n)^*$ найдутся линейные операторы $A_1,\dots,A_n$ такие, что $A_1+\dots+A_n=A$,

$$(F_1+\dots+F_n)^*(A)=F_1^*(A_1)+\dots+F_n^*(A_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $F=F_1+\dots+F_n$ и для $A\in dom\,F^*$ положим $e=F^*(A)$. Тогда $A_{-e}\in H_F$. Заметим, что для преобразований Хермандера выполняется равенство

$$H_F=H_{F_1}+\dots+H_{F_n}.$$

Следовательно, по теореме 3.5 найдутся $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{L}(X,E)$ и $e_1,\dots,e_n\in E$ такие, что

$$A_{-e}=A_{1e_1}+\dots+A_{ne_n},$$

$$F^*(A_k)\leq -e_k,\quad k=1,\dots,n,$$

и, стало быть,
$$F^*(A)\geq F_1^*(A_1)+\cdots+F_n^*(A_n).$$
Обратное неравенство очевидно (см. [I]). Теорема доказана.

Свертка выпуклых операторов $F_1\Delta F_2$ определяется так же, как и для сублинейных операторов.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $F_1:X\times Y\to E\cup\{+\infty\}$ и $F_2:Y\times Z\to E\cup\{+\infty\}$ – выпуклые операторы, а выпуклые множества $(epi\,F_1)_Z$ и $(epi\,F_2)_X$ находятся в общем положении. Тогда
$$(F_1\Delta F_2)^*=F_1^*\Delta F_2^*.$$
Более того, для любых $(A,B)\in dom(F_1\Delta F_2)^*$ найдется линейный непрерывный оператор $C:Y\to E$ такой, что
$$(F_1\Delta F_2)^*(A,B)=F_1^*(A,C)+F_2^*(C,B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор Q_1 и $Q_2:X\times Y\times Z\to E\cup\{+\infty\}$ равенствами
$$Q_1(x,y,z)=F_1(x,y),\ Q_2(x,y,z)=F_2(y,z).$$
Тогда имеем
$$(F_1\Delta F_2)^*(A,B)=\sup_{x,z\in X\times Z}(Ax-Bz-\inf_{y\in Y}(F_1(x,y)+$$
$$+F_2(y,z)))=\sup_{(x,y,z)\in X\times Y\times Z}\{(A,B)\circ\mathcal{D}(x,y,z)-\mathcal{D}_1(x,y,z)-$$
$$-\mathcal{D}_2(x,y,z)\}=(Q_1+Q_2)^*((A,B)\circ\mathcal{D}).$$
Здесь $\mathcal{D}:X\times Y\times Z\to X\times Z,\ \mathcal{D}(x,y,z)=(x,z).$

В силу теоремы 3.5 найдутся такие операторы $A_1,A_2\in\mathcal{L}(X,E)$, $C_1,C_2\in\mathcal{L}(Y;E)$ и $B_1,B_2\in\mathcal{L}(Z;E)$, что
$$T_1=(A_1,C_1,B_1)\in dom\,Q_1^*,\ T_2=(A_2,C_2,B_2)\in dom\,Q_2^*,$$
$$T_1+T_2=(A,B)\circ\mathcal{D},\ Q_1^*(T_1)+Q_2^*(T_2)=(F_1\Delta F_2)^*(A,B).$$
Отсюда следует, что имеют место соотношения
$$B_1=0,\ A_2=0,\ A_1=A,\ B_2=-B,\ C_1=-C_2\overset{df}{=}C.$$
Таким образом,
$$(F_1\Delta F_2)^*(A,B)=Q_1^*(A,-C,0)+Q_2^*(0,+C,-B)=$$
$$=F_1^*(A,C)+F_2(C,B),$$
т.е.
$$(F_1\Delta F_2)^*(A,B)\geq F_1^*\Delta F_2^*(A,B).$$

Обратно, для любых $(A,B)\in\mathcal{L}(X\times Z;E)$ имеем

$$F_1^*\Delta F_2^*(A,B)=\inf_{C\in\mathcal{L}(Y,E)}\{\sup(Ax-Cy-F_1(x,y))+$$

$$+\sup_{(y,z)\in Y\times Z}(Cy-Bz-F_2(y,z))\}\geq\sup\{Ax-Bz-$$

$$-\inf_{y\in Y}(F_1(x,y)+F_2(y,z))\}=(F_1\Delta F_2)^*(A,B).$$

Теорема доказана полностью.

Для множества $F\subset X$ и оператора $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ обозначим $F^*(A)=\delta_A(F)^*(A)=\sup\{Ax:x\in F\}$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $F\subset X\times Y$ и $G\subset Y\times Z$ — выпуклые множества такие, что множества $F\times Z$ и $X\times G$ находятся в общем положении. Тогда

$$(F\circ G)^*=F^*\Delta G^*.$$

При этом для любых $(A,B)\in\mathcal{L}(X\times Z;E)$ найдется линейный непрерывный оператор $C:Y\to E$ такой, что

$$\sup(A,B)[F\circ G]=\sup(A,C)[F]+\sup(C,B)[G].$$

Доказательство вытекает из теоремы 4.3, если положить $F_1=\delta_E(F)$, $F_2=\delta_E(G)$ и учесть, что

$$(\mathrm{epi}\,F_1)_Z=F\times Z\times E^+,\ (\mathrm{epi}\,F_2)_X=X\times G\times E^+,\ F_1\Delta F_2=\delta_E(F\circ G).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $F:X\to E_1\cup\{+\infty\}$ — выпуклый оператор, $A\in\mathcal{L}(X,E)$ и $B\in\mathcal{L}(E_1,E)$. Тогда $(\mathrm{epi}\,F)^*(A,B)<+\infty$ в том и только в том случае, если оператор B положителен и $A\in\mathrm{dom}(B\circ F)^*$. Если $B_1\in\in\mathcal{L}^+(E_1,E)$, то

$$(\mathrm{epi}\,F)^*(A,B_1)=(B_1\circ F)^*(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z\in E_1^+$. Тогда для любых $(x,y)\in\mathrm{epi}\,F$ будем иметь

$$-Bz+Ax-By=Ax-B(y+z)\leq(\mathrm{epi}\,F)^*(A,B).$$

Переход к супремуму по $(x,y)\in\mathrm{epi}\,F$ показывает, что $-Bz\leq 0$. Если же в этом соотношении положить $z=y-Fx$ и перейти к супремуму по $x\in X$, то получим $(B\circ F)^*(A)\leq\leq(\mathrm{epi}\,F)^*(A,B)$.

