Выпуск 24 (41) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

СУБДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕГЛАДКИХ ОПЕРАТОРОВ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В МНОГОЦЕЛЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.Г. Кусраев

§ 1. Введение

Центральным понятием локального выпуклого анализа является понятие субдифференциала, обобщающее обычный дифференциал для негладких выпуклых операторов и играющее важную роль в различных задачах. Исторически оно возникло в связи с развитием теории экстремальных задач. Именно в теории оптимизации постоянно и настойчиво стала возникать необходимость работать с точечными свойствами недифференцируемых функций. И дело здесь не только в огромном количестве возникающих на практике задач на экстремум, сама постановка которых делает неестественным какие-либо предположения о гладкости. Имеются и причины чисто теоретического характера. При исследовании экстремальной задачи оказываются полезными такие преобразования цели и ограничений, применение которых осложняется требованием гладкости. Метод штрафных функций, метод скаляризации, принцип согласования интересов - это далеко не полный перечень важных и полезных средств, приводящих к недифференцируемым функциям даже в гладкой по постановке задаче. Техника субдифференцирования выпуклых функций позволила получить критерии оптимальности в выпуклом программировании, а также в выпуклых задачах вариационного исчисления и оптимального управления [1-4].

Внутренние потребности теории субдифференцирования (и выпуклого анализа вообще), а также многокритериальные экстремальные задачи привели к привлечению мощного аппарата упорядоченных векторных пространств. Благодаря этому нашли свое естественное объяснение и решение многие задачи выпуклого анализа. В частности, в рамках теории пространств Канторовича были получены общие формулы субдифференцирования и преобразования Юнга для выпуклых операторов [5]. В целом субдифференциальное исчисление для выпуклых операторов и функций к настоящему времени представляет собой важную и привлекательную теорию, богатую разнообразными приложениями [I,3,5–8].

Попытки распространить понятие субдифференциала на негладкие и невыпуклые функции предпринимались многими авторами. Были введены квазидифференцируемые и локально-выпуклые функции [I,2]. Рассматривались аппроксимации негладких отображений и касательные конусы к произвольным множествам [9–I4].

Важный шаг к созданию общей теории субдифференцирования был сделан Кларком [I5]. Он ввел субдифференциал полунепрерывной снизу функции и соответствующий специальный касательный конус к замкнутому множеству. Принципиальное отличие концепции Кларка от других видов одностороннего приближения заключается в том, что аппроксимация (субдифференциал, обобщенная производная по направлениям, касательный конус) автоматически является выпуклой без каких-либо априорных предположений о выпуклости. Для полунепрерывной снизу функции в каждой точке стандартным способом определяется сублинейный функционал, зависящий только от поведения функции в окрестности этой точки. Говоря геометрическим языком, с каждой точкой замкнутого множества связывается непустой выпуклый конус, который зависит лишь от строения множества вблизи этой точки.

Это замечательное свойство приближения по Кларку позволяет применять в полной мере аппарат выпуклого анализа к исследованию негладких и невыпуклых задач. Дальнейшие работы в этом направлении показали плодотворность кларковских приближений. В работах [I5–23] на основе субдифференциала по Кларку развит весьма содержательный аппарат, получивший ряд важных и интересных приложений. Интересно отметить, что по сути дела субградиенты Кларка использовались уже в [24,25].

Суммируя изложенное, можно сказать, что в последние годы в теории субдифференцирования произошли существенные сдвиги в двух направлениях. С одной стороны, выпуклый анализ вошел в рамки теории упорядоченных векторных пространств, а с другой – возникла техника субградиентов Кларка. Основные итоги развития этих двух направлений подведены в монографиях [5] и [23]. В связи с этим возникла задача синтеза этих направлений с тем, чтобы выработать единый взгляд на соответствующие теории субдифференцирования и необходимых условий экстремума. Сначала это было проделано для локально-липшицевых [26] и компактно-липшицевых [27-28] отображений со значениями в K-пространствах и порядково-полных упорядоченных топологических векторных пространствах соответственно. Общая схема, охватывающая более широкие классы отображений, была предложена автором в [29]. Настоящая работа является продолжением этих исседований и посвящена получению правил субдифференцирования суперпозиции не всюду определенных негладких и невыпуклых операторов и выводу необходимых условий экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями.

В § 2 содержатся необходимые предварительные сведения. В частности, вводится понятие топологического общего положения системы конусов, на основе которого выводится важное для дальнейшего представление множества непрерывных опорных суммы и точной верхней границы сублинейных операторов.

В §3 вводятся основные понятия касательного конуса, обобщенной производной по направлениям и субдифференциала. Доказывается, что касательный конус Кларка и в случае псевдотопологического пространства является выпуклым. Устанавливаются некоторые простые свойства касательного конуса и субдифференциала. Так, например, субдифференциал выпуклого оператора в точке совпадает с множеством его непрерывных опорных в этой точке, а для отображения, строго дифференцируемого по направлениям, состоит из единственного элемента – из производной этого отображения.

В §4 получены основные формулы субдифференцирования суперпозиции отображений. При этом для субдифференцирования суммы достаточно требовать полунепрерывность снизу. Однако для более сложных суперпозиций необходимо требование непрерывности на эффективной области определения. Отметим, что для таких суперпозиций и в скалярном случае не известны пока более общие формулы субдифференцирования не всюду определенных отображений.

Следующие два параграфа посвящены получению необходимых условий экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями. Развитая в §3 и 4 техника субдифференцирования позволяет широко пользоваться методом штрафных функций, методом скаляризации бесконечного числа ограничений, принципом согласования интересов и единообразным способом выводить необходимые условия идеального оптимума, обобщенного оптимума и оптимума по Парето в форме правила множителей Лагранжа.

В последнем параграфе содержатся некоторые заключительные замечания.

Используется терминология монографий [5,30].

§2. Предварительные сведения

Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются вещественными, а псевдотопологии на них отделимыми. Запись $\mathcal{X}\downarrow_x X$ (или $\mathcal{X}\downarrow_x$, если ясно, какое пространство X имеется в виду) читается: фильтр $\mathcal{X}$ сходится к элементу x в пространстве X ; если $x=0$, то пишут $\mathcal{X}\downarrow X$. Соотношение $\mathcal{X}_1\prec\mathcal{X}_2$ равносильно включению $\mathcal{X}_1\supset\mathcal{X}_2$ и читается: фильтр $\mathcal{X}_2$ мажорирует (грубее) $\mathcal{X}_1$. Как обычно, будем применять обозначение $\mathcal{X}_1\vee\mathcal{X}_2$ $(\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2)$ для точной верхней (нижней) границы в упорядоченном множестве всех фильтров рассматриваемого пространства. Если $x\in X$, то $[x]$ обозначает фильтр, образованный всеми подмножествами пространства X , содержащими точку x . Под упорядоченным псевдотопологическим векторным пространством (псевдотопологическим K-пространством) понимается упорядоченное векторное пространство (соответственно K-пространство), снабженное такой псевдотопологией, что конус положительных элементов оказывается нормальным. Нормальность конуса Y^+ в упорядоченном псевдотопологическом векторном пространстве Y означает, что для сходящегося к нулю фильтра $\mathcal{Y}\downarrow Y$ его нормальная оболочка $(\mathcal{Y}+Y^+)\wedge(\mathcal{Y}-Y^+)$ также сходится к нулю. Рассмотрим отображение $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ и фильтр $\mathcal{X}$ в X . Обозначим символами $dom F$ и $F(\mathcal{X})$ соответственно эффективную область определения $\{x\in X: F(x)\in Y\}$ отображения F и фильтр в Y , порожденный базисом $\{F[V\cap dom F]: V\in\mathcal{X}\}$. Буквой $\mathcal{V}$ всюду обозначается фильтр на вещественной прямой R , порожденный базисом $\{(0,\varepsilon):\varepsilon\in R, \varepsilon>0\}$.

Нам потребуется следующий результат, являющийся одним из важнейших в субдифференциальном исчислении выпуклых операторов (см. [5]).

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема Кутателадзе). Пусть X - векторное пространство, Y - упорядоченное векторное пространство и Z - K-пространство. Далее, пусть $P_1: X \to Y \cup \{+\infty\}$ - сублинейный оператор, $P_2: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ - возрастающий сублинейный оператор, причем наименьший конус, натянутый на множества $P_1[\mathrm{dom}\, P_1]$ и $-\mathrm{dom}\, P_2$, является подпространством. Тогда имеет место представление

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \bigcup_{A \in \partial P_2} \partial(A \circ P_1).$$

Здесь ∂P - опорное множество сублинейного оператора P, т.е. множество линейных операторов $A: X \to Y$, удовлетворяющих неравенству $Ax \leq Px$ при всех $x \in X$. Всюду в дальнейшем этот символ используется для обозначения множества непрерывных опорных,

$$\partial P = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) : Ax \leq Px,\ x \in X\},$$

где $\mathcal{L}(X, Y)$ - пространство непрерывных линейных операторов из X в Y.

Рассмотрим псевдотопологическое векторное пространство X, и пусть K_1 и K_2 - конусы в нем. Фильтр $\mathscr{X}$ называется разложимым относительно этих конусов, если для некоторого фильтра $\mathscr{X}_1 \downarrow X$ система множеств

$$\{(V \cap K_1 - V \cap K_2) \cap (V \cap K_2 - V \cap K_1) : V \in \mathscr{X}_1\}$$

образует базис фильтра, мажорирующего фильтр $\mathscr{X}$. Очевидно, что в этом случае $\mathscr{X}$ сходится к нулю. Если существует содержащее K_1 и K_2 дополняемое подпространство X_0, в котором всякий сходящийся к нулю фильтр разложим относительно конусов K_1 и K_2, то говорят, что эти конусы топологически находятся в общем положении. Система конусов $K_1, \dots, K_n$ в пространстве X топологически находится в общем положении, если существует такая перестановка $\{j_1, \dots, j_n\}$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$, что конусы K_m и $\bigcap_{s=m+1}^{n} K_{j_s}$ топологически находятся в общем положении для всех $m=1,\ldots,n-1$. В дальнейшем, допуская некоторую вольность речи, будем говорить просто об общем положении системы конусов, опуская слово топологический.

Заметим, что если X – топологическое векторное пространство, то конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении тогда и только тогда, когда совокупность множеств

$$\{(V\cap K_1-V\cap K_2)\cap(V\cap K_2-V\cap K_1):V \text{ – окрестность нуля}\}$$

является базисом фильтра окрестностей нуля некоторого дополняемого подпространства $X_0\subset X$. Следовательно, если в этом случае $K_1=K_2=K$ – острый конус и $K-K=X$, то условие общего положения для K_1 и K_2 эквивалентно тому, что упорядоченное топологическое векторное пространство (X,K) обладает открытым декомпозиционным свойством [31] или что конус K не сплющен [32].

Условие общего положения конусов позволяет получить представление множества непрерывных опорных суммы и точной верхней границы не всюду определенных сублинейных операторов. Именно, имеет место следующая теорема, играющая в дальнейшем принципиально важную роль.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $P_1,\ldots,P_n:X\to Y\cup\{+\infty\}$ – сублинейные операторы, непрерывные в нуле на своих эффективных областях определения, т.е. $P_i(x)\nmid Y$ для любых $x\nmid X$ и $i=1,\ldots,n$. Если при этом конусы $dom P_1,\ldots,dom P_n$ находятся в общем положении, то имеют место представления

$$\partial(P_1+\ldots+P_n)=\partial P_1+\ldots+\partial P_n;$$

$$\partial(P_1\vee\ldots\vee P_n)=\bigcup_{\substack{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0;\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=I_Y}}\{\partial(\alpha_1\circ P_1)+\ldots+\partial(\alpha_n\circ P_n)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать первую формулу, достаточно рассмотреть случай $n=2$ и установить, что $\partial(P_1+P_2)\subset\partial P_1+\partial P_2$. Пусть $A\in\partial(P_1+P_2)$, $X_0=dom P_1-dom P_2$ и для произвольного $x\in X_0$ положим

$$P_0(x)=\inf\{P_1(x+h)+P_2(h)-Ah:x+h\in dom P_1,h\in dom P_2\}.$$

Нетрудно убедиться, что полученный оператор $P_0:X_0\to Y\cup\{+\infty\}$ является сублинейным и $dom P_0=X_0$. Кроме того, если $A_1\in\partial P_0$

и $Q: X \to X$ – непрерывный проектор, $Q[X]=X_0$, то $A_1 \circ Q \in \partial P_1$ и $A - A_1 \circ Q \in \partial P_2$. Таким образом, достаточно показать, что оператор P_0 непрерывен в нуле.

Пусть $\mathscr{X} \downarrow X_0$ и для некоторого $\mathscr{X}_1 \downarrow X_0$ фильтр $\mathscr{X}_2$, порожденный системой множеств

$$\{(\operatorname{dom} P_1 \cap V - \operatorname{dom} P_2 \cap V) \cap (\operatorname{dom} P_2 \cap V - \operatorname{dom} P_1 \cap V) : V \in \mathscr{X}_1\},$$

мажорирует $\mathscr{X}$. Положим $\mathscr{Y} = P_1(\mathscr{X}_1 + \mathscr{X}_1) + P_2(\mathscr{X}_1) - A(\mathscr{X}_1)$ и для $U \in \mathscr{Y}$ найдем такое $V \in \mathscr{X}$, что

$$P_1[(V+V) \cap \operatorname{dom} P_1] + P_2[V \cap \operatorname{dom} P_2] - A[V] \subset U.$$

Если теперь $x \in V_1 = (\operatorname{dom} P_1 \cap V - \operatorname{dom} P_2 \cap V) \cap (\operatorname{dom} P_2 \cap V - \operatorname{dom} P_1 \cap V)$,

$$-P_1(-x+h_1) - P_2(h_1) \le P_0(x) \le P_1(x+h_2) + P_2(h_2) - A(h_2)$$

для некоторых $h_1, h_2 \in \operatorname{dom} P_2 \cap V$ и, следовательно, $P_0[V_1] \subset \subset (U+Y^+) \cap (U-Y^+)$. В силу квазинепрерывности операторов P_1 и P_2 отсюда следует, что $P_0(\mathscr{X}_2) \downarrow Y$ и тем более $P_0(\mathscr{X}) \downarrow Y$. Вторая формула легко вытекает из первой и теоремы Кутателадзе (см. [5,6]). Теорема доказана.

Для произвольного множества $M \subset X$ введем отображение $\delta_Y(M): X \to Y \cup \{+\infty\}$ и множество $\pi_Y(M) \subset \mathscr{L}(X, Y)$, определенные следующими равенствами:

$$\delta_Y(M)x = \begin{cases} 0 \in Y, & \text{если } x \in M; \\ +\infty, & \text{если } x \notin M; \end{cases}$$

$$\pi_Y(M) = \{A \in \mathscr{L}(X,Y) : Ax \le 0,\ x \in M\}.$$

Очевидно, что $\pi_Y(M)$ – выпуклый конус, а если M – выпуклый конус в X, то $\delta_Y(M)$ – сублинейный оператор.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Если конусы $K_1, \dots, K_n$ находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\pi_Y(K_1 \cap \dots \cap K_n) = \pi_Y(K_1) + \dots + \pi_Y(K_n).$$

Доказательство получается из теоремы 2.2, если положить $P_i = \delta_Y(K_i)$ при $i = 1, \dots, n$.

