Выпуск 24 (41) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Численные методы

УДК 519.61:517.988.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Б.А.Вертгейм

В статье дано применение указанного метода, основанного на комбинаторной топологии и имеющего истоки в задачах теории игр и поиска неподвижных точек, для вычисления корней многочленов - как вещественных, так и комплексных. Метод удобен и для решения двумерных систем уравнений. Приведены 2 примера расчетов.

1. Задача поиска всех или части корней многочлена продолжает привлекать внимание исследователей (см. [1-3]), и такие трудности, как выбор метода и начальных приближений, замедление сходимости в случае кратных или близких корней, влияние погрешностей счета, преодолены лишь отчасти, что сказывается и в практике использования некоторых программ для ЭВМ, в частности на языке БЭЙСИК.

В этой статье применен простой метод, идущий от работ Скарфа, Куна и близких [4-8]. Метод работает с исходным многочленом, без его преобразований, привносящих дополнительные погрешности. Алгоритм также дает возможность определения вращения плоских векторных полей [9], решения ряда систем уравнений с двумя неизвестными и поиска неподвижных точек на плоскости. Этот способ допускает прямое развитие в многомерных задачах (в отличие от метода работы [3]).

2. Описание метода. Пусть дан многочлен

$$\mathcal{P}(z)=\sum_{j=1}^{p+1}(a_j+ic_j)z^{p+1-j}=w_1+iw_2,\ a,c,w\in R.$$

В плоскости $z=z_1+iz_2$ рассмотрим квадрат $Q=Q_\ell\subset C\sim R^2$:

$Q=\{|z_k|\leq r,\ k=1,2\}$ и предположим, что все корни многочлена расположены внутри Q; достаточное условие этого:

$$r=\max_{2\leq j\leq p+1}|a_j+ic_j|^{1/(j-1)}(1+1/|a_1+ic_1|).$$

Выбрав натуральное число N и определив шаг $H=r/N$, разобьем этот квадрат на частичные, а каждый из них – на 2 треугольника с катетами H. На вершинах полученной сетки определим целочисленную функцию – метку M – по правилу:
$M(z)=1$ при $w_1(z)\geq 0$, иначе $M(z)=2$ при $w_2(z)\geq 0$, иначе $M(z)=3$.

Частичный треугольник τ_2 называется полным, если $M(\tau_2)=\{1,2,3\}$. Отрезок τ_1 называется полным, если $M(\tau_1)=\{1,2\}$. Обходя периметр квадрата Q против часовой стрелки, найдем числа s_1 и s_2 полных отрезков длины H с первой меткой соответственно I или 2. Как известно, $s_1-s_2=p$, где p – степень многочлена; эта разность равна вращению векторного поля $\mathcal{P}(z)$ на границе квадрата (см. [9]).

Зная полные отрезки на краю квадрата, мы с их помощью найдем полные треугольники (ячейки сети или 2-симплексы), роль которых ясна из работ [4–6]; так, если в двух соседних точках имеем метки I или 2, то на отрезке, их соединяющем, в силу непрерывности $\mathcal{P}$ найдется точка z^0 такая, что $w_1(z^0)=0$. Если рядом есть еще точка с меткой 3, то вблизи от z^0 найдется еще точка, в которой $w_2=0$. Поэтому при малых H значения многочлена $\mathcal{P}$ в вершинах полных ячеек оказываются малыми, и эти вершины могут служить исходными приближениями для определения корней методом Ньютона или другим быстросходящимся методом.

3. А л г о р и т м . Выбираем начальную точку $z=0+ir$. Перебором отрезков на краю находим полные отрезки; каждый из них дает начало цепочке треугольников, имеющих попарно по общей стороне с метками I,2 в вершинах. Строим цепочки шаг за шагом, по индукции, с проверкой в каждом очередном треугольнике наличия вершины с меткой 3, что здесь означает получение полного треугольника. Если такой вершины нет, то в рассматриваемом треугольнике имеется точно 2 стороны с метками I и 2 в вершинах: через одну из этих сторон мы вошли в рассматриваемый треугольник, через другую – переходим к соседнему, вводя новую, очередную вершину и вычисляя ее метку, и т.д. При выходе це-

по[illegible]ки за пределы квадрата ее надо оборвать и продолжить поиск оче[illegible]дного полного отрезка на краю, исходя из которого строить новую цепочку треугольников.

Как правило, такие цепочки оканчиваются полными искомыми треугольниками: из формулы $s_1 - s_2 = p$ следует, что найдется ровно p цепочек с началом на краю квадрата и с окончанием на полном треугольнике внутри него.

4. Любая из вершин полного треугольника дает некоторое приближение к корню при малых H ; точность здесь пока невелика. Выбрав одну из вершин за начало, строим последовательные приближения по формуле

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - C\mathcal{P}(z^{(k)}) / \mathcal{P}'(z^{(k)}),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где C - кратность корня. Вначале ведем счет с $C = 1$ - это основной метод Ньютона, имеющий квадратичную сходимость в случае простых корней. Если несколько цепочек оканчиваются примерно в одном месте и скорость сходимости замедлена (имеем скопление близких корней), то полагаем C равным числу цепочек и повторяем расчет для этого скопления, выбрав за начало одну из точек, полученных на предыдущем этапе $(C = 1)$, см. дальше пример б).