Пусть теперь $B_1 \geq 0$ и $A \in dom(B_1 \circ F)^*$. Тогда

$$(epi\, F)^*(A,B) = \sup_{(x,y)\in epi F}(Ax - B_1 y) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in X}(Ax - B_1\circ Fx) = (B_1\circ F)^*(A) < +\infty.$$

Обратное неравенство очевидно.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $F: X \to E_1 \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, $G: E_1 \to E \cup \{+\infty\}$ - возрастающий выпуклый оператор и выпуклые множества $epi F \times E$ и $X \times epi\, G$ находятся в общем положении. Тогда для всякого $A \in \mathcal{L}(X,E)$ имеет место формула

$$(G\circ F)^*(A) = \inf\{(B\circ F)^*(A) + G^*(B) : B \in \mathcal{L}(E_1,E)\}.$$

При этом точная нижняя граница в правой части достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 4.4 к множествам $epi\, F$ и $epi\, G$ и воспользуемся предложением 4.5. Если $A \in \mathcal{L}(X,E)$, то найдется оператор $B \in \mathcal{L}(E_1,E)$ такой, что

$$(epi\, G\circ F)^*(A, I_E) = (epi\, F)^*(A,B) + (epi\, G)^*(B, I_E).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$(G\circ F)^*(A) \geq (B\circ F)^*(A) + G^*(B).$$

Обратное неравенство устанавливается простыми вычислениями (см. [I]).

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $F: X \to E \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, а A_x - непрерывный аффинный оператор, где $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $x \in X$. Если множества $gr A \times E$ и $Y \times epi\, F$ находятся в общем положении, то для любого $B \in \mathcal{L}(Y,E)$ имеет место формула

$$(F\circ A_x)^*(B) = \inf\{F^*(C) - Cx : B = C\circ A\}.$$

При этом точная нижняя граница в правой части достигается.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Если выпуклые множества $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении, то

$$(F_1 \cap \ldots \cap F_n)^* = F_1^* \oplus \ldots \oplus F_n^*,$$

причем точная нижняя граница в правой части достигается.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть E_1 является решеткой и $A\in\mathcal{L}^+(E_1,E)$. Если надграфики выпуклых операторов $F_1,\dots,F_n : X\to E\cup\{+\infty\}$ находятся в общем положении, то

$$(A\circ(F_1\vee\dots\vee F_n))^* = \inf\{\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}(A_i\circ F_i)^* : A_i\in\mathcal{L}^+(E_1,E), \sum A_i = A\}.$$

При этом точная нижняя граница в правой части достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B\in\mathcal{L}(X,E)$, то

$$(A\circ(F_1\vee\dots\vee F_n))^*(B) = (\operatorname{epi} F_1\vee\dots F_n)^*(B,A) =$$

$$=(\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{epi} F_i)^*(B,A) = (\operatorname{epi} F_1)^*\oplus\dots\oplus(\operatorname{epi} F_n)^*(B,A).$$

Следовательно, для некоторых $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{L}(X,E)$ и $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{L}(E_1,E)$ будем иметь

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i\ ,\qquad B=\sum_{i=1}^{n}B_n\ ,$$

$$(A\circ(F_1\vee\dots\vee F_n))^*(B)=\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{epi} F_i)^*(B_i,A_i).$$

Кроме того, в силу предложения 4.4 $A_1\geq 0,\dots,A_n\geq 0$. Поэтому

$$(A\circ(F_1\vee\dots\vee F_n))^*(B)=\sum_{i=1}^{n}(A_i\circ F_i)^*(B_i),$$

что и доказывает неравенство "$\geqslant$".

Обратное неравенство проверяется без труда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Пусть $F, G : X\to E\cup\{+\infty\}$ – выпуклые операторы, причем $F+G\geqslant 0$ и надграфики $\operatorname{epi} F$ и $\operatorname{epi} G$ находятся в общем положении. Тогда найдутся оператор $A\in\mathcal{L}(X,E)$ и элемент $e\in E$ такие, что

$$-Gx\leq Ax+e\leq Fx \qquad (x\in X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $(F+G)^*(0)\leq 0$, а по теореме 4.2 найдется $A\in\mathcal{L}(X,E)$ такой, что $F^*(A)+G^*(-A)\leq 0$. Если элемент $e\in E$ удовлетворяет неравенствам $F^*(A)\leq e\leq -G^*(-A)$, то аффинный оператор A_e разделяет F и G.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть выпуклые множества $F \subset X \times E$ и $G \subset X \times E$ удовлетворяют следующим условиям:

I) множества F и $G^- = \{(x,e) \in X \times E : -e \in G(x)\}$ находятся в общем положении;

2) если $e_1 \in G(x)$ и $e_2 \in F(x)$, то $e_2 \geq e_1$.