§3. Касательный конус, нормальный конус субдифференциал

В этом параграфе вводятся основные понятия всей работы и доказываются простейшие их свойства.

Пусть X - псевдотопологическое векторное пространство, M - произвольное подмножество в X и $\bar{x} \in cl\, M$, где

$$cl\, M = \{x \in X: \text{найдется фильтр } \mathscr{X} \downarrow_x X,\ M \in \mathscr{X}\}.$$

Элемент $h \in X$ называется касательным к множеству M в точке $\bar{x}$, если для любого фильтра $\mathscr{X} \downarrow_{\bar{x}}$ существует фильтр $\mathscr{Y} \downarrow_h$, удовлетворяющий условию: каково бы ни было $V \in \mathscr{Y}$, найдутся множество $U \in \mathscr{X}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(x + t \cdot V) \cap M \neq \emptyset$ при всех $x \in U \cap M$ и $t \in (0, \varepsilon)$. Если выполнено последнее условие, то будем говорить, что фильтр $\mathscr{Y}$ подчинен фильтру $\mathscr{X}$ условием $h \in T(M; \bar{x})$, где $T(M; \bar{x})$ - совокупность всех элементов, касательных к M в точке $\bar{x}$. Иными словами, включение $h \in T(M; \bar{x})$ справедливо в том и только том случае, когда для всякого фильтра $\mathscr{X} \downarrow_{\bar{x}}$ найдется фильтр $\mathscr{Y} \downarrow_h$, подчиненный первому этим включением. Определим также множество $T^*(M; \bar{x})$ - равномерно касательных к M в точке $\bar{x}$ элементов. Элемент $h \in T^*(M; \bar{x})$ тогда и только тогда, когда для всякого $\mathscr{X} \downarrow_{\bar{x}}$ найдутся такие $U \in \mathscr{X}$ и $\varepsilon > 0$, что $U \cap M + (0, \varepsilon) h \subset M$. Очевидно, что $0 \in T^*(M; \bar{x}) \subset T(M; \bar{x})$, а если $\bar{x}$ - внутренняя точка M, то $T^*(M; \bar{x}) = T(M; \bar{x}) = X$. При $\bar{x} \notin cl\, M$ положим $T(M; \bar{x}) = T^*(M; \bar{x}) = \emptyset$. Если множество содержится в произведении псевдотопологических пространств, то при определении касательного элемента можно требовать равномерност только по какому-нибудь подпространству. Определим, например, множество $T^{1*}(M; (\bar{x}, \bar{y}))$ для множества $M \subset X \times Y$. Пара $(h, k) \in T^{1*}(M; (\bar{x}, \bar{y}))$ тогда и только тогда, если для любых фильтров $\mathscr{X} \downarrow \bar{x}$ и $\mathscr{Y} \downarrow_{\bar{y}} Y$ существует фильтр $\mathscr{R} \downarrow_k Y$, удовлетворяющий условию: каково бы ни было $U \in \mathscr{R}$, найдутся $V \in \mathscr{X}$ и $W \in \mathscr{Y}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\{x + th\} \times (y + t \cdot U) \cap M \neq \emptyset$$

при всех $(x, y) \in V \times W \cap M$ и $t \in (0, \varepsilon)$. При этом будем говорить о подчиненности фильтра $\mathscr{R}$ паре $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ условием $(h, k) \in T^{1*}(M; (\bar{x}, \bar{y}))$. Очевидно

$$T^*(M; (\bar{x}, \bar{y})) \subset T^{1*}(M; (\bar{x}, \bar{y})) \subset T(M; (\bar{x}, \bar{y})).$$

Замечательным свойством этих конусов является их выпуклость.

ТЕОРЕМА 3.I. *Множества $T(M; \bar{x})$ и $T^*(M; \bar{x})$ являются непустыми выпуклыми конусами. Если при этом X - тополо-*

гическое векторное пространство, то $T(M;\bar{x})$ – замкнутое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_1, h_2 \in T^*(M;\bar{x})$, $h=h_1+h_2$ и $\mathcal{X} \downarrow \bar{x}$. Для фильтра $\mathcal{X}=\mathcal{X}+\mathcal{V}\cdot h$ найдем $V\in\mathcal{X}$ и $\varepsilon_1>0$ так, чтобы $V\cap M+(0,\varepsilon_1)h_2\subset M$. Если теперь $U\in\mathcal{X}$ и $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ таковы, что $U\cap M+(0,\varepsilon)h_1\subset M$ и $U+(0,\varepsilon)h_1\subset M$, то

$$U\cap M+(0,\varepsilon)h_1+(0,\varepsilon)h_2\subset M\cap V+(0,\varepsilon)h_2\subset M.$$

Таким образом, $h\in T^*(M;\bar{x})$ и, кроме того, нетрудно заметить, что $\lambda T^*(M;\bar{x})\subset T^*(M;\bar{x})$ для любого $\lambda\geq 0$.

Предположим теперь, что $h_1,h_2\in T(M;\bar{x})$, $h=h_1+h_2$, $\mathcal{X}_1\downarrow\bar{x}$. Найдем $\mathcal{Y}_1\downarrow h_1$, подчиненный фильтру $\mathcal{X}_1$ условием $h_1\in T(M;\bar{x})$, и положим $\mathcal{X}_2=\mathcal{X}_1+\mathcal{V}\cdot\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2$, где фильтр $\mathcal{Y}_2\downarrow h_2$ и подчинен $\mathcal{X}_2$ условием $h_2\in T(M;\bar{x})$. Такой фильтр $\mathcal{Y}_2$ существует, поскольку $\mathcal{X}_2\downarrow_{\bar{x}} X$. Покажем, что $\mathcal{Y}$ подчинен фильтру $\mathcal{X}_1$ условием $h\in T(M;\bar{x})$, и этим будет установлена справедливость включения $T(M;\bar{x})+T(M;\bar{x})\subset T(M;\bar{x})$ в силу произвольности $h_1,h_2\in T(M;\bar{x})$ и $\mathcal{X}_1\downarrow\bar{x}$. Зафиксируем произвольный элемент V фильтра $\mathcal{Y}$, и пусть $V_1+V_2\subset V$ для некоторых $V_1\in\mathcal{Y}_1$ и $V_2\in\mathcal{Y}_2$. Так как $\mathcal{Y}_2$ подчинен фильтру $\mathcal{X}_2$ условием $h_2\in T(M;\bar{x})$, найдутся $U_2\in\mathcal{X}_2$ и $\varepsilon_2>0$, для которых выполнено соотношение

$$(x+t\cdot V_2)\cap M\neq\emptyset$$

при всех $x\in U_2\cap M$, $t\in(0,\varepsilon_2)$. Из определения фильтра $\mathcal{X}_2$ видно, что $U_1'+(0,\varepsilon')\cdot V_1'\subset U_2$ для подходящих $V_1\supset V_1'\in\mathcal{Y}_1$, $U_1'\in\mathcal{X}_1$ и $\varepsilon'>0$. Воспользуемся, наконец, подчиненностью $\mathcal{Y}_1$ фильтру $\mathcal{X}_1$ условием $h_1\in T(M;\bar{x})$ и найдем такие $U_1\in\mathcal{X}_1$ и $\varepsilon_1>0$, что $(x+tV_1')\cap M\neq\emptyset$ для всех $x\in U_1\cap M$ и $t\in(0,\varepsilon_1)$. Положим $U=U_1\cap U_1'$, $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon'\}$, и пусть $x\in U\cap M$ и $t\in(0,\varepsilon)$. Тогда $x+tv_1\in M$ для некоторого $v_1\in V_1'$, и поскольку $x+tv_1\in U_2$, верно также и включение $x+t_1v_1+t_2v_2\in M$ при соответствующем выборе $v_2\in V_2$. Но, с другой стороны, $x+tv_1+tv_2\in x+V\cdot t$, следовательно, $(x+tV)\cap M\neq\emptyset$, что и означает подчиненность $\mathcal{Y}$ фильтру $\mathcal{X}_1$. Если $\lambda>0$ и $\mathcal{Y}\downarrow h$ подчинен фильтру $\mathcal{X}$ условием $h\in T(M;\bar{x})$, то $\lambda^{-1}\mathcal{Y}$ будет подчинен тому же самому фильтру условием $\lambda h\in T(M;\bar{x})$. Отсюда следует, что $\lambda T(M;\bar{x})\subset T(M;\bar{x})$ при $\lambda>0$; включение $0\in T(M;\bar{x})$ очевидно. Таким образом, $T(M;\bar{x})$ – выпуклый конус и осталось доказать его замкнутость в случае, когда X – топологическое векторное пространство.

Допустим, что h – предельная точка множества $T(M;\bar{x})$ и

V - произвольная открытая окрестность этой точки. Тогда найдется $h_0 \in T(M;\bar{x})$, входящая в U вместе с некоторой своей окрестностью U_0. Но для подходящей окрестности V точки $\bar{x}$ и подходящего числа $\varepsilon > 0$ будем иметь $(x+tU)\cap M \supset (x+tU_0)\cap M \neq \emptyset$ при всех $x \in V$ и $t \in (0,\varepsilon)$, т.е. $h \in T(M;\bar{x})$. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если M - выпуклое подмножество X и $\bar{x} \in M$, то имеют место следующие включения:

$$Fd_{\bar{x}}(M) \subset T(M;\bar{x}) \subset cl\, Fd_{\bar{x}}(M),$$

где $Fd_{\bar{x}}(M)$ - конус допустимых направлений к M в точке $\bar{x}$,

$$Fd_{\bar{x}}(M) = \{h \in X : \exists \varepsilon > 0, \bar{x} + [0,\varepsilon]h \subset M\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in Fd_{\bar{x}}(M), \bar{x}+[0,\varepsilon]\cdot h \subset M$ и $\mathscr{X} \downarrow \bar{x}$. Положим $\mathscr{Y} = \varepsilon^{-1}(\bar{x} - \mathscr{X}) + h$ и для $U \in \mathscr{Y}$ найдем множество $V \in \mathscr{X}$, для которого выполнено $\varepsilon^{-1}(\bar{x} - V) + h \subset U$. Тогда, если $t \in (0,\varepsilon)$, $x \in V \cap M$ и $t' = \varepsilon^{-1}t$, то

$$M \ni (1-t')x + t'(\bar{x} + \varepsilon h) = x + t'(\bar{x} - x + \varepsilon \cdot h) \in x + U,$$

т.е. $(x+tU)\cap M \neq \emptyset$, а это и означает, что $\mathscr{Y}$ подчинен $\mathscr{X}$ условием $h \in T(M;\bar{x})$.

Предположим теперь, что $h \in T(M;\bar{x})$, и найдем фильтр $\mathscr{Y} \downarrow h$, подчиненный фильтру $[\bar{x}] \downarrow \bar{x}$ этим условием. Тогда для любого $V \in \mathscr{Y}$ существует $\varepsilon_V > 0$ такое, что множество

$$U_V = \{h \in V : \bar{x} + th \in M \quad \text{при некотором } t \in (0,\varepsilon_V)\}$$

не пусто. Система множеств $\{U_V : V \in \mathscr{Y}\}$ образует базис фильтра, а порожденный ею фильтр сходится к элементу h. Осталось заметить, что $U_V \subset Fd_{\bar{x}}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть при $i = 1,2$ имеем: X_i - псевдотопологическое векторное пространство, M_i - произвольное его подмножество и $\bar{x}_i \in cl M$. Тогда

$$T(M_1 \times M_2;(\bar{x}_1,\bar{x}_2)) = T(M_1;\bar{x}_1) \times T(M_2;\bar{x}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $(h_1,h_2) \in T(M_1 \times M_2;(\bar{x}_1,\bar{x}_2))$ равносильно тому, что для любых фильтров $\mathscr{X}_1 \downarrow \bar{x}_1$ и $\mathscr{X} \downarrow \bar{x}_2$ найдутся фильтры $\mathscr{Y}_1 \downarrow h_1$ и $\mathscr{Y}_2 \downarrow h_2$ такие, что $\mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2$ подчинен $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ условием $(h_1,h_2) \in T(M_1 \times M_2,(\bar{x}_1,\bar{x}_2))$. Последнее эквивалентно подчиненности $\mathcal{Y}_i$ фильтру $\mathcal{X}_i$ условием $h_i \in T(M_i;\bar{x}_i)$ при $i=1,2$. Этим самым доказано требуемое равенство.

Рассмотрим упорядоченное псевдотопологическое векторное пространство Y и определим множество Y-нормалей к множеству $M\subset X$ в точке $\bar{x}$ следующим равенством:

$$N_Y(M;\bar{x})=\mathcal{T}_Y(T(M;\bar{x}))=\{A\in\mathcal{L}(X,Y): Ah\leq 0,\ h\in T(M;\bar{x})\},$$

если $\bar{x}\in clM$, и $N_Y(M;\bar{x})\neq\varnothing$, если $\bar{x}\notin clM$. Очевидно, что $N_Y(M;\bar{x})$– выпуклый конус, замкнутый в топологии поточечной сходимости. Из предложения 3.2 следует, что если M – выпуклое множество и $\bar{x}\in M$, то

$$N_Y(M;\bar{x})=\{A\in\mathcal{L}(X,Y): Ax\leq A\bar{x},\ x\in M\}.$$

Перейдем к определению субдифференциалов. Пусть $F:X\to Y\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$– произвольное отображение, и положим, как обычно,

$$epi\,F=\{(x,y)\in X\times Y: F(x)\leq y\}.$$

Субдифференциалом оператора F в точке $\bar{x}$ из множества $dom\,F$ называется следующее множество:

$$\partial F(\bar{x})=\{A\in\mathcal{L}(X,Y):(A,-I_Y)\in N_Y(epi\,F,(\bar{x},F(\bar{x})))\},$$

где I_Y – тождественный оператор на Y. Положим

$$T_{F,\bar{x}}(h)=\{k\in Y:(h,k)\in T(epi\,F,(\bar{x},F(\bar{x})))\}.$$

Точная нижняя граница (если она существует) множества $T_{F,\bar{x}}(h)$ называется обобщенной производной F в точке $\bar{x}$ по направлению h и обозначается символом $F^\circ(\bar{x})h$. Если Y -K-пространство и $\partial F(\bar{x})\neq\varnothing$, то, как следует из теоремы 3.I, оператор $F^\circ(\bar{x}):X\to Y\cup\{+\infty\}$ является сублинейным. При этом

$$dom\,F^\circ(\bar{x})=\{h\in X: T_{F,\bar{x}}(h)\neq\varnothing\}$$

и

$$\partial F(\bar{x})=\{A\in\mathcal{L}(X,Y): Ah\leq k,\ k\in T_{F,\bar{x}}(h)\}=\partial F^\circ(\bar{x}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$– выпуклый оператор и $\bar{x}\in dom\,F$, то $\partial F(\bar{x})$ совпадает с субдифференциалом F в точке $\bar{x}$ в смысле выпуклого анализа, т.е.*

$$\partial F(\bar{x})=\{A\in\mathcal{L}(X,Y): Ax-A\bar{x}\leq Fx-F\bar{x},\ x\in X\}.$$

