Выпуск 24 (41) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.

Численные методы

УДК 512.25

ПРОЦЕДУРА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ ОБОБЩЕННОЙ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

А.И.Жолудев

При решении задач линейного программирования с помощью мультипликативного алгоритма метода последовательного улучшения плана важную роль играет процедура обновления мультипликативного представления обратной матрицы. При этом желательно заполнение мультипликаторов. Это связано с задачей экономии памяти ЭВМ, уменьшением времени решения задачи, сокращением объема вычислений и повышением устойчивости счета.

Существуют методы, позволяющие минимизировать локальное заполнение в процессе мультипликативного обращения (см. [1]), однако эти методы не полностью учитывают структуру матрицы. Другим подходом к этой проблеме является учет структуры матрицы условий решаемой задачи линейного программирования, т.е. выработка стратегии перебора столбцов в зависимости от ее специфики. Такой подход использован, например, в [2].

В настоящей работе излагаются алгоритмы обращения матриц с разветвленной блочной структурой [3]. Такие матрицы часто встречаются на практике, что оправдывает специальное их рассмотрение. В первом параграфе дано описание класса рассматриваемых структур, несколько отличное по форме от данного в [2], но полностью ему эквивалентное. Второй параграф посвящен изложению алгоритма, рассчитанного на один уровень блочности, а расширение алгоритма на случай многоуровневой блочности дано в третьем параграфе. Наконец, четвертый параграф содержит результаты численных испытаний.

§ I. Матрицы с обобщенным блочным строением

Будем говорить, что матрица $A[M,N]$ имеет блочное строение, если перестановкой строк и столбцов ее можно привести к виду:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
A[M_0,N_0] & \multicolumn{4}{c|}{A[M_0, N\setminus N_0]} \\
\hline
 & A[M_1,N_1] & 0 & \dots & 0 \\
A[M\setminus M_0, N_0] & 0 & A[M_2,N_2] & \dots & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & A[M_p,N_p] \\
\hline
\end{array} \qquad (I)$$

т.е. если можно выделить множества индексов $M_0, M_1, \dots, M_p$ и $N_0, N_1, \dots, N_p$ такие, что

I) $\bigcup\limits_{i=0}^{p} N_i = N$; $\bigcup\limits_{i=0}^{p} M_i = M$;

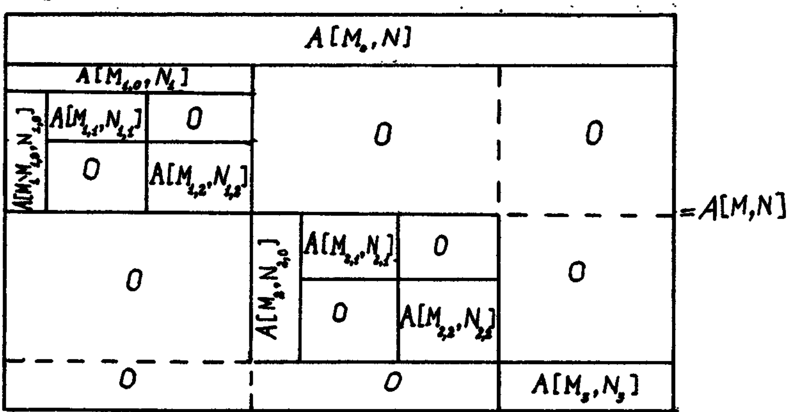
2) $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $N_i \cap N_j = \emptyset$ при $i \neq j$; $i,j = 0,1,\dots,p$;

3) все ненулевые элементы матрицы $A[M,N]$ сосредоточены в подматрицах $A[M_0,N], A[M,N_0], A[M_1,N_1], A[M_2,N_2], \dots$ $\dots, A[M_p,N_p]$.

При этом любое из множеств M_0 и N_0 может быть пустым и $p > 1$. Подматрицы $A[M_1,N_1], \dots, A[M_p,N_p]$ будем называть блоками, подчиненными $A[M,N]$.

Любая из подматриц $A[M_k,N_k]$, $k = 1,\dots,p$, может, в свою очередь, иметь блочное строение, и, вообще говоря, глубина такого вложения блоков может быть любой конечной. Если подматрица $A[M_k,N_k]$ имеет блочное строение, то будем называть ее промежуточным блоком, в противном случае – окончательным блоком.