Тогда найдутся непрерывный оператор $A : X \to E$ и элемент $e_0 \in E$ такие, что

$$Ax_1 - e_1 \leq e_0 \leq Ax_2 - e_2$$

для всех $(x_1, e_1) \in G$ и $(x_2, e_2) \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 2) следует, что если $x \in \mathrm{dom}\, F \cap \cap\, \mathrm{dom}\, G$, то множество $F(x)$ ограничено снизу. Пусть $(x,e) \in \in F$ и укажем такие $\alpha, \beta \in R$, $(x_1, e_1) \in G$ и $(x_2, e_2) \in F$, чтобы

$$(x,e) = \alpha(x_1, e_1) - \beta(x_2, e_2),\ \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha - \beta = 1.$$

Если при этом $\alpha > 0$, то $((x + \beta x_2)\alpha^{-1}, (e + \beta e_2)\alpha^{-1}) \in F \cap G$ и $(x + \beta x_2)\alpha^{-1} \in \mathrm{dom}\, F \cap \mathrm{dom}\, G$. С другой стороны, $F[\frac{1}{2}(x + \beta x_2)] \supset \supset \frac{1}{\alpha} F(x) + \frac{\beta}{\alpha} F(x_2)$, поэтому $F(x)$ ограничено снизу. Аналогично доказывается, что $G^-(x)$ ограничено снизу для всех $x \in \mathrm{dom}\, G$. Таким образом корректно определены операторы $Q, Q_2 : X \to E \cup \{+\infty\}$ равенствами

$$Q_1(x) = \inf\{e \in E : (x,e) \in F\},\ Q_2(x) = \inf\{e \in E : (x,e) \in G\}.$$

Операторы Q_1 и Q_2 являются выпуклыми и, кроме того, в силу условия 2) $Q_1 + Q_2 \geq 0$. Надграфики $\mathrm{epi}\, Q_1$ и $\mathrm{epi}\, Q_2$ удовлетворяют включениям $\mathrm{epi}\, Q_1 \supset F$ и $\mathrm{epi}\, Q_2 \supset G$, поэтому в силу условия I) находятся в общем положении. Если аффинный оператор A_e найден в соответствии с теоремой 4.I0, то оператор $A \in \mathcal{L}(X,E)$ и элемент $e \in X$ искомые.

Вычислим преобразование Юнга лебегова множества выпуклого оператора. Предположим, что конус $\mathcal{L}^+(E_1, E)$ выделяет конус положительных элементов E_1^+, т.е. $e \in E_1^+$ в том и только в том случае, если $Ae \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{L}^+(E_1, E)$. Для выпуклого оператора $G : X \to E_1 \cup \{+\infty\}$ положим $(G \leq e) = \{x \in X : Gx \leq e\}$.

ТЕОРЕМА 4.I2. Если выпуклые множества $\mathrm{epi}\, G$ и $X \times E_1^-$ находятся в общем положении, то

$$(G \leq e)^* = \inf\{(B \circ G)^* + Be : B \in \mathcal{L}^+(E_1, E)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $A \in \mathcal{L}(X,E)$ имеем

$$(G \leq e)^*(A) = \sup_{G(x)\in e} \{Ax - \delta_E(E_1^-)x\} = [\delta_E(E_1^-)\circ(G-e)]^*(A).$$

По условию множества $epi\, F \times E$ и $X \times epi\, \delta_E(E_1^-)$ находятся в общем положении и в силу теоремы 4.6

$$(G \leq e)^*(A) = \inf\{(B\circ(G-e))^*(A) + \delta_E(E_1^-)^*(B):$$

$$B \in \mathcal{L}(E_1, E)\} = \inf\{(B\circ G)^*(A) + Be : B \in \mathcal{L}^+(E_1,E)\}.$$

§5. ε-субдифференциалы выпуклых операторов

Пусть $F: X \to E \cup \{+\infty\}$ – выпуклый оператор $\bar{x} \in dom F$ и $\varepsilon \in E^+$. ε-субдифференциалом оператора F в точке $\bar{x}$ называется множество

$$\partial_\varepsilon F(\bar{x}) = \{A \in \mathcal{L}(X,E): Ax - A\bar{x} \leq Fx - F\bar{x} + \varepsilon,\ x \in X\}.$$

Очевидно, что $A \in \partial_\varepsilon F(\bar{x})$ в том и только в том случае, если $F^*(A) + F(\bar{x}) \leq A\bar{x} + \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $F_1, \ldots, F_n: X \to E \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы, надграфики которых $epi\, F_1, \ldots, epi\, F_n$ находятся в общем положении. Тогда справедливо представление

$$\partial_\varepsilon (F_1 + \cdots + F_n)(\bar{x}) \subset \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \ldots, \varepsilon_n \geq 0 \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon}} \{\partial_{\varepsilon_1} F_1(\bar{x}) + \ldots + \partial_{\varepsilon_n} F_n(\bar{x})\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \in \partial_\varepsilon (F_1 + \cdots + F_n)(\bar{x})$, то

$$\varepsilon + A\bar{x} \geq (F_1 + \cdots + F_n)^*(A) + F_1(\bar{x}) + \cdots + F_n(\bar{x}).$$

В силу теоремы 4.2 найдутся $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(X,E)$ такие, что $A_1 + \cdots + A_n = A$ и $e_1 + \cdots + e_n \leq \varepsilon$, где

$$e_i = F_i^*(A_i) + F_i(\bar{x}) - A_i\bar{x}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку элементы $e_1, \ldots, e_n$ положительны, для некоторых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in E^+$ имеют место соотношения

$$\varepsilon_1 \geq e_1, \ldots, \varepsilon_n \geq e_n, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n.$$

Это означает, что $A_i \in \partial_{\varepsilon_i} F_i(\bar{x})$ при $i = 1, \ldots, n$, т.е. $A \in \partial_{\varepsilon_1} F_1(\bar{x}) + \cdots + \partial_{\varepsilon_n} F_n(\bar{x})$. Обратное включение очевидно.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $F_1: X \times Y \to E \cup \{+\infty\}$, $F_2: Y \times Z \to E \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы и для некоторых $(\bar{x}, \bar{y}) \in dom F_1$ и $(\bar{y}, \bar{z}) \in dom F_2$ выполняется равенство

$$(F_1 \Delta F_2)(\bar{x}, \bar{z}) = F_1(\bar{x}, \bar{y}) + F_2(\bar{y}, \bar{z}).$$

Если при этом множества $(epi\, F_1)_Z$ и $(epi\, F_2)_X$ находятся в общем положении, то

$$\partial_\varepsilon (F_1 \Delta F_2)(\bar{x}) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \partial_{\varepsilon_1} F_1(\bar{x}, \bar{y}) \circ \partial_{\varepsilon_2} F_2(\bar{y}, \bar{z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения можно провести аналогичными рассуждениями, опираясь на теорему 4.2. Однако мы его выведем из установленного правила ε-субдифференцирования суммы.