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Предположим, что отображение $F: X \to Y$ непрерывно и строго дифференцируемо по направлениям в точке $\bar{x} \in X$ в следующем смысле. Существует непрерывный линейный оператор A из X в Y и отображение $R: X^2 \times (0,+\infty) \to Y$ такие, что $R(\mathscr{X}, h, \mathscr{V}) \downarrow$ $\downarrow \mathscr{Y}$ для всех $\mathscr{X} \downarrow_{\bar{x}}$ и $h \in X$ и имеет место представление

$$F(x+th) = F(x) + tAh + R(x, h, t).$$

Тогда $\partial F(\bar{x}) = \{A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгая дифференцируемость по направлениям означает, что пара $([h], Ah + R(\mathscr{X}, h, \mathscr{V}))$ подчинена паре фильтров $(\mathscr{X}, F(\mathscr{X}) \wedge \mathscr{Y})$ условием $(h, Ah) \in T(epi\, F; (\bar{x}, F(\bar{x}))$ для любого фильтра $\mathscr{Y} \downarrow_{F(\bar{x})}$. Кроме того, очевидно, что подчиненность парам $(\mathscr{X}, F(\mathscr{X}) \wedge \mathscr{Y})$ и $(\mathscr{X}, F(\mathscr{X}))$ выполняется или не выполняется одновременно. Таким образом, $Ah \in T_{F,\bar{x}}(h), h \in X$ и если $A_1 \in \partial F(\bar{x})$, то $A_1 = A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть при $i=1,\dots,n$ имеем: X_i - псевдотопологическое векторное пространство, Y_i - упорядоченное псевдотопологическое векторное пространство, $F_i: X_i \to Y_i \cup \{+\infty\}$ и $\bar{x}_i \in dom\, F_i$. Определим отображение $F: \Pi X_i \to \Pi Y_i \cup \{+\infty\}$ соотношением

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), & \text{если } x_i \in dom\, F_i, i=1,\dots,n, \\ +\infty, & \text{если } \exists i: x_i \notin dom\, F_i. \end{cases}$$

Тогда

$$\partial F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \partial F_1(\bar{x}_1) \times \dots \times \partial F_n(\bar{x}_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $\sigma: \prod_i X_i \times \prod_i Y_i \to \Pi(X_i \times Y_i)$, $\sigma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ - перестановка координат в произведении $\prod_i X_i \times \prod_i Y_i$, то $\sigma(epi\, F) = \prod_i epi\, F_i$. По предложению 3.3

$$T(\sigma(epi\, F); \sigma[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, F_1(\bar{x}_1), \dots, F_n(\bar{x}_n)) = \prod_i T(epi\, F_i; (\bar{x}_i, F(\bar{x}_i)))$$

и осталось применить определение субдифференциала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Для всяких $M \subset X$ и $\bar{x} \in X$ имеют место следующие эквивалентные соотношения:

$$\partial \delta_Y(M;\bar{x}) = N_Y(M;\bar{x});$$

$$\delta_Y^{\circ}(M)(\bar{x}) = \delta_Y(T(M;\bar{x})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если заметить, что $epi\, \delta_Y(M) = M \times Y^+$, и применить предложение 3.3, то получим

$$T(epi\, \delta_Y(M);(\bar{x},0)) = T(M;\bar{x}) \times Y^+.$$

Отсюда без труда вытекают требуемые соотношения.

§4. Формулы субдифференцирования сложных отображений

Для того чтобы развить рабочий аппарат субдифференцирования, очевидно необходимо выделить определенный класс негладких отображений, допускающих явное нахождение аппроксимаций. В этом параграфе вводится класс регулярных отображений, содержащий, в частности, все локально-липшицевы отображения, и для этого класса выводятся основные формулы субдифференциального исчисления.

Пусть Q – псевдотопологическое пространство, а Y, как и раньше, упорядоченное псевдотопологическое векторное пространство. Отображение $F: Q \to Y \cup \{+\infty\}$ называется полунепрерывным снизу (сверху) в точке $\bar{x} \in dom F$, если для любого фильтра $\mathcal{X} \downarrow_{\bar{x}} Q$ найдется такой фильтр $\mathcal{Y} \downarrow_{F(\bar{x})} Y$, что $F(\mathcal{X})$ мажорируется фильтром, порожденным базисом $\{V+Y^+ : V \in \mathcal{Y}\}$ (соответственно $\{V-Y^+ : V \in \mathcal{Y}\}$), т.е. $F(\mathcal{X}) \prec \mathcal{Y} + Y^+$ (соответственно $F(\mathcal{X}) \prec \mathcal{Y} - Y^+$). Если F полунепрерывно снизу и сверху в точке $\bar{x}$, то оно непрерывно в этой точке в силу нормальности конуса Y^+.

Пусть теперь X – псевдотопологическое векторное пространство и $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$. Положим

$$T_{F,\bar{x}}^*(h) = \{k \in Y : (h,k) \in T^{1*}(epi\, F;(\bar{x},F(\bar{x})))\}.$$

Отображение F называется квазирегулярным в точке $\bar{x} \in dom F$, если выполнены следующие условия:

а) для каждого $h \in X$ существует $\inf T_{F,\bar{x}}(h)$ в $Y \cup \{+\infty\}$ и сублинейный оператор $F^{\circ}(\bar{x}): X \to Y \cup \{+\infty\}$ непрерывен в нуле на множестве $dom\, F^{\circ}(\bar{x})$ (см. теорему 2.2);

б) для каждого $h \in X$ имеет место включение

$$T_{F,\bar{x}}(h) \subset cl\, T^{*}_{F,\bar{x}}(h).$$

Если кроме этого выполнено условие

в) F непрерывно в точке $\bar{x}$ на множестве $dom F$, т.е. $F(\mathcal{X}) = F(\mathcal{X} \cap dom\, F) \downarrow_{F(\bar{x})} Y$ для любого $\mathcal{X} \downarrow_{\bar{x}} X$,
то отображение F называется регулярным в точке $\bar{x}$.

В дальнейшем используется следующая сокращенная запись:

$$\Delta F(x,t,h) = t^{-1}[F(x+th) - F(x)].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Если отображение $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ полунепрерывно снизу в точке $\bar{x}$, то эквивалентны условия:

I) $k \in T^{*}_{F,\bar{x}}(h)$;

2) для всякого фильтра $\mathcal{X} \downarrow_{\bar{x}}$ такого, что $F(\mathcal{X}) \downarrow_{F(\bar{x})}$, существует фильтр $\mathcal{R} \downarrow Y$, удовлетворяющий соотношению

$$\Delta F(\mathcal{X}, \mathcal{V}, h) \prec k + \mathcal{R} - Y^{+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I)$\Longrightarrow$2). Условие 2) эквивалентно тому, что для любого фильтра $\mathcal{X} \downarrow_{\bar{x}}, F(\mathcal{X}) \downarrow_{F(\bar{x})}$, найдется фильтр, подчиненный паре $(\mathcal{X}, F(\mathcal{X}))$ условием $k \in T^{*}_{F,\bar{x}}(h)$. Но если верно I), то последнее выполняется по определению конуса $T^{1*}(epi\, F; (\bar{x}, F(\bar{x})))$.

2)$\Longrightarrow$I). Рассмотрим фильтры $\mathcal{X} \downarrow_{\bar{x}}$ и $\mathcal{Y} \downarrow_{F(\bar{x})}$ и, пользуясь полунепрерывностью снизу отображения F в точке $\bar{x}$, найдем фильтр $\mathcal{Y}' \downarrow_{F(\bar{x})}$, удовлетворяющий условиям $F(\mathcal{X}) \prec \mathcal{Y}' + Y^{+}$ и $\mathcal{Y} \prec \mathcal{Y}'$. Исключив тривиальный случай, когда $F[U \cap dom\, F] \cap (V - Y^{+}) = \phi$ для некоторых $U \in \mathcal{X}$ и $V \in \mathcal{Y}'$, положим $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \wedge F^{-1}(\mathcal{Y} - Y^{+})$. Тогда $\mathcal{X}' \downarrow_{\bar{x}}, F(\mathcal{X}') \downarrow_{F(\bar{x})}$ и, следовательно, существует фильтр $\mathcal{R}$, подчиненный паре $(\mathcal{X}', F(\mathcal{X}'))$ условием I). Осталось показать, что этот же фильтр подходит и для исходной пары $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Пусть $V \in \mathcal{R}$ произвольно, а $M' \in \mathcal{X}'$ и $\varepsilon > 0$ удовлетворяют включению $\Delta F[M', (0,\varepsilon), h] \subset k + V - Y^{+}$ или, что то же самое,

$$\{x + th\} \times (F(x) + tV) \cap epi\, F \neq \phi \qquad (I)$$

для всех $x \in M'$ и $t \in (0,\varepsilon)$. Подберем $M \in \mathcal{X}$ и $N \in \mathcal{Y}$ так, чтобы $M \supset F^{-1}[N - Y^{+}] \cap M$. Если теперь $(x,y) \in M \times N \cap epi\, F$ и $t \in (0,\varepsilon)$, то $x \in M, y \geq F(x)$ и, стало быть, $x \in M'$. Следовательно, выполнено (I) и, тем более,

$$\{x+th\}\times(y+tV)\cap \operatorname{epi} F\neq\emptyset,$$

а это по определению означает, что $k\in T^{*}_{F,\bar{x}}(h)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Предположим, что сужение отображения $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ на $\operatorname{dom} F$ непрерывно. Тогда

$$T^{*}_{F,\bar{x}}(-h)=T^{*}_{-F,\bar{x}}(h).$$

Если, кроме того, F квазирегулярно в точке $\bar{x}$, то

$$\partial F(\bar{x})=-\partial(-F)(\bar{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $k\in T^{*}_{-F,\bar{x}}(h)$, $\mathscr{X}\to\bar{x}$ и фильтр $\mathscr{Q}\to k$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta(-F)(\mathscr{X}_1,\mathscr{V},h)\prec\mathscr{Q}-Y^{+},$$

где $\mathscr{X}_1=\mathscr{X}-\mathscr{V}\cdot h$. Если $U\in\mathscr{Q}$, то для некоторых $V\in\mathscr{X}$ и $\varepsilon>0$ имеет место включение

$$\Delta(-F)(V-(0,\varepsilon)h,(0,\varepsilon),h]\subset U-Y^{+},$$

и так как $\Delta F[V,(0,\varepsilon),-h]\subset\Delta(-F)[V-(0,\varepsilon)h,(0,\varepsilon),h]$,

в силу произвольности $U\in\mathscr{Q}$ получаем

$$\Delta F(\mathscr{X},\mathscr{V},-h)\prec\mathscr{Q}-Y^{+}.$$

Этим доказано, что $T^{*}_{-F,\bar{x}}(h)\subset T^{*}_{F,\bar{x}}(-h)$, обратное включение устанавливается аналогично. Отсюда без труда вытекает вторая часть утверждения, так как субдифференциал квазирегулярного оператора определяется конусом $T^{1*}_{F,\bar{x}}(\operatorname{epi} F,(\bar{x},F(\bar{x})))$.

Пусть Y – K-пространство, и применим полученное следствие для вычисления субдифференциала оператора $\delta_n=-\varepsilon_n\circ-I_{Y^n}$, где ε_n – канонический оператор Кутателадзе. Итак, $\delta_n:Y^n\to Y$, $\delta_n:(y_1,\dots,y_n)\to y_1\wedge\dots\wedge y_n$. Для $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)\in Y^n$ имеем

$$\partial\delta_n(\bar{y})=\partial(-\varepsilon_n\circ-I_{Y^n})(\bar{y})=-\partial(\varepsilon'_n(-\bar{y})\circ-I_{Y^n})=$$

$$=-\partial\varepsilon_n(-\bar{y})\circ-I_{Y^n}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\in\Lambda(Y)^n:\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(-\bar{y}_j)=$$

$$=(-\bar{y}_1)\vee\dots\vee(-\bar{y}_n)\}=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Lambda(Y)^n:\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\bar{y})=\bar{y}_1\wedge\dots\wedge\bar{y}_n\},$$

где $\Lambda(Y)=\{\alpha\in L(Y,Y):0\leq\alpha\leq I_Y\}$ – множество всех мультипликаторов.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X – псевдотопологическое векторное пространство, Y - псевдотопологическое K-пространство и $F_1,\dots,F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ - отображения, полунепрерывные снизу и квазирегулярные в точке $\bar{x}$, причем конусы $\operatorname{dom} F_1^\circ(\bar{x}),\dots,\operatorname{dom} F_n^\circ(\bar{x})$ находятся в общем положении. Тогда

$$\partial(F_1+\dots+F_n)(\bar{x}) \subset \partial F_1(\bar{x})+\dots+\partial F_n(\bar{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, предположим, что $n=2$, и положим $F=F_1+F_2$. Пусть $k_i \in T^*_{F_i,\bar{x}}(h)$, $i=1,2$, $\mathcal{X} \uparrow \bar{x}$ и $\mathcal{Y}=F(\mathcal{X}) \uparrow \bar{y}_1+\bar{y}_2$, где $\bar{y}_1=F_1(\bar{x})$ и $\bar{y}_2=F_2(\bar{x})$. Покажем, что фильтры $\mathcal{Y}_1=F_1(\mathcal{X})$ и $\mathcal{Y}_2=F_2(\mathcal{X})$ сходятся соответственно к элементам $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Так как F_1 и F_2 полунепрерывны снизу в точке $\bar{x}$, существуют такие фильтры $\mathcal{Y}' \uparrow \bar{y}_1$ и $\mathcal{Y}'' \uparrow \bar{y}_2$, что

$$F_1(\mathcal{X}) < \mathcal{Y}'+Y^+, \quad F_2(\mathcal{X}) < \mathcal{Y}''+Y^+.$$

Второе из этих соотношений влечет справедливость оценки

$$F_1(\mathcal{X}) = F_1(\mathcal{X} \cap \operatorname{dom} F_2) < F(\mathcal{X})-F_2(\mathcal{X}) < \mathcal{Y}-\mathcal{Y}''-Y^+,$$

а, учитывая еще и первое соотношение, получаем

$$\mathcal{Y}_1 < (\mathcal{Y}'+Y^+) \wedge (\mathcal{Y}-\mathcal{Y}''-Y^+) \uparrow \bar{y}_1.$$

Аналогично доказывается, что $\mathcal{Y}_2 \uparrow \bar{y}_2$. Найдем, далее, фильтры $\mathcal{K}_1 \uparrow k_1$ и $\mathcal{K}_2 \uparrow k_2$, подчиненные парам $(\mathcal{X},\mathcal{Y}_1)$ и $(\mathcal{X},\mathcal{Y}_2)$ соответственно условиями $k_1 \in T^*_{F_1,\bar{x}}(h)$ и $k_2 \in T^*_{F_2,\bar{x}}(h)$. Тогда фильтр $\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2$, как нетрудно заметить, подчинен паре $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ условием $k_1+k_2 \in T^*_{F,\bar{x}}(h)$ и в силу предложения 3.I:

$$T^*_{F,\bar{x}}(h) \supset T^*_{F_1,\bar{x}}(h)+T^*_{F_2,\bar{x}}(h).$$

Если теперь $A \in \partial F(\bar{x})$, то $Ah \leq k_1+k_2$ для всех $h \in X$ и $k_i \in T^*_{F_i,\bar{x}}(h)$, $i=1,2$, а в силу квазирегулярности F_1 и F_2 в точке $\bar{x}$ это же неравенство справедливо и для всех $h \in X$ и $k_i \in T_{F,\bar{x}}(h)$, $i=1,2$. Отсюда следует, что $A \in \partial(F_1^\circ(\bar{x})+F_2^\circ(\bar{x}))$, и осталось применить теорему 2.2. Теорема доказана.