Иерархию блоков можно представить в виде ориентированного дерева, если каждому блоку (промежуточному или окончательному) сопоставить вершину и соединить ее направленным ребром с вершиной, соответствующей минимальному объемлющему блоку. Корень дерева будет соответствовать всей матрице $A[M,N]$ (ее можно назвать начальным блоком), а концевые вершины – тем блокам, структура которых не выделяется, т.е. окончательным. Например, матрице вида



будет соответствовать граф

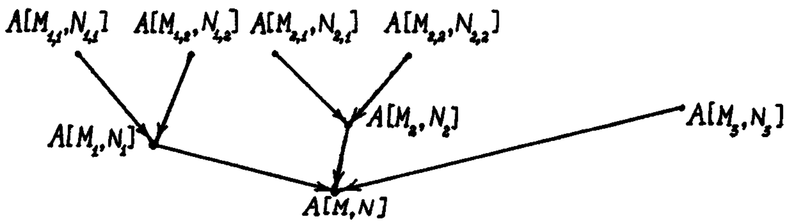


Рис. I

Перенумеруем теперь вершины графа согласно следующему правилу. Пусть общее число вершин равно n , произвольной концевой вершине присваиваем номер $n-1$. Далее действуем в соответствии со следующим принципом. Пусть некоторая вершина получила номер k . Обозначим вершину, которой она подчинена, через α . Номер $k-1$ присваиваем любой вершине (еще не занумерованной), путь из которой в корень проходит через α и которая либо является концевой, либо имеет все подчиненные ей вершины уже занумерованными. Если вершина α больше не имеет незанумерованных подчиненных, то она сама получает номер $k-1$.

Нумерация вершин, проведенная согласно такому правилу, будет обладать следующими свойствами.

I. Корень дерева будет иметь номер 0.

2. Если путь из некоторой вершины β в корень проходит через вершину α , то β будет иметь номер больший, чем α .

3. Для каждой неконцевой вершины α найдется подчиненная ей вершина, имеющая номер на единицу больший, чем α.

Например, граф, изображенный на рис. I, можно занумеровать так:

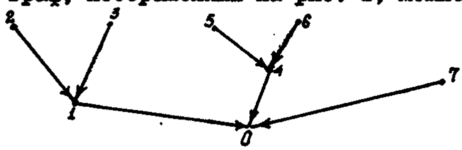


Рис. 2

Теперь множества индексов строк и столбцов соответствующих блоков обозначим согласно нумерации вершин графа. Тогда для матрицы структуры (2) будем иметь:

$$M^0=M;\ N^0=N;\ M^1=M_1;\ N^1=N_1;$$

$$M^2=M_{1,1},\ N^2=N_{1,1};\ M^3=M_{1,2},\ N^3=N_{1,2};\ M^4=M_2,\ N^4=N_2;$$

$$M^5=M_{2,1},\ N^5=N_{2,1};\ M^6=M_{2,2},\ N^6=N_{2,2};\ M^7=M_3,\ N^7=N_3.$$

§ 2. Мультипликативное обращение матриц блочной структуры

2.I. Предварительные замечания. Пусть имеется квадратная неособенная матрица A порядка m и требуется найти матрицу $\bar{A}^{-1}$, где $\bar{A}$ – некоторая, не важно какая, перестановка столбцов матрицы A. Матрицу $\bar{A}^{-1}$ можно представить в виде произведения m элементарных матриц $\mathcal{M}_i$, $i=1,2,\dots,m$, называемых мультипликаторами и отличных от единичной матрицы не более чем одним столбцом:

$$\mathcal{M}_i=\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & \mu_1^i & & & \\ & 1 & & \mu_2^i & & & \\ & & \ddots 1 & \vdots & & 0 & \\ & & & \mu_{r_i}^i & & & \\ & 0 & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \mu_m^i & 0 & & 1 \end{array}\right|$$

и $\bar{A}^{-1}=\mathcal{M}_m\cdot\mathcal{M}_{m-1}\cdot\ldots\cdot\mathcal{M}_1$. В таком представлении каждая элементарная матрица $\mathcal{M}_i$ соответствует ровно одному столбцу a^k исходной матрицы A и ровно одной строке с номером r_i, причем неединичный столбец μ^i матрицы $\mathcal{M}_i$ вычисляется согласно формулам:

$$\mu^i_j = -\frac{w_j}{w_{z_i}} \qquad \text{при} \qquad j \neq z_i ,$$

$$\mu^i_{z_i} = \frac{1}{w_{z_i}} ,$$

где w_j – компоненты m-мерного вектора

$$w = \mathcal{M}_{i-1} \cdot \mathcal{M}_{i-2} \cdot \ldots \cdot \mathcal{M}_1 \cdot a^k .$$

Столбец a^k называется ведущим столбцом на i-м шаге мультипликативного обращения, а строка с номером z_i – ведущей строкой. На выбор ведущей строки накладываются следующие два ограничения:

I) элемент w_{z_i} не должен быть очень мал по абсолютной величине;

2) номер z_i выбирается только среди тех индексов из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, которые не выбирались в качестве номеров ведущих строк на предыдущих шагах процесса мультипликативного обращения.