Если $(A, B) \in \partial_\varepsilon (F_1 \Delta F_2)(\bar{x}, \bar{z})$, то $(A, B) \circ \mathcal{D} \in \partial_\varepsilon (Q_1 + Q_2)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, поэтому для некоторых $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ будем иметь

$$(A, 0, -B) \in \partial_{\varepsilon_1} Q_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \partial_{\varepsilon_2} Q_2(\bar{x}, \bar{y}, z)$$

(Q_1 и Q_2 определяются так же, как и в теореме 4.3). Таким образом, найдется $(A_1, C_1, B_1) \in \partial_{\varepsilon_1} Q_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и $(A_2, C_2, B_2) \in \partial_{\varepsilon_2} Q_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, для которых

$$(A, 0, -B) = (A_1 + A_2, C_1 + C_2, B_1 + B_2).$$

Отсюда видно, что $A = A_1, A_2 = 0, B_2 = -B, B_1 = 0, C_2 = -C_1 \overset{df}{=} C$, а потому $(A, B) \in \partial_{\varepsilon_1} F_1(\bar{x}, \bar{y}) \circ \partial_{\varepsilon_2} F_2(\bar{y}, \bar{z})$. Обратное включение очевидно.

Для выпуклого множества $G \subset X$ положим $\partial_\varepsilon (G)(\bar{x}) = \partial_\varepsilon \delta_E(G)(\bar{x})$. Таким образом, $A \in \partial_\varepsilon (G)(\bar{x})$ в том и только в том случае, если $Ax \leq A\bar{x} + \varepsilon$ для всех $x \in G$. Очевидно, что если F – выпуклый оператор, то включения $A \in \partial_\varepsilon F(\bar{x})$ и $(A, I_E) \in \partial_\varepsilon (epi\, F)(\bar{x}, F(\bar{x}))$ эквивалентны. Это обстоятельство позволяет воспользоваться той же схемой, что и в предыдущих параграфах для вывода из теоремы 5.2 формул ε-субдифференцирования различных суперпозиций. Ограничимся формулировками соответствующих утверждений.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $F \subset X \times Y$ и $G \subset Y \times Z$ – выпуклые множества и $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap G^{-1}(\bar{z})$ при некоторых $\bar{x} \in X$ и $\bar{z} \in Z$. Если при этом выпуклые множества $F \times Z$ и $X \times G$ находятся в общем положении, то

$$\partial_\varepsilon (F \circ G)(\bar{x}, \bar{z}) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \partial_{\varepsilon_1}(F)(\bar{x}, \bar{y}) \circ \partial_{\varepsilon_2}(G)(\bar{y}, \bar{z}).$$

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $F: X \to E_1 \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, $G: E_1 \to E \cup \{+\infty\}$ - возрастающий выпуклый оператор, причем выпуклые множества $\operatorname{epi} F \times E$ и $X \times \operatorname{epi} G$ находятся в общем положении. Тогда

$$\partial_\varepsilon (G \circ F)(\bar{x}) = \bigcup_{\substack{A \in \partial_{\varepsilon_1} G(F(\bar{x})) \\ \varepsilon_1 \geq 0,\, \varepsilon_2 \geq 0,\, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \partial_{\varepsilon_2} (A \circ F)(\bar{x}).$$

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $F: X \to E \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, A_x - непрерывный аффинный оператор, где $A \in \mathcal{L}(Y; X)$ и $x \in X$. Если выпуклые множества $\operatorname{gr} A_x \times E$ и $Y \times \operatorname{epi} F$ находятся в общем положении, то

$$\partial_\varepsilon (F \circ A_x)(\bar{y}) = \partial_\varepsilon F(A_x \bar{y}) \circ A.$$

ТЕОРЕМА 5.6. Если выпуклые множества $F_1, \ldots, F_n \subset X$ находятся в общем положении, то

$$\partial_\varepsilon (F_1 \cap \ldots \cap F_n)(\bar{x}) = \bigcup_{\varepsilon_i \geq 0,\, \Sigma \varepsilon_i = \varepsilon} \{\partial_{\varepsilon_1} F_1(\bar{x}) + \cdots + \partial_{\varepsilon_n} F_n(\bar{x})\}.$$

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть E_1 - векторная решетка, $F_1, \ldots, F_n: X \to E_1 \cup \{+\infty\}$ - выпуклые операторы и $A \in \mathcal{L}^+(E_1, E)$. Если надграфики $\operatorname{epi} F_1, \ldots, \operatorname{epi} F_n$ находятся в общем положении, то имеет место представление

$$\partial_\varepsilon (A \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n))(\bar{x}) = \bigcup \{\partial_{\varepsilon_1} (A_1 \circ F_1)(\bar{x}) + \cdots + \partial_{\varepsilon_n} (A_n \circ F_n)(\bar{x})\},$$

где объединение берется по всем $A_1, \ldots, A_n$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ таким, что

$$A_i \geq 0,\ \varepsilon_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n;\ \varepsilon_{n+1} \geq 0;$$

$$A_1 + \cdots + A_n = A,\quad \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n+1} = \varepsilon;$$

$$A_1 \circ F_1(\bar{x}) + \cdots + A_n \circ F_n(\bar{x}) + \varepsilon_{n+1} \geq A \circ F_1 \vee \ldots \vee F_n(\bar{x}).$$

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $G: X \to E_1 \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, $e \in E_1$ и $G(\bar{x}) \leq e$. Если множества $\operatorname{epi} G$ и $-X \times E_1^+$ находятся в общем положении, то

$$\partial_\varepsilon (G\le 0)(\bar x) = \bigcup_{\substack{A\in \mathcal{L}^+(E_1,E)\\ 0\le \sigma\le A(G\bar x - e)+\varepsilon}} \partial_\sigma (A\circ G)(\bar x).$$

Пусть $F: X\times Y \to E\cup\{+\infty\}$ – выпуклый оператор и $(x_0,y_0)\in \operatorname{dom} F$. Положим $F_1(x) = F(x,y_0)$, $x\in X$. ε-субдифференциал выпуклого оператора F_1 в точке x_0 называется частным ε-субдифференциалом F в точке (x_0,y_0) и обозначается $\partial_{1\varepsilon} F(x_0,y_0)$.