Исходя из полного треугольника удобно применять и метод парабол (см. [I], с.420), в котором для начала счета необходимы как раз 3 точки, и естественно взять для этой цели вершины полного треугольника.

Пусть теперь f - аналитическая функция (в частности, многочлен). Получим достаточное условие сходимости приближений Ньютона в терминах значений f в вершинах полного треугольника, для того чтобы максимально использовать информацию I-го этапа вычислений. С помощью разложений Тейлора для $f(z_0 + h)$ и $f(z_0 - ih)$, $h = \pm H$, находим следующие полезные формулы, выражающие f' и f'' в вершине z_0 прямого угла полного треугольника (полагаем известной оценку $|f'''(z)| \le M_3$, например, на квадрате Q , которую нетрудно дать в случае многочлена):

$$f^{(l)}(z) = D_l + B_l h^{3-l},\ l = 1, 2;\ |B_l| \le l M_3 \sqrt{2}/3! \equiv G_l,$$

$$D_1 = (f(z_0 + h) + f(z_0 - ih) - 2f(z_0))(1 + i)(2h)^{-1},$$

$$D_2=(f(z_0+h)-if(z_0-ih)-(1-i)f(z_0))(1-i)h^{-2}.$$

Применим известную теорему Канторовича о методе Ньютона. Пусть $B_0=(D_1-h^2G_1)^{-1}>0$, $\eta_0=B_0|f(z_0)|$, $K=D_2+M_3\rho+|h|G_2$; пусть круг $S=S(z_0,\rho)\subset Q$, $\rho\geq 2\eta_0$.

ТЕОРЕМА. Если $B_0K\eta_0\leq 1/2$, то приближения Ньютона сходятся к единственному в круге S решению уравнения $f(z)=0$.

5. Примеры. Для расчетов нами была составлена программа на алгоритмическом языке БЭЙСИК. Опыт ее применения подтверждает эффективность метода для уравнений довольно высокой степени (до 20-й). Так, для уравнения $z^{20}+1=0$ выбор величины $N=10$ при $R=r=2$ обеспечивает поиск всех корней; интересно, что для близкого уравнения $z^{20}-1=0$ даже при $N=30$ наступает переполнение (*overflow*); здесь корни определяются при $N=35$. Напомним, что шаг H равен R/N, так что увеличение N приводит к большей точности приближений метода симплициальных разбиений.

Приведем еще результаты решения двух уравнений:

а) $z^3-15z^2+71z-105=0$,

б) $z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0$.

В случае б) кратные корни определяются сначала с небольшой точностью, используя основной метод Ньютона (см. выше случай $C=1$), а затем, выбирая $C=2$, находим их с высокой точностью. В приводимой таблице результатов K – номер корня, z_0 – вершина полного треугольника – начальное приближение метода Ньютона, z^* – точные корни, число E задается вычислителем: итерации останавливаются, когда $max(w_1,w_2)<E$, где $\varphi(z)=w_1+iw_2$; IT – число итераций Ньютона, $i=\sqrt{-1}$.

а)	K	z_0	IT	z	z^*	E
	I	$9-3i$	8	$7-5.1\times10^{-11}i$	7	
	2	$-3-3i$	8	$3-3.5\times10^{-10}i$	3	10^{-5}
	3	$6+3i$	6	5	5	

б)	I	$.8+1.6i$	6	$1.1 \times 10^{-8}+i$	i	
$C=1$	2	$-1.6+.8i$	I0	$-1.0009+1.9 \times 10^{-3}i$	-1	10^{-5}
	3	$-.8-.8i$	9	$-.9986-6.4 \times 10^{-4}i$	-1	
	4	$.8-.8i$	8	$9.3 \times 10^{-9}-i$	i	
$C=2$	2, 3	$-1.6+.8i$	8	$-1-2.7 \times 10^{-8}i$	-1	10^{-15}
	K	z_0	IT	z	z^*	E

ЛИТЕРАТУРА

I. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. - М.: Наука, I975.
2. КАЛИТКИН И.И. Численные методы. - М.: Наука, I978.
3. LOEWENTHAL D. Numerical computation of the roots of polynomials by spectral factorization. - In: Topics in Numerical Analysis, III, LONDON, 1977, p. 237-255.
4. SCARF H. The approximation of fixed points. - SIAM J. Appl. Math., 1967, v. 15, N5, p. 1328-1343.
5. KUHN H.W. Simplicial approximation of fixed points. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, v.61, N4, 1238-1242.
6. KUHN H.W. A new proof of the fundamental theorem of algebra. Pivoting and extensions. - In: Math. Programming Study, 1974, N1, p. 148-158.
7. ВЕРТГЕЙМ Б.А. О приближенном отыскании неподвижных точек непрерывных отображений. - Докл. АН СССР, I970, т.I9I, № I, с.9-II.
8. ВЕРТГЕЙМ Б.А. О приближенном отыскании неподвижных точек. - Оптимальное планирование, I969, вып.I4, с.28-42.
9. Векторные поля на плоскости / Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. - М.: Физматгиз, I963.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.04.I979 г.