В результате такого процесса будет получена цепочка мультипликаторов, называемая мультипликативным представлением матрицы $\bar{A}^{-1}$. При этом матрица $\bar{A}$ из матрицы A получается перестановкой $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ ее столбцов.

Если теперь некоторый вектор-столбец g требуется умножить слева на $\bar{A}^{-1}$, то его достаточно умножить последовательно на цепочку мультипликаторов. При этом вектор $\bar{f} = \mathcal{M}_i f$ можно вычислить по формулам:

$$\bar{f}_j = f_j + \mu^i_j \cdot f_{z_i} \qquad \text{при} \qquad j \neq z_i ,$$

$$\bar{f}_{z_i} = \mu^i_{z_i} \cdot f_{z_i} .$$

Отсюда непосредственно следует, что если $\mu^i_k = 0$, то $\bar{f}_k = f_k$, а если $f_{z_i} = 0$, то $\bar{f} = f$. Это мы используем в приводимом ниже алгоритме мультипликативного обращения матриц блочной структуры.

2.2. Алгоритм обращения блочных матриц. Пусть имеется невырожденная квадратная матрица, имеющая структуру типа (I). Ей соответствует граф вида

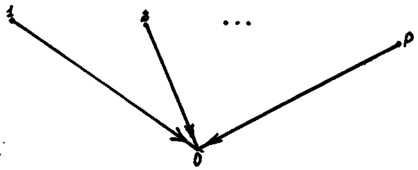


Рис. 3

Требуется получить мультипликативное представление матрицы, обратной к $A[M,\bar{N}]$, так, чтобы неединичные столбцы мультипликаторов имели в совокупности возможно меньшее число нетривиальных элементов. (Здесь $\bar{N}$ обозначает некоторую перестановку множества индексов N.)

Приводимый ниже алгоритм обращения состоит из двух этапов. На первом этапе мультипликаторы строятся из столбцов, имеющих номера, принадлежащие множествам индексов $N^1, N^2, \ldots, N^p$, а номера ведущих строк выбираются только в множествах $M^1, M^2, \ldots, M^p$ соответственно. На втором этапе рассматриваются все оставшиеся столбцы и ведущие строки выбираются во всем множестве M.

Структуру подматриц $A[M^k, N^k]$ мы пока не учитываем.

ЭТАП I. Процесс построения мультипликаторов проводим последовательно по блокам $A[M^1,N^1], \ldots, A[M^p,N^p]$. Положив $k=1$, рассмотрим столбцы $A[M,N^k]$. Так как они имеют ненулевые элементы только в строках с номерами из множеств M^0 и M^k, то при любом порядке построения мультипликаторов из столбцов $A[M,N^k]$ с выбором ведущих строк только в множестве M^k неединичные столбцы мультипликаторов сохраняют нули в строках с номерами из $\bigcup\limits_{i\notin\{0,k\}} M^i$, т.е. новые ненулевые элементы могут возникнуть только в строках из $M^0 \cup M^k$.

Кроме того, при умножении столбцов $A[M, \bigcup\limits_{i\neq k} N^i]$ на цепочку мультипликаторов, соответствующих k-му блоку, эти столбцы вообще не будут преобразовываться. Таким образом, группы мультипликаторов, построенные из столбцов остальных блоков, не будут зависеть от группы k-го блока.

Работа с k-м блоком заканчивается в любом из следующих трех случаев:

а) исчерпаны все столбцы $A[M,N^k]$;

б) исчерпано все множество индексов строк M^k;

в) в оставшихся столбцах k-го блока (умноженных на текущую цепочку мультипликаторов) все элементы, которые лежат в строках множества M^k и еще не выбирались в качестве ведущих, малы по абсолютной величине.

В любом из этих трех случаев полагаем $k = k+1$ и проделываем с новым блоком те же операции.