ТЕОРЕМА 5.9. Если выпуклые множества $\operatorname{epi} F$ и $X\times\{y_0\}\times E$ находятся в общем положении, то

$$\partial_{1\varepsilon} F(x_0,y_0) = \{A\in \mathcal{L}(X,E) : \exists B\in \mathcal{L}(Y,E), (A,B)\in \partial_\varepsilon F(x_0,y_0)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}: X\to X\times Y$ – аффинный оператор, $\mathcal{B}_{y_0}: x \to (x,y_0)$. Нетрудно проверить, что $\operatorname{gr} \mathcal{B}\times E$ и $\operatorname{epi} F$ находятся в общем положении, поэтому

$$\partial_\varepsilon (F\circ \mathcal{B}_{y_0})(x_0) = \partial_\varepsilon F(\mathcal{B}_{y_0} x_0)\circ \mathcal{B}.$$

Осталось заметить, что $F_1 = F\circ \mathcal{B}_{y_0}$ и $\partial_\varepsilon F(\mathcal{B}_{y_0} x_0)\circ \mathcal{B}$ совпадает с правой частью доказываемой формулы.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. Если выпуклое множество $G\subset X\times Y$ находится в общем положении с множеством $X\times\{y_0\}$, то

$$\partial_\varepsilon (G(x_0))(y_0) \subset \{-A : \exists B\in \mathcal{L}(X,E) : (B,A)\in \partial_\varepsilon G(X_0,y_0)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Некоторые весьма частные случаи изложенных результатов имеются в работах [12,13].

§6. Теорема о характеристике

Пусть $X_0, X_1, \dots, X_n$ – псевдотопологические векторные пространства и $G_i \subset X_{i-1}\times X_i$ при $i=1,\dots,n$. Совокупность множеств $G_1,\dots,G_n$ задает некоторую динамическую систему отображения, а именно, положим

$$G_{ij} = G_{i+1}\circ\dots\circ G_j \quad \text{, если } j>i+1;$$
$$G_{i\,i+1} = G_{i+1} \quad \text{при } i=0,\dots,n-1.$$

Тогда при любых i,j,k, $i<j<k$ справедливо $G_{ik} = G_{ij}\circ G_{jk}$, а это и означает, что $(G_{ij})_{i<j\le n}$ – динамическое семейство

отображений (см. [14]). Упорядоченный набор $\mathscr{X}=(x_0,\dots,x_n)$ называется траекторией динамического семейства отображений, если $x_j\in G(x_i)$ для любых $i<j\le n$. При этом говорят, что траектория $\mathscr{X}$ соединяет точки x_0 и x_n. Очевидно, что если $x_0\in G_0^{-1}[X_1]$ и $x_n\in G_{0,n}(x_0)$, то существует траектория, соединяющая точки x_0 и x_n.

Рассмотрим следующую задачу (P). Пусть $F:X_n\to E\cup\{+\infty\}$ – выпуклый оператор и требуется найти такую траекторию $\bar{\mathscr{X}}=(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)$ динамического семейства отображений, что

$$F(\bar{x}_n)=\inf\{F(y):y\in G_{0,n}(\bar{x}_0)\}.$$

Точка $\bar{x}_0$ называется начальным условием, а траектории динамического семейства $(G_{ij})_{i\le j\le n}$ – траекториями задачи (P).

Рассмотрим траекторию $\mathscr{X}=(x_0,\dots,x_n)$ д.с.о. $(G_{ij})_{i<j\le n}$. Пусть $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ – положительные элементы из E. Система линейных непрерывных операторов $A=(A_0,\dots,A_n)$, $A_i\in\mathscr{L}(X_i;E)$, $i=0,\dots,n$, называется $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$-характеристикой траектории $\mathscr{X}$, если

$$A_i x-A_j y\le A_i x_i-A_j x_j+\varepsilon_{i+1}+\dots+\varepsilon_j$$

для всех $i<j\le n$ и $(x,y)\in G_{ij}$.

Траектория $\bar{\mathscr{X}}=(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)$ называется ε-оптимальной для задачи (P), если для любой траектории $\mathscr{X}=(x_0,\dots,x_n)$, исходящей из x_0 (т.е. $x_0=\bar{x}_0$), имеет место неравенство $F(\bar{x}_n)\le F(x_n)+\varepsilon$.

Иными словами, $\bar{\mathscr{X}}$ – это ε-оптимальная траектория, если точка $\bar{x}_n$ является ε-решением экстремальной задачи $y\in G_{0,n}(\bar{x}_0)$, $Fy\to\inf$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $M\subset X_n$ и выпуклые множества $\operatorname{epi}F$ и $M\times E$ находятся в общем положении. Точка $\bar{x}\in M$ является ε-решением задачи $y\in M$, $Fy\to\inf$ в том и только в том случае, если для некоторых $\varepsilon_1\ge 0$ и $\varepsilon_2\ge 0$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$ имеет место соотношение $-\partial_{\varepsilon_1}(M)(\bar{x})\cap\partial_{\varepsilon_2}F(\bar{x})\ne\emptyset$.

Доказательство очевидно (см. [2]).

ТЕОРЕМА 6.2. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) множества $\operatorname{epi}F$ и $G_{0n}(\bar{x}_0)\times E$ находятся в общем положении;

2) множества G_{0n} и $X_0\times\{\bar{x}_n\}$ находятся

в общем положении;

3) для всех $i=1,\dots,n$ множества $G_i \times X_n$ и $X_{i-1} \times G_{in}$ находятся в общем положении.