Займемся вычислением субдифференциалов суперпозиций более общего вида $G \circ F$, где $F : X \to Y \cup \{+\infty\}$, $G : Y \to Z \cup \{+\infty\}$, Z - еще одно упорядоченное псевдотопологическое векторное пространство.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть выполнены условия:

I) отображение F непрерывно в точке $\bar{x}\in dom F$;

2) отображение G возрастает, полунепрерывно снизу в точке $\bar{y}\in F(\bar{x})$ и $dom\, G=Y$;

3) $\Delta_k G(\mathcal{Y},\mathcal{V},\mathcal{K})\uparrow\mathcal{Z}$ для всех $\mathcal{Y}\uparrow_{\bar{y}}$, $k\in Y$ $\mathcal{K}\uparrow_k$, где $\Delta_k G(y,t,k')=t^{-1}[G(y+tk')-G(y+tk)]$.

Тогда
$$T^*_{G\circ F,\bar{x}}(h)\supset \cup\{T_{G,\bar{y}}(k): k\in T_{F,\bar{x}}(h)\},\ h\in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $k\in T_{F,\bar{x}}(h)$, $l\in T_{G,\bar{y}}(k)$ и $\mathcal{X}\uparrow_{\bar{x}}X$. Существуют фильтры $\mathcal{X}_1\uparrow Y$, $F(\mathcal{X})<\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2\uparrow\mathcal{Z}$, удовлетворяющие соотношениям
$$\Delta F(\mathcal{X},\mathcal{V},h)<k+\mathcal{X}_1-Y^+,$$
$$\Delta G(\bar{y}+\mathcal{X}_1,\mathcal{V},k)<l+\mathcal{X}_2-\mathcal{Z}^+.$$

Для фиксированного $U_2\in\mathcal{X}_2$ выберем такие $U_1\in\mathcal{X}_1$, $F[U]\subset$ $\subset U_1$ и $\varepsilon>0$, что
$$\Delta F[U\times(0,\varepsilon)\times\{h\}\cap dom\, F]\subset k+U_1-Y^+,$$
$$\Delta G[\bar{y}+U_1,(0,\varepsilon),k]\subset l+U_2-\mathcal{Z}^+.$$

Тогда при всех $x\in U$ и $t\in(0,\varepsilon)$ будем иметь:
$$\Delta G\circ F(x,t,h)=t^{-1}[G(F(x)+t\Delta F(x,t,h))-G\circ F(x)]\in$$
$$\in t^{-1}\{G[F(x)+t(k+U_1-Y^+)]-G\circ F(x)\}\subset t^{-1}\{G[F(x)+$$
$$+t(k+U_1)]-G\circ F(x)\}-\mathcal{Z}^+\subset\Delta G(F(x),t,k)+\Delta_k G(F(x),t,k+U_1)-\mathcal{Z}^+.$$

Отсюда
$$\Delta G\circ F[U\times(0,\varepsilon)\times\{h\}\cap dom\,\Delta G\circ F]\subset l+U_2+\Delta_k G[F(x),t,k+U_1]-\mathcal{Z}^+,$$
и, обозначив $\mathcal{X}_3=\mathcal{X}_2+\Delta_k G(F(\mathcal{X}),\mathcal{V},k+\mathcal{X})$, получим
$$\Delta G\circ F(\mathcal{X},\mathcal{V},h)<l+\mathcal{X}_3-\mathcal{Z}^+.$$

Отсюда, привлекая предложение 4.I, заключаем, что $l\in T^*_{G\circ F,x}(h)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть Y и $\mathcal{Z}$ – псевдотопологические K-пространства, F регулярно в точке $\bar{x}\in dom F$, G возрастает и удовлетворяет условию Липшица в точке $\bar{y}=F(\bar{x})$. Если, кроме того, выполнено одно из следующих предположений:

а) отображение $G^\circ(\bar{y})$ (o)-непрерывно;

б) элемент $F^\circ(\bar{x})h \in T_{F,\bar{x}}(h)$ для всякого $h \in X$ такого, что $T_{F,\bar{x}}(h) \neq \emptyset$,

то имеет место формула

$$\partial(G\circ F)(\bar{x}) \in \bigcup_{A\in\partial G(\bar{y})} \partial(A\circ F^\circ(\bar{x})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что множество $T^*_{F,\bar{x}}(h)$ является решеткой. В самом деле, если $k_1, k_2 \in T^*_{F,\bar{x}}(h)$, а $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ – фильтры, подчиненные этими условиями паре $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, где $\mathcal{X}\downarrow\bar{x}$ и $\mathcal{Y}\downarrow_{F(\bar{x})}$, то фильтр $\mathcal{Q}_3$, порожденный базисом $\{\{k_1\wedge k_2 : k_1\in V_1, k_2\in V_2\} : V_1\in\mathcal{Q}_1, V_2\in\mathcal{Q}_2\}$, сходится к элементу $k_1\wedge k_2$ и подчинен той же паре фильтров условием $k_1\wedge k_2 \in T^*_{F,x}(h)$. Включение $k_1\vee k_2\in T_{F,\bar{x}}(h)$ тривиально (нам оно и не потребуется). Обозначим буквой $\mathcal{S}$ множество всех точных нижних границ непустых конечных подмножеств $T_{F,\bar{x}}(h)$, т.е.

$$\mathcal{S}=\{k_1\wedge\ldots\wedge k_n : k_i\in T_{F,\bar{x}}(h),\ i=1,\ldots,n;\ n\in N\}.$$

Тогда по предыдущей теореме, учитывая непрерывность оператора $G^\circ(\bar{y})$, для всех $k\in\mathcal{S}$ получаем

$$(G\circ F)^\circ(\bar{x})h \leq G^\circ(\bar{y})k,\quad k\in\mathcal{S}.$$

Но $\mathcal{S}$ – нижняя полурешетка, а $G^\circ(\bar{y})$ (o)-непрерывно и, следовательно,

$$\inf G(\bar{y})[\mathcal{S}] = (o)\lim G^\circ(\bar{y})[\mathcal{S}] = G^\circ(\bar{y})((o)\text{-}\lim\mathcal{S}) = G^\circ(\bar{y})\circ F^\circ(\bar{x})h.$$

Таким образом,

$$(G\circ F)^\circ(\bar{x})h \leq G(\bar{y})\circ F(\bar{x})h,\quad h\in X.$$

Если выполнено б), то это неравенство выполнено очевидным образом и осталось сослаться на теорему Кутателадзе.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Если условие б) выполнено только для какого-то $h_0\in X$, то имеет место неравенство

$$(G\circ F)^\circ(\bar{x})h_0 \leq G^\circ(\bar{y})\circ F^\circ(\bar{x})h_0.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть отображения $F_1,\ldots,F_n : X\to Y\cup\{+\infty\}$ регулярны в точке $\bar{x}\in X$. Если конусы $\operatorname{dom} F_1^\circ(x),\ldots,\operatorname{dom} F_n^\circ(\bar{x})$ находятся в общем положении, то имеют место формулы

$$\partial(F_1\vee\ldots\vee F_n)(\bar{x})\subset \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma(\bar{x})}\{\partial(\alpha_1\circ F_1^\circ(\bar{x}))+\ldots+\partial(\alpha_n\circ F_n^\circ(\bar{x}))\},$$

$$\partial(F_1\wedge\ldots\wedge F_n)(\bar{x})\subset \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Lambda(\bar{x})}\{\partial(\alpha_1\circ F_1^\circ(\bar{x}))+\ldots+\partial(\alpha_n\circ F_n^\circ(\bar{x}))\},$$

где объединения берутся по следующим множествам:

$$\Gamma(\bar{x})=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Lambda(Y)^n:\sum_{j=1}^n\alpha_j=I_Y,\sum_{j=1}^n\alpha_j\circ F_j(\bar{x})=\sup\{F_j(\bar{x}_j):j=1,\ldots,n\}\},$$

$$\Lambda(\bar{x})=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Lambda(Y)^n:\sum_{j=1}^n\alpha_j=I_Y,\sum_{j=1}^n\alpha_j\circ F_j(\bar{x})=\inf\{F_j(\bar{x}),j=1,\ldots,n\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если обозначить $\Phi:X\to Y^n\cup\{+\infty\}$

$$\Phi:x\longmapsto\begin{cases}(F_1(x),\ldots,F_n(x)) & \text{, если } x\in\bigcap_{j=1}^n \mathrm{dom}\,F_j,\\ +\infty & \text{, если } x\notin\bigcap_{j=1}^n \mathrm{dom}\,F_j,\end{cases}$$

то $F_1\vee\ldots\vee F_n=\varepsilon_n\circ\Phi,\ F_1\wedge\ldots\wedge F_n=\delta_n\circ\Phi$, и в силу следствия 4.4

$$\partial(\varepsilon_n\circ\Phi)(\bar{x})\subset\bigcup_{\alpha\in\partial\varepsilon_n(\Phi(\bar{x}))}\partial(\alpha\circ\Phi^\circ(\bar{x}));\ \partial(\delta_n\circ\Phi)(\bar{x})\subset\bigcup_{\alpha\in\partial\delta_n(\Phi(\bar{x}))}\partial(\alpha\circ\Phi^\circ(\bar{x})).$$

Теперь наше утверждение следует из явного вида субдифференциалов $\partial\varepsilon_n(\Phi(\bar{x}))$ и $\partial\delta_n(\Phi(\bar{x}))$ и из теоремы 4.3.

В связи с условием б) из следствия 4.5 введем следующее определение. Отображение $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ называется правильным по направлению $h\in X$, если либо $T_{F,\bar{x}}(h)=\emptyset$, либо $F^\circ(\bar{x})h\in T_{F,\bar{x}}(h)$. Как было показано выше, $F^\circ(\bar{x})h=(0)\lim T_{F,\bar{x}}(h)$ для всякого квазирегулярного в точке $\bar{x}$ отображения F. Следовательно, если в Y выполнено условие (A) (в Y выполняется условие (A) в том и только в том случае, если (0)-сходящиеся к нулю фильтры сходятся к нулю в псевдотопологии пространства Y), то каждый квазирегулярный оператор правилен по направлениям. В частности, если в K-пространстве образов выполняется условие (A), то правильным по направлениям является любое локально-липшицево или компактно-липшицево отображение, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть при $i=1,\ldots,n$ отображения $F_i:X\to Y_i\cup\{+\infty\}$ квазирегулярны в точке $\bar{x}\in X$, $Y=Y_1\times\ldots\times Y_n$, и $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ определяются так:

$$F: x \longrightarrow \begin{cases} (F_1(x), \dots, F_n(x)), \text{ е с л и } x \in \bigcap_{i=1}^{n} dom\, F_i, \\ +\infty \quad, \text{ е с л и } x \notin \bigcap_{i=1}^{n} dom\, F_i. \end{cases}$$

Т о г д а

$$\partial F(\bar{x}) \subset \{A \in \mathcal{L}(X, Y) : pr_{Y_i} \circ A \in \partial F_i(\bar{x}),\ i = 1, \dots, n\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартными рассуждениями показывается, что если $k_i \in T^*_{F_i, \bar{x}}(h)$, $i = 1, \dots, n$, то $(k_1, \dots, k_n) \in T^*_{F, \bar{x}}(h)$, и, следовательно, $A \in \partial F(\bar{x})$ влечет справедливость неравенства $Ah \leq (k_1, \dots, k_n)$ для всех $k_i \in T^*_{F_i, \bar{x}}(h)$, $i = 1, \dots, n$. Это означает, что

$$A \in \partial [F_1^\circ(\bar{x}), \dots, F_n^\circ(\bar{x})] = \{(A_1, \dots, A_n) : A_i \in \partial F_i(\bar{x}), i = 1, \dots, n\},$$

а это и требовалось доказать.

Предположим, что Y – упорядоченное топологическое векторное пространство, $\mathfrak{A}$ – равностепенно непрерывное множество положительных функционалов на Y и отображение $F: X \longrightarrow Y \cup \{+\infty\}$ непрерывно в точке $\bar{x}$. Обозначим: $\ell^\infty(\mathfrak{A})$ – пространство $(R^{\mathfrak{A}})_\infty$, снабженное нормой супремума, $\Phi = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ F_{\mathfrak{A}}$, где $F_{\mathfrak{A}} = [\mathfrak{A}] \circ F$, а $[\mathfrak{A}]: X \longrightarrow \ell^\infty(\mathfrak{A})$ определяется формулой

$$[\mathfrak{A}] : x \longrightarrow \{(\mu, x)\}_{\mu \in \mathfrak{A}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. При выполнении приведенных выше предложений имеет место включение

$$T^*_{F_{\mathfrak{A}}, \bar{x}}(h) \supset \{[\mathfrak{A}]k : k \in T^*_{F, \bar{x}}(h)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X} \downarrow_{\bar{x}}$, $F(\mathfrak{X}) \downarrow_{F(\bar{x})}$ и $\mathcal{V}$ – фильтр окрестностей нуля в Y. Тогда для $k \in T^*_{F, \bar{x}}(h)$ имеем

$$\Delta F(\mathfrak{X}, \mathcal{T}, h) < k + \mathcal{V} - Y^+,$$

а следовательно, верно и соотношение

$$[\mathfrak{A}] \circ \Delta F(\mathfrak{X}, \mathcal{T}, h) < [\mathfrak{A}]k + [\mathfrak{A}]\mathcal{V} - \ell^\infty(\mathfrak{A})^+.$$

Учитывая при этом, что $[\mathfrak{A}] \circ \Delta F = \Delta F_{\mathfrak{A}}$ и $[\mathfrak{A}](\mathcal{V}) \downarrow_0$, получим $[\mathfrak{A}]k \in T^*_{F_{\mathfrak{A}}, \bar{x}}(h)$, что и требовалось установить.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. Если выполнены все условия предложения 4.9 и, кроме того, F квазирегулярно и правильно по направлениям в точке $\bar{x}$, то

$$\partial\Phi(\bar{x}) \subset \bigcup_{\alpha\in\partial\mathcal{X}_{\mathcal{O}}(F_{\mathcal{O}}(\bar{x}))} \partial(\alpha\circ[\mathcal{O}]\circ F^{\circ}(\bar{x})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу правильности F и по предыдущему предложению имеем $F^{\circ}_{\mathcal{O}}(\bar{x}) \leq [\mathcal{O}]\circ F^{\circ}(\bar{x})$; остается применить следствие 4.5.

Приведем без доказательства еще два следующих результата.

Отображение $G: Y \to \mathcal{Z}\cup\{+\infty\}$ называется субдифференцируемым в точке $\bar{y}$ равномерно на множестве $M\subset Y$, если для любого фильтра $\mathcal{Y}\downarrow\bar{y}$ найдется фильтр $\mathcal{Q}\downarrow\mathcal{Z}$ такой, что

$$\Delta G(\mathcal{Y}, \mathcal{V}, M) < G^{\circ}(\bar{y})[M] + \mathcal{Q} - \mathcal{Z}^{+}.$$

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть Y и $\mathcal{Z}$ – псевдотопологические K-пространства и выполнены следующие условия:

1) пространство Y локально-телесно;

2) отображения $F: X\to Y$ и $G: Y\to\mathcal{Z}$ липшицевы и правильны по направлениям в точках $\bar{x}\in X$ и $\bar{y}=F(\bar{x})$ соответственно;

3) для любого $h\in X$ отображение G субдифференцируемо в точке $\bar{y}$ равномерно на сегменте $[-F^{\circ}(\bar{x})(-h), F^{\circ}(\bar{x})h]$.