Заметим, что случай в) достаточно редкий. Он может реализоваться тогда, когда подматрица $A[M^k, N^k]$ плохо обусловлена. Тем более маловероятно, чтобы количество мультипликаторов, построенных из столбцов k-го блока, было намного меньше величины $min\{|M^k|, |N^k|\}$, поэтому мы не будем на втором этапе алгоритма особо выделять столбцы, оставшиеся в некоторых блоках ввиду реализации случая в).

ЭТАП 2. Обозначим число оставшихся после первого этапа столбцов в каждой подматрице $A[M,N^k]$ через n_k и упорядочим блоки по убыванию величин $\frac{n_k}{|M^k|}$. Если $\tilde{N}^k$ - множество номеров столбцов $A[M,N^k]$, оставшихся после первого этапа, то получим последовательность столбцов:

$$A[M,\tilde{N}^{i_1}], A[M,\tilde{N}^{i_2}], \ldots, A[M,\tilde{N}^{i_p}], A[M,N^0]. \qquad (3)$$

Теперь эти столбцы в порядке (3) преобразуем в мультипликаторы, выбирая номера ведущих строк во всем множестве M. (Фактически, если на первом этапе ни разу не реализовался случай в), то для всех столбцов, кроме $A[M,N^0]$, ведущие строки будут выбираться только в множестве M^0.)

Поскольку матрица $A[M,N]$ неособенная, то каждый ее столбец будет преобразован в мультипликатор и все позиции множества M будут исчерпаны.

Отметим, что после проведения первого этапа алгоритма будет получено p независимых групп мультипликаторов. Каждую такую группу можно соотнести соответствующей вершине графа, изображенного на рис.3, и присвоить ей соответствующий номер $k \in \{1,2,\ldots,p\}$. Группу же мультипликаторов, полученную на втором этапе, соотнесем вершине 0 и присвоим ей номер 0.

Теперь если требуется некоторый вектор $g[M]$, имеющий ту же структуру, что и столбцы k-го блока матрицы $A[M,N]$, умножить на $A[M,\bar{N}]^{-1}$, то его достаточно умножить на k-ю, а затем на 0-ю группу мультипликаторов. Если же вектор $g[M]$ не отвечает структуре ни одного из блоков, то его нужно последовательно умножить на все группы $1,2,\ldots,p,0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Матрица $A[M,N]$ может иметь столбцы, ненулевые элементы которых лежат только в строках с номерами из множества M^0, т.е. иметь структуру

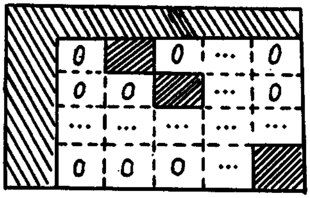


Рис. 4

Такие столбцы (назовем их 0-столбцами) на первом этапе алгоритма рассматривать не нужно, а на втором этапе их следует поместить в начало цепочки (3). Это позволит при построении мультипликаторов сохранить нули в строках с номерами из множества $\bigcup_{i=1}^{p} M^i$, причем полученная из 0-столбцов цепочка мультипликаторов не будет зависеть от групп $1,2,\dots,p$.

Если матрица $A[M,N]$ имеет строки, все нетривиальные элементы которых сосредоточены в столбцах с номерами из множества N^0 (будем называть их 0-строками), то в целях уменьшения объема вычислений можно сразу после первого этапа алгоритма из некоторых столбцов $A[M,N^0]$ сделать мультипликаторы, выбирая в качестве ведущих 0-строки.

§ 3. Обобщение алгоритма и некоторые замечания

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Алгоритм из § 2 можно применять и для вырожденных или неквадратных матриц (не ожидая, конечно, получения обратной матрицы). При это только нужно учесть, что на втором этапе некоторые столбцы могут выпасть из цепочки (3), а работу с матрицей $A[M,N]$ следует заканчивать в любом из следующих трех случаев:

а) исчерпаны все столбцы матрицы $A[M,N]$;

б) исчерпаны все позиции множества M ;

в) все оставшиеся столбцы, будучи умноженными на текущую цепочку мультипликаторов, имеют в свободных позициях множества M малые по абсолютной величине элементы.

Отметим теперь, что если в матрице $A[M,N]$ блоки с номерами $1,2,\dots,p$ сами имеют блочную структуру типа (I), то применение алгоритма обращения поочередно ко всем блокам

$A[M^k, N^k]$, с учетом замечания 2, будет соответствовать выполнению первого этапа алгоритма для всей матрицы $A[M,N]$.