Тогда для того чтобы траектория $\bar{x}=(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)$ была ε-оптимальной для задачи (P), необходимо и достаточно, чтобы нашлась $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$-характеристика $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_0,\dots,\bar{\alpha}_n)$ траектории $\bar{x}$ такая, что $\bar{\alpha}_n \in \partial_{\varepsilon_0} F(\bar{x}_n)$ и $\varepsilon_0+\dots+\varepsilon_n=\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. По определению ε-характеристики и ε-субдифференциала имеем

$$\bar{\alpha}_0(x)-\bar{\alpha}_n(y)\le\bar{\alpha}_0(\bar{x}_0)-\bar{\alpha}_n(\bar{x}_n)+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n,\ (x,y)\in G_{0n},$$

$$\bar{\alpha}_n(x)-\bar{\alpha}_n(\bar{x}_n)\le Fx-F\bar{x}_n+\varepsilon_0.$$

Если в первом неравенстве положить $x=\bar{x}_0$, то для всех $y\in G_{0n}(\bar{x}_0)$ будем иметь $\bar{\alpha}_n(y)\ge\bar{\alpha}_n(\bar{x}_n)-\varepsilon_1-\dots-\varepsilon_n$, следовательно, второе неравенство перепишется в виде

$$-\varepsilon_1-\dots-\varepsilon_n\le Fx-F\bar{x}_n+\varepsilon-\varepsilon_1-\dots-\varepsilon_n,$$

что и означает ε-оптимальность траектории $\bar{x}$.

Необходимость. Точка $\bar{x}_n$ является ε-решением экстремальной задачи

$$x\in G_{0n}(\bar{x}_0),\ Fx\to\inf,$$

поэтому в силу условия I) для некоторого $0\le\varepsilon_0\le\varepsilon$ имеем

$$-\partial_{\varepsilon-\varepsilon_0}[G_{0n}(\bar{x}_0)](\bar{x}_n)\cap\partial_{\varepsilon_0}F(\bar{x}_n)=\emptyset.$$

Условие 2) позволяет применить следствие 5.I0, следовательно, найдутся операторы $\bar{\alpha}_0\in\mathcal{L}(X_0,E)$ и $\bar{\alpha}_n\in\mathcal{L}(X_n;E)$ такие, что $\bar{\alpha}_n\in\partial_{\varepsilon_0}F(\bar{x}_n),(\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_n)\in\partial_{\varepsilon-\varepsilon_0}(G_{0n})(\bar{x}_0,\bar{x}_n)$. Однако $G_{0n}=G_1\circ\dots\circ G_n$, а по условию 3) можно воспользоваться теоремой о субдифференциале суперпозиции множеств. Таким образом, существуют операторы $\bar{\alpha}_i\in\mathcal{L}(X_i,E),\ i=1,\dots,n-1$, такие, что $(\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_{i+1})\in\partial_{\varepsilon_{i+1}}(G_{i+1})(\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}),\ i=0,\dots,n-1$ и $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n=\varepsilon-\varepsilon_0$. Очевидно, что $(\bar{\alpha}_0,\dots,\bar{\alpha}_n)$ есть $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$-характеристика траектории $\bar{x}$.

ТЕОРЕМА 6.3. Предположим, что выполнены условия:

I) для всех $i=1,\dots,k$ множества $\operatorname{epi} F$ и $G_{0n}(\bar{x}_0^i)\times E$ находятся в общем положении;

2) для всех $i=1,\dots,k$ множества $G_{\mathcal{g}n}$ и $X_0 \times \{\bar{x}_n^i\}$ находятся в общем положении;

3) для всех $j=0,\dots,n$ множества $G_i \times X_n$ и $X_{i-1} \times G_{in}$ находятся в общем положении.

Пусть $\bar{\mathfrak{x}}^1=(\bar{x}_0^1,\dots,\bar{x}_n^1),\dots,\bar{\mathfrak{x}}^k=(\bar{x}_0^k,\dots,x_n^k)$ — траектории задачи (P). Множество $\{\bar{\mathfrak{x}}^1,\dots,\bar{\mathfrak{x}}^k\}$ является обобщенным $\mathcal{E}$-оптимумом задачи (P) в том и только в том случае, если найдутся положительные элементы $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_{n+k}$, операторы $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathcal{L}^+(E)$ и $(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n)$-характеристика $(\alpha_0^i,\dots,\alpha_n^i)$ траектории $\bar{\mathfrak{x}}^i$ при каждом $i=1,\dots,k$ такие, что выполнены условия

$$\mathcal{E}_1+\dots+\mathcal{E}_{n+k}=\mathcal{E};$$

$$\alpha_1+\dots+\alpha_n=I_E;$$

$$\alpha_1\circ F(\bar{x}_n^1)+\dots+\alpha_k\circ F(\bar{x}_n^k)=F(x_n^1)\wedge\dots\wedge F(x_n^k);$$

$$\alpha_n^i\in\partial_{\mathcal{E}_{n+i}}(\alpha_i\circ F)(\bar{x}_n^i),$$

$$i=1,\dots,k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для набора индексов $\{i_1,\dots,i_s\}\subset\{1,\dots,k\}$, $i_1<\dots<i_s$, обозначим символом $\Delta_{i_1,\dots,i_s}$ оператор перестановки, осуществляющий изоморфизм пространств $(X_{i_1}\times\dots\times X_{i_s})^k$ и $X_{i_1}^k\times\dots\times X_{i_s}^k$. Положим

$$\mathfrak{X}_i=X_i^k,\qquad i=0,1,\dots,n;$$

$$\mathcal{G}_i=\Delta_{i-1,i}[G_i^k],\qquad i=1,\dots,n;$$

$$\mathcal{Y}_i=(\bar{x}_i^1,\dots,\bar{x}_i^k),\qquad i=0,1,\dots,n;$$

$$(F)_k=F\times\dots\times F: X_n^k\to E;$$

$$\Phi=\alpha\circ(F)_k,$$

где $\alpha: E^n\to E$ — линейный оператор, входящий в субдифференциал канонического оператора $\mathcal{E}_{k,E}$ в точке $(F)_k(\mathcal{Y}_n)$. Если $(\mathcal{G}_{ij})_{i<j\le n}$ — д.с.о., порожденная семейством $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_n$, то нетрудно проверить, что $\mathcal{G}_{ij}=\Delta_{ij}[G_{ij}^n]$. Из этого равенства следует, что включение $\mathcal{Y}_j\in\mathcal{G}_{ij}(\mathcal{Y}_i)$ равносильно набору