Тогда имеют место следующие равносильные соотношения:

$$(G\circ F)^{\circ}(\bar{x})h \leq \sup\{G^{\circ}(\bar{y})k : k\in[-F^{\circ}(\bar{x})(-h), F^{\circ}(\bar{x})h], h\in X;$$

$$\partial(G\circ F)(\bar{x}) \subset \operatorname{cop}\{\partial G(\bar{y})\circ\partial F(\bar{x})\}.$$

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть X и X_1 – псевдотопологические векторные пространства, Y – псевдотопологическое K-пространство, $F: X\to Y\cup\{+\infty\}$ – отображение, полунепрерывное снизу в точке $\bar{x}$, $B: X_1\to X$ – непрерывный аффинный оператор и $\bar{x}=B\bar{x}_1$. Тогда

$$T_{F\circ B,\bar{x}_1}(h) \supset T^{*}_{F,\bar{x}}(\bar{B}h), \quad h\in X,$$

где $\bar{B}$ – линейный оператор, ассоциированный с B.

Если, кроме того, F квазирегул я р н о , т о $\partial(F\circ B)(\bar{x}_1)\subset\partial[F^{\circ}(\bar{x})\circ\bar{B}]$.

§5. Необходимые условия экстремума

В этом параграфе мы применим полученные в первой главе формулы субдифференцирования для нахождения необходимых условий оптимальности в многоцелевых экстремальных задачах с невыпуклыми и негладкими целями и ограничениями.

Пусть X и X_1 – псевдотопологические векторные пространства, Y и $\mathcal{Z}$ – упорядоченные псевдотопологические векторные пространства, M – подмножество X, $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$; $G:X\to\mathcal{Z}\cup\{+\infty\}$ и $H:X\to X_1$ – некоторые отображения. Следуя [5], упорядоченный набор (M,G,H,F) будем называть задачей векторной оптимизации и записывать символически:

$$x\in M,\ G(x)(\leq 0)\in\mathcal{Z}^+,\ H(x)=0,\ F(x)\to\inf. \qquad (P)$$

Множество $U=M\cap\{x\in X: G(x)(\leq 0)\notin\mathcal{Z}^+\setminus\{0\}\}\cap\{x\in X: H(x)=0\}$ называется допустимым, F – целью, M,G и H – ограничениями задачи.

Элемент $\bar{x}\in U$ называется (локальным) идеальным оптимумом (оптимумом по Парето) задачи (P), если $F(\bar{x})$ – наименьший (соответственно минимальный) элемент множества $F[U\cap V]$ для некоторой окрестности V точки $\bar{x}$. Иными словами, $\bar{x}$ – идеальный оптимум (оптимум по Парето), если и только если $F(\bar{x})\leq F(x)$ $(F(x)\notin F(\bar{x})-(Y^+\setminus\{0\}))$ при $x\in U\cap V$.

Особую роль для задач векторной оптимизации играет обобщенное решение, введенное в [5]. Множество $\theta=\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\}\subset U$ называется обобщенным решение задачи $[P]$, если существует такая окрестность нуля V, что $F(\bar{x}_1)\wedge\ldots\wedge F(\bar{x}_n)\leq F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n)$ для всех $x_i\in(\bar{x}_i+V)\cap U$, $i=1,\ldots,n$.

Определим контингентный конус $K(M;\bar{x})$ к множеству $M\subset X$ в точке $\bar{x}$. Элемент $h\in K(M;x)$ в том и только в том случае, если существует фильтр $\mathcal{X}\downarrow_h X$ такой, что $[\bar{x}+(0,\varepsilon)\cdot V]\cap M\neq\emptyset$ для всех $V\in\mathcal{X}$ и $\varepsilon>0$.

Рассмотрим сначала задачу безусловной оптимизации $F(x)\to\inf$, т.е. $M=X, G=\delta_{\mathcal{Z}}(X)$ и $H\equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I. Если элемент $\bar{x}$ является идеальным оптимумом задачи $F(x)\to\inf$, то $0\in\partial F(\bar{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $k \in T_{F,\bar{x}}^{*}(h)$, и найдем пару фильтров $(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$, $\mathcal{U} \downarrow_h$, $\mathcal{Q} \downarrow_k$, подчиненную паре $([\bar{x}], [F(\bar{x})])$ этим условием. Каждый элемент V фильтра $\mathcal{Q}$ имеет непустое пересечение с конусом Y^+, так как для некоторого $U \subset \mathcal{U}$ при достаточно малых t имеем $\Delta F[x,t,U] \subset Y^+$, а с другой стороны, по определению существуют такие $h(t) \in U$, $k(t) \in V$, что $\Delta F(\bar{x},t,h(t)) \leq k(t)$. Следовательно, $k \geq 0$ и в силу произвольности $h \in X$ и $k \in T_{F,\bar{x}}(h)$ получаем

$$T_{F,\bar{x}}(h) \subset Y^+ \cup \{+\infty\}, \; h \in X.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Допустим, что $\bar{x}$ является локальным оптимумом в задаче $F(x) \to sup$, т.е. $F(x) \leq F(\bar{x})$ для всех x на некоторой окрестности точки $\bar{x}$. Если при этом для всякого h выполняется $cl\, T_{F,\bar{x}}^{*}(h) \supset T_{F,\bar{x}}(h)$, то $0 \in \partial F(\bar{x})$.

Действительно, в этом случае $\bar{x}$ является идеальным оптимумом в задаче $-F(x) \to inf$ и по предложению 5.I $T_{-F,\bar{x}}(h) \subset Y^+$. Но $T_{-F,\bar{x}}^{*} = T_{F,\bar{x}}^{*}(-h)$ и, следовательно, $T_{F,\bar{x}}^{*}(h) \subset Y^+$, а так как Y^+ замкнут, получим $T_{F,\bar{x}}(h) \subset Y^+$, т.е. $0 \in \partial F(\bar{x})$.

В дальнейшем Y - псевдотопологическое K-пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть отображения $F_1,\dots,F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ регулярны в точке $\bar{x} \in X$, конусы $dom\, F_1^{\circ}(\bar{x}),\dots, dom\, F_n^{\circ}(\bar{x})$ находятся в общем положении и $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче $F_1 \vee \dots \vee F_n \to inf$. Тогда найдутся такие $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \Lambda(Y)$, что

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_Y;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \circ F_j(\bar{x}) = F_1(\bar{x}) \vee \dots \vee F_n(\bar{x});$$

$$0 \in \partial(\alpha_1 \circ F_1^{\circ}(\bar{x})) + \dots + \partial(\alpha_n \circ F_n^{\circ}(\bar{x})).$$

Доказательство вытекает из предложения 5.I и следствия 4.7.

Обозначим $\Delta_h F(x,t,v) = t^{-1}[F(x+tv) - F(x+th)]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть $M \subset X$, $x \in M$, $F : X \to Y \cup \{+\infty\}$ - квазирегулярное отображение и $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче $x \in M$, $F(x) \to inf$. Предположим, что для некоторого $h \in K(M;\bar{x})$ и для всех $\mathcal{U} \downarrow h$ имеет место соотношение

$$\Delta_h F(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U}) \downarrow Y. \qquad (2)$$

Тогда $F^\circ(\bar{x})h \geq 0$. Если $C \subset K(M;\bar{x})$ — выпуклый конус, находящийся в общем положении с конусом $dom\, F^\circ(\bar{x})$ и условие (2) выполнено при $h \in C$, то

$$0 \in \partial F(\bar{x}) + \mathcal{R}_Y(C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения эквивалентна справедливости включения $T_{F,\bar{x}}(h) \subset Y^+ \cup \{+\infty\}$.
Если $h \in K(M;\bar{x})$ и $k \in T^*_{F,\bar{x}}(h)$, то для некоторого фильтра $\mathcal{Q} \nmid_k Y$ будем иметь

$$\Delta F(\bar{x}, \mathcal{V}; h) < \mathcal{Q} - Y^+.$$

Пусть фильтр $\mathcal{U} \nmid_h X$ обеспечивает условие $h \in K(M;\bar{x})$, и обозначим $\mathcal{Q}_1 = \Delta_h F(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U})$. Для произвольных $V \in \mathcal{Q}$ и $V_1 \in \mathcal{Q}_1$ найдем такие $\varepsilon > 0$ и $U \in \mathcal{U}$, что

$$\Delta F[\bar{x}, (0,\varepsilon), h] \subset V - Y^+ \quad \text{и} \quad \Delta_h F[\bar{x}_1, (0,\varepsilon), U] \subset V_1.$$

Тогда

$$\Delta F[\bar{x}, (0,\varepsilon), U] \subset \Delta F[\bar{x}, (0,\varepsilon), h] + \Delta_h F[\bar{x}, (0,\varepsilon), U] \subset V + V_1 - Y^+.$$

Так как $[\bar{x} + (0,\varepsilon)\cdot U] \cap M \neq \emptyset$, можно выбрать $t \in (0,\varepsilon)$ и $u \in U$ так, чтобы $\bar{x} + tu \in M$. Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $U \in \mathcal{U}$ имеем $\Delta F(\bar{x}, t, u) \in Y^+$, а это обеспечивает справедливость следующих соотношений:

$$(V + V_1 - Y^+) \cap Y^+ \neq \emptyset \Longrightarrow (V_1 + V) \cap Y^+ \neq \emptyset$$

при всех $V \in \mathcal{Q}$ и $V_1 \in \mathcal{Q}_1$. Это означает, что совокупность множеств $\{V \cap Y^+ : V \in \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}\}$ образует базис фильтра, сходящегося к k, поэтому $k \geq 0$. Вторая часть утверждения вытекает из теоремы 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть F, M и $\bar{x}$ такие же, как и в предложении 5.4. Если конусы $dom\, F^\circ(\bar{x})$ и $T(M;\bar{x})$ находятся в общем положении, то

$$0 \in \partial F(\bar{x}) + N_Y(M;\bar{x}).$$

Доказательство вытекает из предложения 5.4, если заметить, что конус $T(M;\bar{x})$ содержится в контингентном конусе $K(M;\bar{x})$.

Можно избавиться от условия (2), если вместо конуса $T(M;\bar{x})$ использовать конус равномерных касательных $T^*(M;\bar{x})$. Обозначим $N^*_Y(M;\bar{x}) = \mathcal{R}_Y(T^*(M;\bar{x}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть $M \subset X$, $\bar{x} \in M$, отображение F квазирегулярно в точке $\bar{x}$ и конусы $\mathrm{dom}\, F^{\circ}(\bar{x})$ и $T^*(M;\bar{x})$ находятся в общем положении. Тогда если $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче $x \in M$, $F(x) \to \inf$, то

$$0 \in \partial F(\bar{x}) + N_Y^*(M;\bar{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h \in T^*(M;\bar{x})$ и $k \in T^*_{F,\bar{x}}(h)$, то для некоторого фильтра $\mathcal{Q} \uparrow_k$ будем иметь

$$\Delta F(\bar{x}, \mathcal{V}, h) \prec \mathcal{Q} + Y^+,$$

и так как при достаточно малых $t > 0$ выполняется $\Delta F(\bar{x},t,h) \in Y^+$, получаем, что $\mathcal{Q} \cap Y^+ \uparrow_k$, т.е. $k \geq 0$ и $0 \in \partial[F^{\circ}(\bar{x}) + \delta_Y(T^*(M;\bar{x}))]$.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть отображения $F, G: X \to Y \cup \{+\infty\}$ регулярны в точке $\bar{x} \in M$ и выполнены условия:

1) конусы $\mathrm{dom}\, F^{\circ}(\bar{x})$ и $\mathrm{dom}\, G^{\circ}(\bar{x})$ находятся в общем положении;

2) $\Delta_h F(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U}) \uparrow Y$ и $\Delta G(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U}) \uparrow Y$ для любых $h \in T(M;\bar{x})$ и $\mathcal{U} \uparrow_h X$.

Если $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче $x \in M$, $G(x) \notin Y^+ \setminus \{0\}$, $F(x) \to \inf$, а конусы $\mathrm{dom}\, F^{\circ}(\bar{x}) \cap \mathrm{dom}\, G^{\circ}(\bar{x})$ и $T(M;\bar{x})$ находятся в общем положении, то найдутся такие $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Lambda(Y)$, что

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y;$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha} \circ F^{\circ}(\bar{x})) + \partial(\bar{\beta} \circ G^{\circ}(\bar{x})) + N_Y(M;\bar{x});$$

$$\bar{\beta} \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Если, кроме того, для некоторого $h_0 \in (M;\bar{x})$ элемент $\ell = -G^{\circ}(\bar{x})h_0$ является единицей в Y, то $\mathrm{Ker}(\bar{\alpha}) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены условия теоремы, то точка $\bar{x}$ является решением задачи векторной оптимизации $x \in M$, $\Phi(x) \to \inf$, где отображение $\Phi: X \to Y \cup \{+\infty\}$, называемое штрафом Иоффе, определяется равенством:

$$\Phi(x) = [F(x) - F(\bar{x})] \vee G(x), \quad x \in X.$$

В самом деле, если x - допустимый элемент, то $F(x) \geq F(\bar{x})$ и, следовательно, $\Phi(x) \geq 0$; если же x не является допустимой точкой, то $G(x) \geq 0$ и опять $\Phi(x) \geq 0$.

Таким образом, по предложению 5.5 имеет место включение

$$0 \in \partial \Phi(\bar{x}) + N_Y(M; \bar{x}).$$

Произведя субдифференцирование, найдем мультипликаторы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ со свойствами:

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y;$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha} \circ F^\circ(\bar{x})) + \partial(\bar{\beta} \circ G^\circ(\bar{x})) + N_Y(M; \bar{x});$$

$$\Phi(\bar{x}) = \bar{\alpha}[F(\bar{x}) - F(\bar{x})] + \bar{\beta} \circ G(\bar{x}).$$

Отсюда непосредственно вытекают требуемые условия.