Теперь можно обобщить алгоритм обращения на блочные матрицы общего вида. Итак, пусть имеется квадратная неособенная матрица $A[M,N]$ с многоступенчатым блочным строением, структура которой задана некоторым деревом. Обобщенный алгоритм состоит из следующих шагов.

0. Выберем на дереве вершину с наибольшим номером t и положим $k=t$.

I. Если вершина с номером k концевая, т.е. если блок $A[M^k, N^k]$ окончательный, строим из столбцов $A[M,N^k]$ цепочку мультипликаторов, выбирая номера ведущих строк в множестве M^k. (При этом можно применять методы минимизации локального заполнения [2] в блоке $A[M^k, N^k]$.) Работу со столбцами $A[M,N^k]$ заканчиваем в любом из случаев а)–в) из первого этапа алгоритма § 2 и сопоставляем полученную группу мультипликаторов вершине с номером k . Переходим в 3.

Если же вершина k не является концевой, переходим в 2.

2. Блок $A[M^k, N^k]$ промежуточный, но первый этап алгоритма § 2 для него уже выполнен, так как все подчиненные ему блоки соответствуют вершинам с номерами, большими k . Проводим для столбцов $A[M,N^k]$ второй этап алгоритма с учетом замечания 2. Полученную группу мультипликаторов сопоставляем вершине k .

3. Если $k>0$, то полагаем $k=k-1$ и переходим в I; если же $k=0$, то получено мультипликативное представление матрицы $A[M,\bar{N}]^{-1}$. Процесс заканчивается.

Поскольку матрица $A[M,N]$ неособенная, то в результате такого алгоритма каждый ее столбец будет преобразован в мультипликатор и все позиции множества M окажутся исчерпанными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть некоторый вектор $g[M]$ имеет ту же структуру, что и столбцы S-го блока $A[M,N^s]$, но не повторяет структуры ни одного из подчиненных ему блоков, и пусть требуется найти вектор f , равный $A[M,\bar{N}]^{-1}\cdot g[M]$.

Чтобы получить вектор f , достаточно выделить на графе, задающем структуру матрицы $A[M,N]$, те вершины, путь из которых в корень проходит через S и вершины, лежащие на пути из S в корень, а затем умножить вектор $g[M]$ последовательно на группы мультипликаторов, соответствующие выделенным вершикам в порядке убывания их номеров.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в матрице $A[M,N]$ требуется заменить некоторый столбец $A[M,\tau]$ на $g[M]$, причем новая матрица оказывается неособенной, то в мультипликативное представление матрицы $A[M,\tilde{N}]^{-1}$ добавится еще один мультипликатор. Его следует приписать слева к группе с номером 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть матрица условий задачи линейного программирования имеет блочное строение, которое отражает некоторое дерево. Тогда это же дерево будет соответствовать и базисной матрице $A[M,N]$ на любом шаге метода последовательного улучшения плана с той лишь оговоркой, что блоки, соответствующие некоторым вершинам, могут оказаться пустыми. В этом случае и соответствующие группы мультипликаторов, полученных при обновлении матрицы $A[M,\tilde{N}]$, будут пусты.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При решении задач линейного программирования при помощи мультипликативного алгоритма процедура обновления может применяться несколько раз. При этом если в промежутке между двумя обновлениями столбцы, соответствующие некоторому блоку матрицы условий задачи, не принимали участия в изменениях базиса, то группу мультипликаторов, сопоставленную соответствующей вершине дерева, обновлять не нужно.

§ 4. Вычислительные эксперименты

Описанный алгоритм обращения блочных матриц был реализован на языке АЛГОЛ-60 (АЛГОЛ-БЭСМ) и с его помощью на ЭВМ БЭСМ-6 проводился ряд вычислительных экспериментов.