включений $\bar{x}_j^s \in G_{ij}(\bar{x}_i^s)$, $s=1,\dots,k$. Таким образом, $\bar{\Psi}=(\bar{\varphi}_0,\dots$ $\dots,\bar{\varphi}_n)$ является траекторией д.с.о. $(\mathcal{G}_{ij})_{i<j\le n}$ в том и только в том случае, если $\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n$ являются траекториями д.с.о. $(G_{ij})_{i<j\le n}$. Кроме того, если $\{\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^k\}$ – обобщенное ε-решение для задачи (P), то для любого $\varphi=(x_1,\dots$ $\dots,x_k)\in G_{on}(\bar{x}_0^1)\times\dots\times G_{on}(\bar{x}_n^k)$ будем иметь

$$\Phi(\varphi)\ge \inf_{i=1,\dots,k} F(x_i)\ge \inf_{i=1,\dots,k} F(\bar{x}_n^i)-\varepsilon=\Phi(\bar{\varphi}_n)-\varepsilon.$$

Обратно, если $\Phi(\varphi)\ge\Phi(\bar{\varphi}_n)-\varepsilon$, $\varphi\in G_{on}(\bar{x}_0^1)\times\dots\times G_{on}(\bar{x}_0^k)$, то $(\bar{x}_n^1,\dots,\bar{x}_n^k)$ – обобщенное ε-решение задачи $x\in G_{on}(\bar{x}_0)$, $Fx\to\inf$. Однако $G_{on}(\bar{x}_0^1)\times\dots\times G_{on}(\bar{x}_0^k)=\mathcal{G}_{on}(\bar{\varphi}_0)$, поэтому набор траекторий $\{\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^k\}$ является обобщенным ε-решением задачи (P) в том и только в том случае, если $\bar{\Psi}=(\bar{\varphi}_0,\dots,\bar{\varphi}_n)$ оптимальна в следующей задаче (P′):

найти траекторию $(\bar{\varphi}_0,\dots,\bar{\varphi}_n)$ д.с.о. $(\mathcal{G}_{ij})_{i<j\le n}$ такую, что $\Phi(\bar{\varphi}_n)=\inf\{\Phi(\varphi):\varphi\in\mathcal{G}_{on}(\bar{\varphi}_0)\}$.

Покажем, что применима теорема 6.2. Имеют место соотношения:

$$\operatorname{epi}(F)_k=\Delta_{n,n+1}[(\operatorname{epi}F)^k] \text{ , где } X_{n+1}\overset{df}{=}E;$$
$$\mathcal{G}_{on}=\Delta_{on}[G_{on}^k];\ \mathcal{X}_0\times\{\bar{\varphi}_n\}=\Delta_{on}\prod_{i=1}^{k}X_0\times\{\bar{x}_n^i\};$$
$$\mathcal{G}_i\times\mathcal{X}_n=\Delta_{i-1,i,n}[(G_i\times X_n)^k];$$
$$\mathcal{X}_{i-1}\times\mathcal{G}_{in}=\Delta_{i-1,i,n}[(X_i\times G_{i,n})^k].$$

Отсюда и из условия теоремы, в силу предложения 2.4, вытекает, что выполнены предположения 1)–3) теорем 6.2. Следовательно, существует $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$-характеристика $A=(A_0,\dots,A_n)$ траектории $(\bar{\varphi}_0,\dots,\bar{\varphi}_n)$ такая, что $A_n\in\partial_{\varepsilon_0}\Phi(\bar{\varphi}_n)$, где $\varepsilon_0=$ $=\varepsilon-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$. Отсюда следует, что если $A_i=(\alpha_i^1,\dots,\alpha_i^k)$, $i=0,\dots,n$, то

$$\sum_{s=1}^{k}\alpha_i^s(x_s)-\sum_{s=1}^{k}\alpha_j^s(y_s)\le\sum_{s=1}^{k}\alpha_i^s(\bar{x}_i^s)-\sum_{s=1}^{k}\alpha_j^s(\bar{x}_j^s)+\varepsilon_{i+1}+\dots+\varepsilon_j$$

для всех $i<j\le n$ и $(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{G}_{ij}$, где $\varphi_1=(x_1,\dots,x_k)$ и $\varphi_2=(y_1,\dots,y_k)$.

Полагая, что $\varphi_1=(\bar{x}_i^1,\dots,\bar{x}_i^{l-1},x_l,\bar{x}_i^{l+1},\dots,\bar{x}_i^k)$ и $\varphi_2=$ $=(\bar{x}_j^1,\dots,\bar{x}_j^{l-1},y_l,\bar{x}_j^{l+1},\dots,x_j^k)$, получим, что

$$\alpha_i^l(x_l)-\alpha_j^l(y_l)\le\alpha_i^l(\bar{x}_i^l)-\alpha_j^l(x_j^l)+\varepsilon_{i+1}+\dots+\varepsilon_j$$

для всех $i<j\le n$ и $(x_l,y_l)\in G_{ij}$.

Таким образом, $(\alpha_0^l, \ldots, \alpha_n^l)$ есть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$-характеристика траектории $\bar{x}^l$ для всех $l = 1, \ldots, k$. Наконец, вычисляя субдифференциал $\partial_{\varepsilon_0} \Phi(\bar{y}_n)$, получим $\alpha_n^l \in \partial_{\varepsilon_{n+l}} (\alpha_l \circ F)(\bar{x}_n^l)$, $l = 1, \ldots, k$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} + \ldots + \varepsilon_{n+k}$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \alpha$.