Покажем теперь, что ядро мультипликатора $\bar{\alpha}$ нулевое. Так как $Ker(\bar{\alpha})$ является компонентой, последнее равносильно тому, что оператор проектирования q на эту компоненту тождественно равен нулю. Из установленных условий оптимальности следует, что

$$0 \leq \bar{\alpha} \circ F^\circ(\bar{x}) h_0 + \bar{\beta} \circ G^\circ(\bar{x}) h_0 + \delta_Y(T(M; \bar{x})) h_0,$$

и далее, учитывая равенства $q \circ \bar{\alpha} = \alpha \circ \bar{q} = 0$, $q \circ \bar{\beta} = \bar{\beta} \circ q$, получаем

$$0 \leq q[\bar{\alpha} \circ F^\circ(\bar{x}) + \bar{\beta} \circ G^\circ(\bar{x})] h_0 = q \circ \bar{\beta} \circ G^\circ(\bar{x}) h_0 \leq -q(e).$$

Это возможно лишь в том случае, когда $q = 0$.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть отображение $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ регулярно в точках $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ и, кроме того, при $i = 1, \ldots, n$ выполнены условия:

1) $\Delta_h F(\bar{x}_i, V, \mathcal{Y}) \nmid Y$ для любых $h \in T(M; \bar{x})$ и $\mathcal{Y} \nmid hX$;

2) конусы $dom\, F^\circ(\bar{x}_i)$ и $T(M; \bar{x}_i)$ находятся в общем положении. Если при этом $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ - обобщенное решение задачи $x \in M$, $F(x) \to inf$, то найдутся такие мультипликаторы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$, что

$$\bar{\alpha}_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n = I_Y;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j \circ F(\bar{x}_j) = F(\bar{x}_1) \wedge \ldots \wedge F(\bar{x}_n);$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha}_j \circ F^\circ(\bar{x}_j)) + N(M; \bar{x}_j), \; j = 1, \ldots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\Phi : X \to Y \cup \{+\infty\}$, $\Phi = \delta_n \circ [F]_n$, где $[F]_n : X^n \to Y^n \cup \{+\infty\}$ определяется равенством

$$[F]_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} (F(x_1),\dots,F(x_n)), & \text{если } (x_1,\dots,x_n) \in (\operatorname{dom} F)^n \\ +\infty, & \text{если } (x_1,\dots,x_n) \notin (\operatorname{dom} F)^n. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть V - окрестность нуля в X и $F(\bar{x}_1) \wedge \dots \wedge F(\bar{x}_n) \le F(x_1) \wedge \dots \wedge F(x_n)$ для всех $x_i \in (x_i + V) \cap M$, $i = 1,\dots,n$. Тогда $\Phi(\bar{\theta}) \le \Phi(\theta)$ при $\theta = (x_1,\dots,x_n) \in (\bar{\theta} + V^n) \cap M^n$, где $\bar{\theta} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$, и, стало быть, $\bar{\theta}$ - идеальный оптимум в задаче $\theta \in M^n, \Phi(\theta) \to \inf$. Из условий теоремы и из соотношений

$$|\Phi(\theta + t\eta) - \Phi(\theta + t\bar{\eta})| \le \varepsilon_n \| [F]_n(\theta + t\eta) - [F]_n(\theta + t\bar{\eta}) \|$$

вытекает, что если $\eta \in T(M^n; \bar{\theta})$ и $\mathcal{U}_y \downarrow_\eta X^n$, то

$$\Delta_\eta \Phi(\bar{\theta}, \mathcal{V}, \mathcal{U}_y) \downarrow Y.$$

Кроме того, конусы $\operatorname{dom} \Phi^\circ(\bar{\theta})$ и $T(M^n; \bar{\theta})$ находятся в общем положении в силу предложения 3.3. Следовательно, по следствию 5.4

$$0 \in \partial\Phi(\bar{\theta}) + N_Y(M^n; \bar{\theta}) = \partial\Phi(\bar{\theta}) + \prod_{j=1}^{n} N_Y(M; \bar{x}_j).$$

Осталось посчитать субдифференциал $\partial\Phi(\bar{\theta})$. Используя регулярность F в точках $\bar{x}_i$, в силу следствия 4.7 получим

$$\partial\Phi(\bar{\theta}) \subset \partial(\delta_n \circ [F]_n)(\bar{\theta}) \subset \bigcup_{\alpha \in \partial(\delta_n([F]_n(\bar{\theta})))} \partial(\alpha \circ [F]_n^\circ(\bar{\theta})) \subset$$

$$\subset \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Lambda(\bar{\theta})} \partial(\alpha_1 \circ F^\circ(\bar{x}_1)) \times \dots \times \partial(\alpha_n \circ F^\circ(\bar{x}_n)),$$

где объединение берется по следующему множеству:

$$\Lambda(\bar{\theta}) = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Lambda(Y^n);\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_Y,$$

$$\alpha_1 \circ F(\bar{x}_1) + \dots + \alpha_n \circ F(\bar{x}_n) = F(\bar{x}_1) \wedge \dots \wedge F(\bar{x}_n)\}.$$

Таким образом,

$$(0,\dots,0) \in \prod_{j=1}^{n} \Big[\bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Lambda(\bar{\theta})} \partial(\alpha_j \circ F^\circ(\bar{x}_j)) + N_Y(M; \bar{x}_j) \Big],$$

и отсюда вытекает существование требуемых мультипликаторов.

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть при $i = 1,\dots,n$ выполнены условия:

1) отображения F и $G: X \to Y \cup \{+\infty\}$ регулярны в точках $\bar{x}_i \in M \subset X$ и $G[X] \subset Y^+ \cup -Y^+$;

2) конусы $dom F_\circ(\bar{x}_i)$ и $dom\, G^\circ(\bar{x}_i)$, а также конусы $T(M;\bar{x}_i)$ и $dom\, F^\circ(\bar{x}_i) \cap dom\, G^\circ(\bar{x}_i)$ находятся в общем положении;

3) $\Delta_h G(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U}_y) \nmid Y$ и $\Delta_h F(\bar{x}, \mathcal{V}, \mathcal{U}_y) \nmid Y$ для любых $h \in T(M;\bar{x}_i)$ и $\mathcal{U}_y \nmid_h X$.

Далее, пусть множество $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ - обобщенное решение задачи $x \in M, G(x) \leq \leq 0, F(x) \to \inf$. Тогда найдутся такие мультипликаторы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}$, что

$$\bar{\alpha}_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n + \bar{\beta}_1 + \ldots + \bar{\beta}_n = I_Y;$$

$$\bar{\alpha} \circ F(\bar{x}_1) + \ldots + \bar{\alpha}_n \circ F(\bar{x}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j\right) F(\bar{x}_1) \wedge \ldots \wedge F(\bar{x}_n);$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha}_i \circ F^\circ(\bar{x}_i)) + \partial(\bar{\beta}_i \circ G^\circ(\bar{x}_i)) + N_Y(M;\bar{x}_i);$$

$$\bar{\beta}_i \circ G(\bar{x}_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ - обобщенное решение рассматриваемой задачи, то вектор $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ является идеальным оптимумом в задаче $\theta \in M^n, \varepsilon_n \circ [G]_n(\theta) \leq 0, \varphi(\theta) \to \inf$, где $\varphi = \delta_n \circ [F]$, а $[F]_n$ и $[G]_n$ определяются по формуле (3). Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, пользуясь предложением 3.3 и следствием 5.4, показывается, что применима теорема 5.7 и, следовательно, существуют мультипликаторы α и β, $\alpha + \beta = I_Y$, обеспечивающие справедливость следующих соотношений:

$$0 \in \partial(\alpha \circ \varphi^\circ(\bar{\theta})) + \partial(\beta \circ (\varepsilon_n \circ [G]_n^\circ(\bar{\theta})) + N_Y(M^n;\bar{\theta});$$

$$\beta \circ \delta_n \circ [G]_n(\bar{\theta}) = 0.$$

В силу следствия 5.7 имеют место формулы:

$$\partial(\alpha \circ (\delta_n \circ [F]_n)^\circ(\bar{\theta})) \subset \bigcup_{\alpha' \in \partial(\alpha \circ \delta_n)([F]_n(\bar{\theta}))} \partial(\alpha' \circ [F]_n^\circ(\bar{\theta})),$$

$$\partial(\beta \circ (\varepsilon_n \circ [G]_n)^\circ(\bar{\theta})) \subset \bigcup_{\beta' \in \partial(\beta \circ \varepsilon_n)([G]_n(\bar{\theta}))} \partial(\beta' \circ [G]_n^\circ(\bar{\theta})).$$

Отсюда вытекает существование мультипликаторов $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$, $\beta'_1, \ldots, \beta'_n$, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha_1' + \ldots + \alpha_n' = \beta_1' + \ldots \beta_n' = I_Y;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \circ F(\bar{x}_i) = F(\bar{x}_1) \wedge \ldots \wedge F(\bar{x}_n); \sum \beta_i' \circ G(\bar{x}_i) = G(\bar{x}_1) \vee \ldots \vee G(\bar{x}_n);$$

$$0 \in \partial(\alpha \circ \alpha_i' \circ F^\circ(\bar{x}_i)) + \partial(\beta \circ \beta_i' \circ G^\circ(\bar{x}_i)) + N_Y(M; \bar{x}_i), \ i = 1, \ldots, n.$$

Теперь уже очевидно, что $\bar{\alpha}_i = \alpha \circ \alpha_i'$, $\bar{\beta}_i = \beta \circ \beta_i'$, $i = 1, \ldots, n$, - искомые мультипликаторы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Если выполнены условия теоремы 5.9 и, кроме того, при некоторых $h_i \in T(M; \bar{x}_i)$ элементы $\ell_i = -G^\circ(\bar{x}_i)$ являются единицами в Y, то $Ker(\bar{\alpha}_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. В самом деле, из субдифференциальных включений в необходимых условиях обобщенного оптимума следует, что

$$0 \leq q_i [\bar{\alpha}_i \circ F^\circ(\bar{x}_i) + \bar{\beta}_i \circ G^\circ(\bar{x}_i)] h_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

где q_i - оператор проектирования на компоненту $Ker(\bar{\alpha}_i)$, и так же, как и в теореме 5.7, получаем $q_i = 0$.

Предположим, что выполнено более слабое условие: элемент $e = -G^\circ(\bar{x}_k) h$ - единица в Y для некоторых $\bar{x}_k \in \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ и $h \in T(M; \bar{x}_k)$. Тогда для элемента $v = (0, \ldots, h, \ldots, 0)$, где h стоит на k-м месте, имеем $-\delta_n \circ [G]_n^\circ(\bar{\theta}) v = \varepsilon_n \circ -[G]_n^\circ(\bar{\theta}) v = e$, и потому, используя обозначения доказательства предыдущей теоремы, получим

$$0 \leq q[\alpha \circ \varPhi^\circ(\bar{\theta}) v + \beta \circ (\varepsilon_n \circ [G]_n)^\circ(\bar{\theta}) v] \leq q(e),$$

где q - оператор проектирования на компоненту $Ker(\alpha)$, и опять так же, как и в теореме 5.7, получаем $q = 0$. Следовательно, $Ker\, \alpha = Ker(\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j) = \{0\}$.

§6. Метод скаляризации. Необходимые условия оптимальности по Парето

Предположим, что в задаче на оптимум имеется ограничение вида $G(x) \leq 0$ вместо ограничения $Gx \notin Y^+$. Тогда результаты предыдущего параграфа позволяют вывести необходимые условия оптимальности в том случае, если отображение G действует в пространство Y и принимает только положительные и отрицательные значения, т.е. $G[X] \subset Y^+ \cup -Y^+$. Для получения необходимых условий экстремума в общем случае используется метод скаляризации (см.[5]).

Всюду в этом параграфе $\mathcal{Z}$ - упорядоченное топологическое векторное пространство, причем существует равностепенно непрерывное множество положительных функционалов $\mathfrak{A}$, выделяющее конус $\mathcal{Z}^+$. Иными словами, элемент $z \in \mathcal{Z}$ положителен в том и только том случае, если $\langle \lambda, z \rangle \geqslant 0$ при всех $\lambda \in \mathfrak{A}$.

Приведем схему использования метода скаляризации. Простоты ради будем предполагать, что отображение G удовлетворяет условию Липшица.

ТЕОРЕМА 6.I. Пусть $\mathcal{Z}$ удовлетворяет приведенным выше условиям, $M \subset \mathcal{X}$ и выполнены следующие предположения:

I) отображение $F : \mathcal{X} \to Y \cup \{+\infty\}$ квазирегулярно в точке $\bar{x}$ и фильтр $\Delta_h F(\bar{x}, \mathcal{V}, h)$ сходится к нулю при $h \in T(M; \bar{x})$ и $\mathcal{X} \nmid_h X$;

2) отображение $G : X \to \mathcal{Z}$ липшицево и правильно по направлениям $h \in T(M; \bar{x})$ в точке $\bar{x}$;

3) конусы $dom F^{\circ}(\bar{x})$ и $T(M; \bar{x})$ находятся в общем положении. Если при этих условиях $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче

$$x \in M, \; Gx \leqslant 0, \quad F_x \to \inf,$$

то найдутся такие $\bar{\alpha} \in \Lambda(Y)$ и $\bar{\lambda} \in \mathcal{L}^+(\mathcal{Z}, Y)$, что

$$0 \in \partial(\bar{\alpha} \circ F^{\circ}(\bar{x})) + \partial(\bar{\lambda} \circ G^{\circ}(\bar{x})) + N_Y(M; \bar{x});$$

$$\bar{\alpha}[Y] + \bar{\lambda}[\mathcal{Z}] \neq \{0\}; \quad \bar{\lambda} \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Если, кроме того, Y обладает единицей и при некотором $h \in T(M; \bar{x})$ элемент $-G^{\circ}(\bar{x})h$ является единицей в $\mathcal{Z}$, то $Ker(\bar{\alpha}) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e - произвольный ненулевой элемент в Y^+. Рассмотрим отображения

$$G_{\mathfrak{A}} : X \to \ell^{\infty}(\mathfrak{A}), \; G_{\mathfrak{A}} : x \to \{\langle \lambda, G_x \rangle\}_{\lambda \in \mathfrak{A}};$$

$$\varepsilon \otimes e : \ell^{\infty}(\mathfrak{A}) \to Y, \varepsilon \otimes e : \{u_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathfrak{A}} \to \sup\{u_{\lambda} : \lambda \in \mathfrak{A}\} \cdot e.$$

Очевидно, что исходная задача эквивалентна следующей:

$$x\in M,\ \varepsilon \circledast e\circ G_{\mathfrak{A}}(x)\le 0,\ F_x\to \inf.$$

Так как отображение $\varepsilon\circledast e\circ G_{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию Липшица в точке $\bar{x}$, выполнены все условия теоремы 5.7 и, следовательно, найдутся $\bar{\alpha},\bar{\beta}\in\Lambda(Y)$ такие, что

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=I_Y;$$

$$0\in\partial(\bar{\alpha}\circ F^{\circ}(\bar{x}))+\partial(\bar{\beta}\circ(\varepsilon\circledast e\circ G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x}))+N_Y(M;\bar{x}), \tag{4}$$

$$\bar{\beta}\circ\varepsilon\circledast e\circ G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})=0.$$

Привлекая следствие 4.5, получаем

$$\partial(\bar{\beta}\circ(\varepsilon\circledast G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x}))=\bar{\beta}\circ\partial((\varepsilon\circledast G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x})\subset\bar{\beta}\circ\partial[(\varepsilon\circledast e)'(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})\circ[\mathfrak{A}]\circ$$

$$\circ\, G^{\circ}(\bar{x})]=\bar{\beta}\circ\bigcup_{\alpha\in\partial(\varepsilon\circledast e)(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}))}\partial(\alpha\circ[\mathfrak{A}]\circ G^{\circ}(\bar{x})).$$

При этом, как известно (см.[5]),

$$\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}\circledast e)(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}))=\{\alpha\in\mathcal{L}^+(\ell^\infty(\mathfrak{A}),Y):\alpha(\mathbb{1})=e\},$$

где $\mathbb{1}:\mathfrak{A}\to\mathbb{R}$ - функция, тождественно равная единице на $\mathfrak{A}$. Таким образом, для некоторого $\alpha\in\mathcal{L}^+(\ell^\infty_{(\mathfrak{A})},Y)$ будем иметь

$$0\in\partial(\bar{\alpha}\circ F^{\circ}(\bar{x}))+\bar{\beta}\circ\partial(\alpha\circ[\mathfrak{A}]\circ G^{\circ}(\bar{x}))+N_Y(M;\bar{x});$$

$$0=\bar{\beta}\circ(\varepsilon\circledast e)\circ G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})=\bar{\beta}\circ\alpha\circ[\mathfrak{A}]\circ G(\bar{x})=0.$$

Полагая $\bar{\lambda}=\bar{\beta}\circ\alpha\circ[\mathfrak{A}]$, получаем требуемые необходимые условия. Предположим, что $-G^{\circ}(\bar{x})h$ - единица в Z , e - единица в Y и q - проектор на компоненту $\operatorname{Ker}(\bar{\alpha})$. В силу соотношения (4) имеем

$$0\le q[\bar{\alpha}\circ F^{\circ}(\bar{x})h+\bar{\beta}\circ(\varepsilon\circledast e\circ G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x})h]\le q\circ(\varepsilon\circledast e\circ G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x})\le$$

$$\le q\circ\varepsilon\circledast e[\mathfrak{A}]G^{\circ}(\bar{x})h=-q(e)\cdot\sup\{\langle\lambda,-G^{\circ}(\bar{x})h\rangle:\lambda\in\mathfrak{A}\},$$

что возможно лишь при $q\equiv 0$. Теорема доказана.