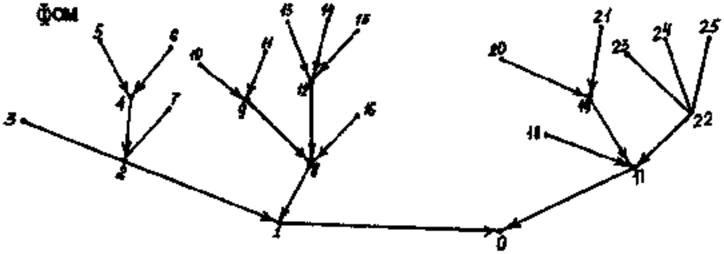
Вычислительная процедура метода предусматривает хранение мультипликаторов на магнитном барабане (МБ) в компактном виде, причем в каждой зоне МБ хранится целое число мультипликаторов. Новые мультипликаторы последовательно записываются в буферный массив, имеющий длину 1024 слова, который после заполнения переписывается в очередную зону МБ. Такой способ хранения позволяет производить обмен информацией между МБ и оперативной памятью ЭВМ полными зонами, т.е. файлами длиной 1024 слова.

Исходная матрица во всех просчитанных примерах хранилась в компактном виде в оперативной памяти ЭВМ.

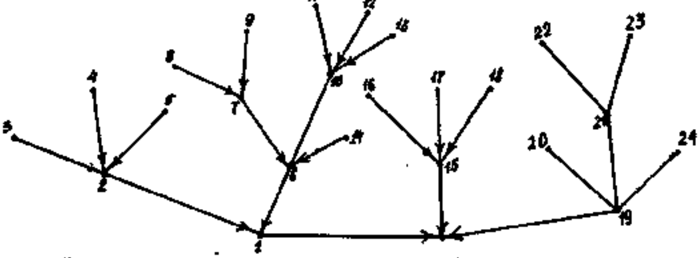
Ниже приводятся результаты вычислений для следующих задач.

Задача I: размеры исходной матрицы – 50x50; количество нетривиальных элементов - 37I (I2,68%); общее число блоков - I6; структура матрицы описывается с помощью графа

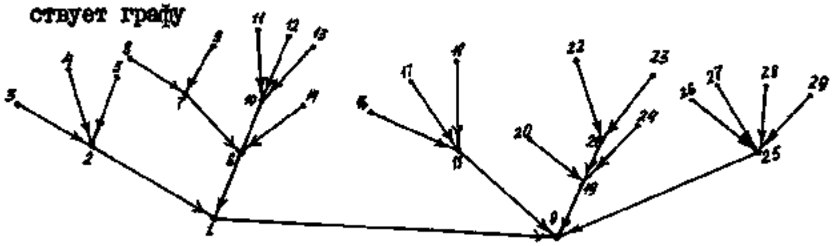
Задача 2: размеры матрицы - 66х66; количество элементов - 439 (I0,08%); число блоков - 26; структура матрицы задана графом



Задача 3: размеры матрицы - 84х84; количество элементов - 494 (7%); общее число блоков - 25; структуре матрицы соответствует граф



Задача 4: размеры матрицы - II3хII3; количество элементов - 6I3 (4,8%); общее число блоков - 30; структура матрицы соответствует графу



Результаты экспериментов приведены в следующей таблице:

Номер задачи	Кол-во элементов обратной матрицы	Кол-во новых элементов	% роста	Число зон МБ	Время обращения	Невязка
I	627	256	I0,24	I	I,52сек	$2{,}6\cdot 10^{-9}$
2	759	320	7,35	I	2,58сек	$2{,}3\cdot 10^{-9}$
3	874	380	5,39	I	2,94сек	$1{,}1\cdot 10^{-9}$
4	I079	466	3,65	2	4 сек	$1{,}3\cdot 10^{-9}$

Для сравнения эти же примеры просчитывались с помощью стандартной процедуры мультипликативного обращения, которая осуществляет выбор ведущих строк без учета структуры матрицы. Результаты счета содержатся в аналогичной таблице:

I	2	3	4	5	6	7
I	I653	I282	5I,28	2	6,7 сек	$2{,}4\cdot 10^{-9}$
2	2545	2I06	48,35	3	I0,36 сек	$8{,}1\cdot 10^{-9}$
3	3605	3III	44,09	5	22,66 сек	$9{,}0\cdot 10^{-9}$
4	603I	54I8	42,43	I0	43,9 сек	$4{,}1\cdot 10^{-9}$

ЛИТЕРАТУРА

I. ТЬЮАРСОН Р. Разреженные матрицы.-М.: Мир, I977.

2. МАЛКОВ У.Х., АХМЕТОВ П.А. Использование специфики условий задачи в мультипликативном алгоритме. - Экономика и мат. методы, I972, т.8, вып.I, с.I0I-I06,

3. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования.-М.: Наука, I977.

Поступила в ред.-изд. отдел
I5.09.I979 г.