Достаточность. Рассуждая относительно каждой из траекторий $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k$ так же, как и в доказательстве достаточности теоремы 6.2, получим

$$-(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) \le \alpha_i \circ F(x) - \alpha_i \circ F(\bar{x}_n^i) + \varepsilon_{n+i}, \; x \in G_{0n}(\bar{x}_n^i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Отсюда

$$F(\bar{x}_n^1) \wedge \ldots \wedge F(\bar{x}_n^k) \le \alpha_1 \circ F(\bar{x}_n^1) + \cdots + \alpha_n \circ F(\bar{x}_n^k) \le$$
$$\le \alpha_1 \circ F(x_1) + \cdots + \alpha_n \circ F(x_n) + \sum_{i=0}^{k+n} \varepsilon_n = \Phi(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пусть порядок в пространстве E_1 задается равностепенно непрерывным семейством функционалов $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(E_1, R) = E'$, т.е. элемент $e \in E_1$ положителен в том и только в том случае, если $(e, \alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{A}$ означает, что поляра множества $\mathfrak{A}$ относительно (вообще говоря, неотделимой) двойственности (E, E') принадлежит любому сходящемуся к нулю фильтру.

Пусть ε – положительное число. Траектория $\bar{x} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n)$ задачи (P) называется ε-оптимальной по Парето, если ни для какой траектории $x = (x_0, \ldots, x_n)$ д.с.о. $(G_{ij})_{i<j\le n}$, исходящей из точки $\bar{x}_0$, не могут одновременно выполняться неравенства $(Fx_n, \alpha) + \varepsilon \le (F\bar{x}_n, \alpha)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и строгое неравенство для некоторого $\beta \in \mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 6.4. *Пусть выпуклые множества* $G_{0n}(\bar{x}_0)$ *и* $\{(x, \lambda) \in X_N \times R : \lambda \ge \sup(Fx, \alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *находятся в общем положении, а также выполнены условия 2) и 3) теоремы 6.2. Если траектория* $\bar{x}$ ε*-оптимальна по Парето для задачи (P), то существуют непрерывный линейный функционал* $\bar{\alpha}$ *на* E_1 *и* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$*-характеристика* $(\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ *траектории* $\bar{x}$ *такие, что*

$$\bar{\alpha}_n \in \partial_{\varepsilon_0} (\bar{\alpha} \circ F)(\bar{x}_n);$$
$$\bar{\alpha} \ge 0, \; \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Обратно, пусть выписанные условия выполнены для некоторой траектории $\bar{x}$. Если при этом для некоторого элемента $e \in E$ выполнено $(e,\beta)=\varepsilon$ для всех $\beta \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_{\bar{\alpha}} \cap E^{+}=\{0\}$, то траектория $\bar{x}$ ε-оптимальна по Парето.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $\varphi = p \circ F$, где $p : E \to R$ – непрерывный сублинейный функционал, определенный равенством $p(e) = \sup\{(e,\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\} (e \in E)$. Для задачи с целевой функцией φ выполнены все условия теоремы 6.2, поэтому существует $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$-характеристика $(\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ траектории $\bar{x}$, удовлетворяющая условиям

$$\bar{\alpha}_n \in \partial_{\varepsilon_0} \varphi(\bar{x}_n), \quad \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_0} \varphi(\bar{x}_n)$, найдем требуемый функционал $\bar{\alpha}$.

Достаточность. Прежде всего напомним явный вид функционала $\bar{\alpha}$. Существует такая вероятностная конечно-аддитивная мера μ на $\mathfrak{A}$, что

$$(y,\bar{\alpha}) = \int_{\mathfrak{A}} (y,\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

для всех $y \in E$ (см. [1]). Таким образом, $(e,\bar{\alpha}) = \varepsilon$. Так же, как и при доказательстве достаточности теоремы 6.2, устанавливается неравенство $0 \le (Fx - F\bar{x}_n, \bar{\alpha}) + \varepsilon$ и, принимая во внимание предыдущее замечание, получим $(u,\bar{\alpha}) \ge 0$, где $u = Fx - F\bar{x}_n + e$. Если теперь $(Fx,\lambda) + \varepsilon \le (F\bar{x}_n, \lambda)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{A}$, то $(u,\lambda) \le 0$, а интегрирование последнего соотношения по мере μ дает $(u,\bar{\alpha}) \le 0$. Итак, $-u \in E^{+} \cap \mathfrak{A}_{\bar{\alpha}}$ и по условию $u = 0$, стало быть, не может иметь место строгое неравенство $(u,\lambda) < 0$ ни при каком $\lambda \in \mathfrak{A}$. Это и означает ε - оптимальность по Парето траектории $(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
2. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Выпуклое ε-программирование. - Докл. АН СССР, 1979, т.245, № 5, с.1045-1050.
3. КУСРАЕВ А.Г. О субдифференцировании негладких операторов. - Новосибирск, Б.И., 1979 - (Препринт/ ИМ СО АН СССР).

4. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Свертка Рокафеллара и характеристика оптимальных траекторий. - Докл. АН СССР, 1980, т.251, № 2, с.280-283.
5. ФРЕЛИХЕР А., БУХЕР В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без норм. - М.: Мир, 1970.
6. WONG Ch., NG K-F. Partially ordered topological vector spaces. - Oxford, Clarendon Press, 1973.
7. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. - Калинин, изд. Калининск. гос. ун-та, 1977.
8. КУСРАЕВ А.Г. Субдифференцирование негладких операторов и необходимые условия экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями. - Оптимизация, 1980, вып. 24 (41), с.75-117.
9. АХОРКИН В.И., БАХТИН М.А. О непрерывности положительных аддитивных операторов в вещественных локально- выпуклых пространствах. - Функциональный анализ, 1974, вып. 2. Изд. Ульяновск. гос. пед. ин-та, с.79-86.
10. РУБИНОВ А.М. Сублинейные операторы и их применение. - Успехи мат. наук, 1977, т.32, № 34, с.113-171.
11. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.
12. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные. - Кибернетика, 1972, № 3, с.94-102.
13. THERA M. $\mathcal{E}$-subdifferential calculus for convex operators. - C.r. Acad. sci. Paris, 1980, v.290, ser. A-B, p. 549-552.
14. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
18.06.1980 г.