Комбинируя приведенные рассуждения с теоремой 5.9, можно аналогично доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. Предположим, что при $i=1,\dots,n$ выполнены следующие условия:

1) $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ квазирегулярно, а $G:X\to Z$ липшицево и правильно по направлениям в точке $\bar{x}_i\in M\subset X$;

2) конусы $\operatorname{dom} F^0(\bar{x}_i)$ и $T(M;\bar{x}_i)$ находятся в общем положении;

3) $\Delta_h F(\bar{x}, Y, ^{\omega}\!y) \nmid Y$ при всех $h \in T(M;\bar{x}_i)$ и $^{\omega}\!y \nmid_h X$.

Пусть $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ - обобщенное решение задачи

$$x \in M,\ Gx \leq 0,\ Fx \to \inf.$$

Тогда найдутся такие $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \in \Lambda(Y)$ и $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n \in \mathcal{L}^+(Z, Y)$, не равные одновременно 0, что

$$\bar{\alpha}_1 \circ F(\bar{x}_1) + \dots + \bar{\alpha}_n \circ F(\bar{x}_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) \circ F(\bar{x}_1) \wedge \dots \wedge F(\bar{x}_n);$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha}_i \circ F^0(\bar{x}_i)) + \partial(\bar{\lambda}_i \circ G^0(\bar{x}_i)) = N_Y(M;\bar{x});$$

$$\bar{\lambda}_i \circ G(\bar{x}_i) = 0;\quad i = 1, \dots, n.$$

Методом скаляризации можно также получить необходимые условия оптимальности по Парето. Для этого предположим, что Y также является порядково-полным упорядоченным топологическим векторным пространством, находится в двойственности со своим сопряженным Y' и порядок в нем задается некоторым равностепенно непрерывным множеством функционалов $\mathcal{L} \subset Y'$, т.е. $y \geq 0$ в том и только в том случае, если $\langle \lambda, y \rangle \geq 0$ при $\lambda \in \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 6.3. Предположим, что Y и Z удовлетворяют приведенным выше условиям, а отображения $F: X \to Y$ и $G: X \to Z$ липшицевы и правильны по направлениям $h \in T(M;\bar{x})$ в точке $\bar{x} \in X$. Если при этих условиях $\bar{x}$ - оптимум по Парето в задаче

$$x \in M,\ Gx \leq 0,\ Fx \to \inf,$$

то найдутся такие непрерывные положительные функционалы λ и μ на пространствах Y и Z соответственно, что

$$0 \in \partial(\lambda \circ F^0(\bar{x})) + \partial(\mu \circ G^0(\bar{x})) + N_{\mathbb{R}}(M;\bar{x}); \tag{5}$$

$$\lambda[Y] + \mu[Z] \neq \{0\};\quad \mu \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Если, кроме того, при некоторых $h \in T(M;\bar{x})$ и $\varepsilon > 0$ выполнено $\langle \mu, -G^0(\bar{x})h \rangle \geq \varepsilon$ для всех $\mu \in \mathcal{L}$, то $\lambda \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\varepsilon_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}}$ и $\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}}$, где

$G_{\mathfrak{A}}: X \to \ell^\infty(\mathfrak{A})$ то же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, а $F_{\mathfrak{B}}: X \to \ell^\infty(\mathfrak{B})$ определяется формулой:

$$F_{\mathfrak{B}}: x \longrightarrow \{\langle \lambda, F_x - F_{\bar{x}} \rangle\}_{\lambda \in \mathfrak{B}}.$$

Рассматриваемая задача равносильна следующей:

$$x \in M, \; \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}}(x) \le 0, \; \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ F_{\mathfrak{B}} x \to \inf.$$

В самом деле, если $\bar{x}$ решает написанную скалярную задачу, то $\sup\limits_{\lambda \in \mathfrak{B}} \langle \lambda, F(x) - F(\bar{x}) \rangle \ge 0$ для всех x из пересечения допустимого множества U с окрестностью V точки $\bar{x}$. Иными словами, ни для какого $x \in U \cap V$ не может быть выполнено $F\bar{x} \geqslant Fx$. Обратно, если $F(\bar{x}) = \min F[V \cap U]$ и $x \in U \cap V$, то для некоторого $\lambda \in \mathfrak{B}$ имеем $\langle \lambda, F(\bar{x}) \rangle \le \langle \lambda, F(x) \rangle$, ибо в противном случае $F(\bar{x}) > F(x)$. Отсюда $0 = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ F_{\mathfrak{B}}(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in V \cap U} \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ F_{\mathfrak{B}}(x)$. Функции $\varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ F_{\mathfrak{B}}$ и $\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}}$ липшицевы в точке $\bar{x}$, и, стало быть, выполнены все условия теоремы 5.7. Таким образом, для некоторых положительных чисел α_1 и α_2 будем иметь:

$$0 \in \alpha_1 \partial(\varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ F_{\mathfrak{B}})^\circ(\bar{x})) + \alpha_2 \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ F_{\mathfrak{A}})(\bar{x}) + N_R(M; \bar{x});$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_2 \cdot \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}) = 0.$$

Выполняя субдифференцирование так же, как и при доказательстве теоремы 6.2, найдем такие $\bar{\alpha} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{B}}(F_{\mathfrak{B}}(\bar{x}))$ и $\bar{\beta} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}))$, что

$$0 \in \alpha_1 \partial(\bar{\alpha} \circ [\mathfrak{B}] \circ F^\circ(\bar{x})) + \alpha_2 \circ \partial(\bar{\beta} \circ [\mathfrak{A}] \circ G^\circ(\bar{x})) + N_R(M; \bar{x});$$

$$\alpha_2 \cdot \bar{\beta} \circ [\mathfrak{A}] \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Положим $\lambda = \alpha_1 \cdot \bar{\alpha} \circ [\mathfrak{B}]$ и $\mu = \alpha_2 \cdot \bar{\beta} \circ [\mathfrak{A}]$. Тогда $\mu \circ G(\bar{x}) = 0$ и приходим к нужным условиям. Если при некотором $h \in T(M; \bar{x})$ элемент $-G^\circ(\bar{x})h$ удовлетворяет сформулированному дополнительному условию и $\lambda = 0$, то из (5) следует $0 \le \sup \langle \mu, -G^\circ(\bar{x})h \rangle \le$ $\le -\varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda \ne 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Если выполнены все условия теоремы 2.3, и, кроме того, X – локально-выпуклое пространство, то найдутся такие непрерывные положительные функционалы λ и μ на пространствах Y и Z соответственно, что

$$0\in\overline{\lambda\circ\partial F(\bar{x})}+\overline{\mu\circ\partial G(\bar{x})}+N_Y(M;\bar{x}),$$

$$\mu[Z]+\lambda[Y]\neq\{0\};\ \mu\circ G(\bar{x})=0,$$

где черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma(Y',X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что при всех $h\in X$ выполняется

$$\sup\langle\lambda,\partial F(\bar{x})h\rangle=\lambda\circ F^{\circ}(\bar{x})h.$$

Это означает, что $\partial(\lambda\circ F^{\circ}(\bar{x}))=\overline{cop(\lambda\circ\partial F)}$, и по теореме о биполяре получаем $\partial(\lambda\circ F^{\circ}(\bar{x}))=\overline{\lambda\circ\partial F^{\circ}(\bar{x})}$. Точно также $\partial(\mu\circ G^{\circ}(\bar{x}))=$ $=\overline{\mu\circ\partial G^{\circ}(\bar{x})}$.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Если выполнены все условия следствия 2.4 и, кроме того, пространства Y и Z локально-выпуклы и порядковые интервалы в них компактны, то найдутся такие непрерывные положительные функционалы λ и μ на пространствах Y и Z соответственно, что

$$0\in\lambda\circ F(\bar{x})+\mu\circ\partial G(\bar{x})+N_R(M;\bar{x});$$

$$\lambda[Y]+\mu[Z]\neq\{0\};\ \mu\circ G(\bar{x})=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как опорные множества $\partial F^{\circ}(\bar{x})$ и $\partial G(\bar{x})$ компактны в слабой операторной топологии, множества $\lambda\circ\partial F(\bar{x})$ и $\mu\circ\partial G(\bar{x})$ будут слабо компактными и, следовательно, совпадают $\partial(\lambda\circ F^{\circ}(\bar{x}))$ и $\partial(\mu\circ G^{\circ}(\bar{x}))$ соответственно.

Разберем случай, когда Y и Z не являются K-пространствами. По-прежнему будем предполагать, что F и G липшицевы в точке $\bar{x}$, а вместо правильности по направлениям удовлетворяют следующим условиям:

$$\sup\langle\lambda,\partial F(\bar{x})h\rangle=\inf\{\langle\lambda,k\rangle:k\in T_{F,\bar{x}}(h)\},\lambda\in Y'_+,h\in T(M;\bar{x}),$$

$$\sup\langle\mu,\partial G(\bar{x})h\rangle=\inf\{\langle\mu,k\rangle:k\in T_{G,\bar{x}}(h)\},\mu\in Z'_+,h\in T(M;\bar{x}).$$

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть X - локально-выпуклое пространство, Y и Z - локально-выпуклые упорядоченные векторные пространства, $F:X\to Y$ и $G:Y\to Z$ липшицевы и удовлетворяют приведенным выше условиям в точке $\bar{x}$. Тогда найдутся такие непрерывные положительные функционалы λ и μ на пространствах Y и Z соответственно, что

$$0 \in \lambda \circ \partial F(\bar{x}) + \mu \circ \partial G(\bar{x}) + N_{\mathbb{R}}(M;\bar{x});$$

$$\lambda[Y] + \mu[Z] \neq \{0\}; \quad \mu \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Если, кроме того, для некоторого $h \in T(M;\bar{x})$ и $\varepsilon > 0$ выполнено $\langle \mu, -G^{\circ}(\bar{x})h \rangle \geqslant \varepsilon$ при всех $\mu \in \mathfrak{A}$, то $\lambda \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже получили, что для некоторых положительных чисел $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ справедливы соотношения:

$$0 \in \bar{\alpha}_1 \cdot \partial(\varepsilon_{\mathfrak{b}} \circ F_{\mathfrak{b}})^{\circ}(\bar{x}) + \bar{\alpha}_2\, \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}})^{\circ}(\bar{x}) + N_{\mathbb{R}}(M;\bar{x});$$

$$\alpha_2 \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}) = 0.$$

Отсюда, учитывая включение

$$T_{G_{\mathfrak{A}},\bar{x}}(h) \supset \{[\mathfrak{A}](k) : k \in T_{G,\bar{x}}(h),$$

а также аналогичное включение для $F_{\mathfrak{A}}$ и привлекая теорему 4.4, будем иметь

$$0 \leq \bar{\alpha}_1 \varepsilon'_{\mathfrak{b}}(\bar{x})) \circ [\mathfrak{b}](k_1) + \bar{\alpha}_2 \varepsilon'_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})) \circ [\mathfrak{A}]k_2$$

для всех $k_1 \in T_{F,\bar{x}}(h), k_2 \in T_{G,\bar{x}}(h)$ и $h \in T(M;\bar{x})$. Положим

$$P_1(h) = \inf\{\varepsilon'_{\mathfrak{b}}(F_{\mathfrak{b}}(\bar{x})) \circ [\mathfrak{b}]k : k \in T_{F,\bar{x}}(h)\},$$

$$P_2(h) = \inf\{\varepsilon'_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})) \circ [\mathfrak{A}]k : k \in T_{G,\bar{x}}(h)\}.$$

Нетрудно видеть, что $P_1, P_2 : X \to \mathbb{R}$ – сублинейные функционалы и

$$0 \in \partial(\bar{\alpha}_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \delta_{\mathbb{R}}(T(M;\bar{x})) = \bar{\alpha}_1 \partial P_1 + \bar{\alpha}_2 \partial P_2 + N_{\mathbb{R}}(M;\bar{x}).$$

Если $\alpha \in \partial P_2$, то $(\alpha, 0) \in (0, \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}(\bar{x})) + N_{\mathbb{R}}(\operatorname{epi} G, (\bar{x}, G(\bar{x})))$, т.е. найдутся функционалы α_1 и β_1 на X и Y соответственно такие, что

$$(\alpha; 0) = (0, \gamma) + (\alpha_1, \beta_1);$$

$$\gamma \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x})),\ \alpha_1(h) \leq -\beta_1(k),\ k \in T_{G,\bar{x}}(h).$$

Отсюда $\gamma = -\beta_1$, $\alpha = \alpha_1$ и, следовательно, $\alpha(h) \leq \gamma(k)$ при $k \in T_{G,\bar{x}}(h)$. Аналогичные выкладки можно провести и для F, поэтому при некоторых $\gamma_1 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{b}}(F_{\mathfrak{b}}(\bar{x}))$ и $\gamma_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}(\bar{x}))$ имеет место неравенство

$$0\leqslant \alpha_1\gamma_1\circ[b]\circ k_1+\alpha_2\gamma_2\circ[a]k_2+\delta(T(M;\bar{x});$$

$$k_1\in T_{F,\bar{x}}(h),\ k_2\in T_{G,\bar{x}}(h),\ \alpha_2\gamma_2\circ[a]\circ G(\bar{x})=0.$$

Полагая $\lambda=\alpha_1\circ\gamma_1\circ[b],\ \mu=\alpha_2\circ\gamma_2\circ[a]$ и переходя к точной нижней границе по $k_1\in T_{F,\bar{x}}(h)$ и $k_2\in T_{G,\bar{x}}(h)$, получим

$$0\leqslant \sup\{\lambda\circ\partial F(\bar{x})h\}+\sup\{\mu\circ\partial G(\bar{x})h\},\ h\in T(M;\bar{x}),$$

что равносильно требуемому субдифференциальному включению. Теорема доказана.

§7. Заключительные замечания

7.1. Наши рассмотрения ведутся в псевдотопологических и упорядоченных псевдотопологических векторных пространствах. С одной стороны, это объясняется желанием охватить как дифференциальное исчисление в псевдотопологических векторных пространствах [30], так и субдифференцирование выпуклых операторов со значениями в пространстве Канторовича [5] (выпуклый оператор дифференцируем по направлениям относительно псевдотопологии (o)-сходимости). С другой стороны, нас интересуют только самые общие свойства аппроксимаций. Так, например, выпуклость кларковского касательного конуса не зависит от топологической структуры и сохраняется в псевдотопологических векторных пространствах. Этот факт может оказаться полезным, если для аппроксимации в нашем распоряжении имеется лишь некоторый набор сходящихся последовательностей (фильтров).

7.2. В [23] Рокафеллар пишет: "Возможно, одним из важнейших уроков, извлеченных из теории оптимизации из-за ее значения для всей математики, является желательность и возможность использования дифференциальных приближений более широкой природы. Вместо линеаризации можно искать выпуклую аппроксимацию. Вместо того, чтобы настаивать на двусторонней плюс-минус симметрии, что так характерно для классического мышления, можно развивать направление, которое Моро назвал односторонним анализом".

Эта мысль в математике существует давно, являясь источником многочисленных исследований. Так, контингентный конус, введенный в начале тридцатых годов Булиганом и сыгравший впоследствии важную роль в теории оптимизации, является ничем иным как односторонним приближением множества в точке. Соответствующее понятие аппроксимации произвольных операторов со значениями в упорядоченном векторном пространстве содержится в теории Нойштадта [9,10]. Идея одностороннего приближения присутствует в схеме Дубовицкого - Милютина [33], а также в работах других авторов [11-13], [34-36].

Касательный конус, обобщенная производная по направлениям и субдифференциал Кларка - односторонние аппроксимации специального вида.

7.3. Если X - конечномерное пространство, Y - вещественная прямая и $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ - полунепрерывная снизу функция, то $\partial F(\bar{x})$ и $F^{\circ}(\bar{x})$ совпадают с субдифференциалом и обобщенной производной по направлениям, введенным Кларком в работе [15]. Сублинейный функционал $F^{\circ}(\bar{x})$ может быть выражен явной формулой, которая для локально-липшицевых функций имеет вид:

$$F^{\circ}(\bar{x})h=\lim_{x\to\bar{x};\,t\downarrow 0}\sup t^{-1}[F(x+th)-F(x)],\ h\in X.$$

Существуют два частных случая, когда для векторных отображений имеет место аналогичная формула для подсчета оператора $F^{\circ}(\bar{x})$, а именно, случаи локально-липшицевых и компактно-липшицевых отображений.

Оператор $F:X\to Y$ называется липшицевым в точке $\bar{x}$, если найдутся окрестность V этой точки и непрерывный сублинейный оператор $P:X\to Y$ такие, что

$$-P(x''-x')\leq F(x')-F(x'')\leq P(x'-x'')$$

для всех $x',x''\in V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Пусть X - псевдотопологическое векторное пространство, Y - K-пространство с псевдотопологией (0)-сходимости и отображение $F:X\to Y$ удовлетворяет условию Липшица в точке $\bar{x}$. Для любого $\mathfrak{X}\downarrow_{\bar{x}}$ положим*

$$F^{\circ}(\mathfrak{X})h=\inf_{V\in\mathfrak{X},\,\varepsilon>0;}\ \sup_{x\in V,\,t\in(0,\varepsilon)}t^{-1}[F(x+th)-F(x)].$$

Тогда

$$F^{\circ}(\bar{x})h=\sup\{F^{\circ}(\mathfrak{X})h:\mathfrak{X}\downarrow_{\bar{x}}\},\ h\in X.$$

Рассмотрим теперь топологические векторные пространства X и Y. Отображение $F:X\to Y$ называется компактно-липшицевым в точке $\bar{x}$, если существуют отображения $R:[0,1]\times X^2 \to Y$ и $K: X \to Comp(Y)=\{M\subset Y: M$ - компактно$\}$ такие, что

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\downarrow 0}} R(t,x,h)=0$ для всех $h\in X$;

б) для любого $h\in X$ существуют окрестность V точки $\bar{x}$ и $\varepsilon>0$, для которых выполняется

$$t^{-1}[F(x+th)-F(x)]\in K(h)+R(t,x,h)$$

при всех $x\in V$ и $t\in(0;\varepsilon)$. Обозначим $\Delta F(t,x,h)=[F(x+ +th)-F(x)]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть X - топологическое векторное пространство, Y - K-пространство и топологическое векторное пространство, $F: X\to Y$ - компактно-липшицево в точке $\bar{x}$ и, кроме того,

$$\lim_{\substack{x\to\bar{x},\ k\to h\\ \varepsilon\downarrow 0}} t^{-1}[F(x+th)-F(x+tk)],\ h\in X. \qquad (6)$$

Положим

$$DF(\bar{x})h=\bigcap_{\varepsilon,V} cl\,\Delta F[V,(0,\varepsilon),h],$$

где пересечение берется по всем окрестностям V точки $\bar{x}$ и $\varepsilon>0$. Тогда

$$F^\circ(\bar{x})h=\sup DF(\bar{x})h,\quad h\in X.$$

Если F удовлетворяет условию Липшица в точке $\bar{x}$, а непрерывный сублинейный оператор $P: X\to Y$ обеспечивает это условие, то $F^\circ(\bar{x})h\le Ph$ для любого $h\in X$ и, кроме того, в этом случае $T^*_{F,\bar{x}}(h)=T_{F,\bar{x}}(h),\ h\in X$, следовательно, отображение F регулярно. Нетрудно увидеть, что компактно-липшицево отображение, удовлетворяющее условию (6), является квазирегулярным.

Компактно-липшицевы отображения были введены в [27,28]. Там же были получены необходимые условия слабого оптимума по Парето для отображений этого класса. Локально-липшицевы отображения и необходимые условия идеального оптимума для них рассматривались в работе автора [26].

7.6. Скалярные варианты теорем 4.3 и 4.I2 содержатся в [23]. Некоторые частные случаи утверждений 4.5, 4.7 и 4.II имеются также в [I5,I6,2I].

7.7. Метод штрафных функций используется в теории экстремальных задач с сороковых годов [37]. Этот метод формально является универсальным, так как позволяет любую экстремальную задачу с ограничениями свести к задаче без ограничений или же с меньшим числом ограничений. Несмотря на свою универсальность (или, может быть, вследствие этого) этот метод обладает конкретными недостатками. Так, неясны, например, перспективы его применения в разработке численных алгоритмов решения экстремальных задач [38].

Область применимости этого метода существенно сужается в связи с возникновением недифференцируемости при работе со сколь угодно хорошими функциями. Однако развитие субдифференциального исчисления делает это обстоятельство непринципиальным, превращая метод штрафных функций в эффективное средство получения необходимых условий экстремума.

7.8. Метод скаляризации позволяет записать в виде одного скалярного ограничения бесконечное число ограничений типа неравенства. В основе его лежит следующее простое соображение. Если отображение G действует в пространство (например, непрерывных) функций, то неравенство $G(x)\leq 0$ равносильно неположительности точной верхней границы функции $G(x)$. Подчеркнем, что использование этого метода приводит к точной верхней границе бесконечного множества функций и, следовательно, к потребности в соответствующих формулах субдифференцирования.

7.9. Принципом согласования интересов (часто) называется замена целевой функции F экстремальной задачи новой целевой функцией $G\circ F$. Этот принцип является широко распространенным средством анализа многоцелевых экстремальных задач. В частности, может оказаться, что задача с целевой функцией $G\circ F$ имеет идеальный оптимум, в то время как исходная задача с векторной целью F (как правило) не обладает идеальным решением. Так, например, обобщенный оптимум и оптимум по Парето являются идеальными оптимумами при соответствующем выборе принципа согласования интересов G .

7.10. Пусть X_1 - еще одно псевдотопологическое векторное пространство, а отображение $H: X\to X_1$ строго дифференцируемо по направлениям в точке $\bar{x}$ в смысле предложения 3.5, т.е. существует оператор $H'(\bar{x})\in\mathcal{L}(X,X_1)$, для которого

$$\Delta H(\mathfrak{X}, V; h) \nmid_{H'(\bar{x})} X_1$$

при всех $\mathfrak{X} \nmid_{\bar{x}} X$ и $h \in X$. Если $h \in T(\{H=0\}; \bar{x})$, где $\{H=0\} = \{x \in X : H(x)=0\}$, то нетрудно заметить, что $H'(\bar{x})h = 0$.

Предположим, что $H'(\bar{x})[X] = X_0$ - дополняемое подпространство в X_1 и $H'(\bar{x}) : X \longrightarrow X_0$ - псевдотопологический гомоморфизм, т.е. для любого $\mathfrak{X} \nmid X$ существует фильтр $\mathfrak{X}_0 \nmid X_0$, для которого $H'(\bar{x})\mathfrak{X} \succ \mathfrak{X}_0$. Тогда имеет место лемма о тройке (для любого $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathrm{Ker}\, A \supset \mathrm{Ker}\, H'(\bar{x})$ найдется такой $B \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, что $A = B \circ H'(x)$) и если, кроме того, $\mathrm{Ker}\, H'(\bar{x}) = T(\{H=0\}; \bar{x})$, то

$$N_Y(\{H=0\}; \bar{x}) \subset \{A \circ H'(\bar{x}) : A \in \mathcal{L}(X_1, Y)\},$$

Таким образом, во всех рассмотренных экстремальных задачах ограничение $x \in M$ можно заменить на функциональное ограничение $H = 0$. Так, например, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.II. Пусть для H выполнены приведенные выше предположения, а F, G и $M = \{H=0\}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 5.7. Если при этом $\bar{x}$ - идеальный оптимум в задаче $Hx=0, Gx \notin Y^+_\cdot, Fx \to \inf$, то существуют такие мультипликаторы $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ и оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, что

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y;$$

$$0 \in \partial(\bar{\alpha} \circ F)(\bar{x}) + \partial(\bar{\beta} \circ G)(\bar{x}) + A \circ H'(\bar{x});$$

$$\bar{\beta} \circ G(\bar{x}) = 0.$$

Если, кроме того, элемент $e = -G'(\bar{x})h$ является единицей в Y для некоторого $h \in \mathrm{Ker}\, H'(\bar{x})$, то $\mathrm{Ker}\, \bar{\alpha} = \{0\}$.

Если ограничения типа равенства $H = 0$ задаются недифференцируемой функцией H в конечномерном или банаховом пространстве, то для получения результатов типа 7.II используется несколько иная техника (см.[8,I6,2I,22]).

7.I2. Если производные по направлениям рассматриваемых отображений являются всюду определенными сублинейными операторами, то в полученных необходимых условиях всюду можно вынести мультипликаторы из-под знака субдифференциала слева. Субдифференциальное включение в теореме 5.7, например, принимает вид

$$0 \in \bar{\alpha} \circ \partial F(\bar{x}) + \bar{\beta} \circ \partial G(\bar{x}) + N_Y(M; \bar{x}).$$

ЛИТЕРАТУРА

I. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. Теория экстремальных задач. – М.:Наука, 1974.

2. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969.

3. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

4. ROCKAFELLAR R.T. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. – J.Math.Anal.Appl., 1970, v.32, N1, p.174–222.

5. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1978.

6. РУБИНОВ А.М. Сублинейные операторы и их применение. – Успехи мат. наук, 1977, т.32, № 4, с.113–174.

7. MOREAU J.J. Fonctionelles convexes. – Paris: College de France, 1966.

8. ЭКЛАНД И., ТЕМАМ Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.– М.: Мир, 1979.

9. NEUSTADT L.W. General theory of extremals. – J. Comput. System Sci., 1969, N1, p. 57–92.

10. NEUSTADT L.W. Optimisation: A theory of necessary conditions.– Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.

11. ЛЕВИТИН Е.С., МИЛЮТИН А.А., ОСМОЛОВСКИЙ Н.П. Об условиях локального минимума в задачах с ограничениями. – В кн.: Математическая экономика и функциональный анализ. М.,1974, с.139–203.

12. BASARAA M.S., GOODE J.J., NASHED M.Z. On the cones of tangents with applications to mathematical programming. – J. Optimiz. Theory Appl., 1974, v.13, N4, p.389–426.

13. CHRISTOPEIT N. Necessary optimality conditions with applications to variational problems. – SIAM J. Control and Optimiz., 1977, v.15, N4, p.683–698.

14. HESTENS M.R. Calculus of vatiations and optimal control theory. – N.Y: Willy, 1966.

15. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications. – Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v.205, N2, p.247–262.

16. CLARKE F.H. A new approach to Lagrange multipliers. – Math.

Oper. Research, 1976, v.1, N2, p.165-174.

17. CLARKE F.H. On the inverse function theorem. - Pacific J. Math., 1976, v.64, N1, p.92-102.

18. CLARKE F.H. The maximum principle under minimal hipotheses. - SIAM J. Control and Optimiz., 1976, v.14, N6, p.1078-1091.

19. HIRIART-URRUTY J.-B. On optimality conditions in nondifferentiable programming, 1978, v.14, N1, p.73-86.

20. HIRIART-URRUTY J.-B. Gradients generalises de fonctions marginales. - SIAM J.Control and Optimiz., 1978, v.16, N2, p. 301-316.

21. HIRIART-URRUTY J.-B. A new chain rule for generalized gradients. - C.r. Acad. Sci. Paris, 1977, v.285, N12,p.781.

22 POURCIAU B.H. Analysis and optimization of Lipschitz continuous mappings. - J. Optimiz. Theory. Appl., 1977, v.22, N3, p.311-351.

23. ROCKAFELLAR R.T. The theory of subgradients and its applications to problem of optimization. - Montreal: Montreal Univ. Press, 1978.

24. ШОР Н.З. О классе почти дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса. - Кибернетика, 1972, № 4, с.65-70.

25. НУРМИНСКИЙ Е.А. Квазиградиентный метод решения задачи нелинейного программирования. - Кибернетика, 1973, № 1, с.122-125.

26. КУСРАЕВ А.Г. О необходимых условиях экстремума для негладких векторнозначных отображений. - Докл. АН СССР, 1978, т.242, № 1, с. 44-47.

27. THIBAULT L. Sous differentieles de fonctions vectorielles compactment Lipschitzennes.- C.r. Acad. Sci. Paris, 1978, v.286, N21, p.995-999.

28. THIBAULT L. Fonctions compactment Lipschitzennes et programmation mathematique. - C.r. Acad. Sci. Paris, 1978, v. 287, N4, p.213-216.

29. КУСРАЕВ А.Г. О субдифференцировании негладких операторов.- Новосибирск, Б.и., 1979-(Препринт/ИМ СО АН СССР).

30. ФРЕЛИХЕР А., БУХЕР В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. - М.: Мир, 1970.

31. WONG Y.-C., NG K.-F. Partially ordered topological vector spaces. - Oxford: Clarendon Press, 1973.

32. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных про-

странствах. - Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977.
33. ДУБОВИЦКИЙ А.Я., МИЛЮТИН А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1965, т.5, № 3, с.395-453.
34. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. О необходимых условиях экстремума для негладких функций. - Кибернетика, 1977, № 6, с.92-96.
35. PENOT J.P. Calcul sous-differentiel et optimization. - J. Functional Analysis, 1978, v.27, N2, p.248-276.
36. КРУГЕР А.Я. Субдифференциалы невыпуклых функций и обобщенные производные по направлениям. - 1977, Деп. ВИНИТИ № 2661-77 Деп.- 40 с.
37. COURANT R. Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibration. - Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v.49, N1, p.1-23.
38. ФЕДОРЕНКО Р.П. Численное решение задач оптимального управления. - М.: Наука, 1978.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.10.1979 г.