УДК 5I2.25/26

О ЗАДАЧЕ СИНЬОРИНИ

И.А. Ицкович

I. Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей S в m-мерном евклидовом пространстве; $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – точка m-мерного пространства. Задача Синьорини состоит в нахождении функции $u(x)$, которая удовлетворяет в области Ω уравнению

$$Mu \equiv \Delta u - c(x)u = F(x) \quad \left(\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right), \tag{I}$$

а на границе S удовлетворяет условиям

$$u \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

Функция $c(x)$ предполагается непрерывной в замкнутой области $\Omega \cup S$ и положительной, так что $0<c_1 \leqslant c(x) \leqslant c_2$ для некоторых чисел c_1 и c_2.

Связь задачи Синьорини с вариационными неравенствами, доказательство существования и единственности решения рассматриваются в [I, 2]. В настоящей заметке приводится другой метод доказательства существования и единственности решения задачи Синьорини, в котором искомой является не функция $u(x), x\in\Omega$, а ее значения (след) $f(y)$ на границе S. Относительно f получается задача о минимуме квадратичного функционала на конусе неотрицательных функций.

Пусть $u_0(x)$ решает уравнение (I) при условии $u_0(y)=0, y\in S$; обозначим $b(y) = -\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S$ и будем считать, что $b(y)\in L_2(S)$. Функция $v(x)=u(x)-u_0(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$Mv \equiv \Delta v - c(x)v = 0 \qquad (3)$$

в области Ω, а на границе S выполнены условия

$$v \geq 0, \ \frac{\partial v}{\partial n} \geq b, \ v\left(\frac{\partial v}{\partial n} - b\right) = 0. \qquad (4)$$

Допустим сначала, что функция $v(x)$ дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы. Задавшись функцией $f(y) = v/_S$ и решая задачу Дирихле для уравнения (3), мы найдем значения функции $v(x)$ внутри области Ω, а затем можно вычислить $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S = g(y)$. Описанная цепочка действий, переводящих $f(y)$ в $g(y)$, определяет аддитивный и однородный оператор A, $Af = g$. Искомой будем считать функцию $f(y)$. Теперь мы можем записать условия (4) с помощью оператора A:

$$f \geq 0, Af \geq b, f(Af - b) \qquad \text{на } S. \qquad (5)$$

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(S)$ называется положительно-определенным, если: а) область задания оператора плотна в $L_2(S)$; б) выполняется условие симметричности $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) \ \forall f_1, f_2$; в) существует число $\gamma^2 > 0$ такое, что для всякого f выполняется неравенство положительной определенности $(Af, f) \geq \gamma^2 (f, f)$.

ТЕОРЕМА I. Построенный выше оператор A является положительно-определенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие а) очевидно; б) следует из интегрального тождества

$$\int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) dS = 0, \qquad (6)$$

которое справедливо, если $M\varphi = 0$ и $M\psi = 0$. Действительно, положим $\varphi/_S = f_1$, $\psi/_S = f_2$, тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S = Af_1$, $\frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_S = Af_2$. Подставив это в (6), получим условие симметричности. в) Имеем $Mv = 0$ и $(Af, f) = \int_S v \frac{\partial v}{\partial n} dS$. По формуле Грина

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_\Omega [|\operatorname{grad} v|^2 + v\Delta v] d\Omega = \int_\Omega [|\operatorname{grad} v|^2 + cv^2] d\Omega. \qquad (7)$$

Так как коэффициент $c(x)$ ограничен сверху и снизу положительными числами, то мы можем принять последний интеграл за квадрат нормы $\|v/W_2^1(\Omega)\|^2$. По одной из теорем вложения С.Л. Соболева [3] существует число $\gamma^2>0$ такое, что

$$\|v/W_2^1(\Omega)\|^2 \geq \gamma^2 \int_S v^2 dS = \gamma^2 (f,f),$$

а это и есть неравенство положительной определенности для оператора A.

2. Следуя С.Г.Михлину [4,5], введем в $L_2(S)$ новое скалярное произведение и новую норму, полагая $[f,h]=(Af,h)$, $\|f\|_A^2=[f,f]=(Af,f)$. Обозначим через H полное гильбертово пространство с новой нормой. Из (7) и наших предположений относительно функции $c(x)$ следует, что если $f\in H$, то $v\in W_2^1(\Omega)$, и наоборот. По теореме о следах [6]

$$H=W_2^{1/2}(S)\subset L_2(S).$$

Сформулируем теперь экстремальную задачу

$$\inf\{(Af,f)-2(b,f): f\geq 0,\ f\in L_2(S)\}. \qquad (8)$$

Чтобы перейти к формулировке задачи (8) в терминах пространства H, заметим, что существует единственный элемент $a\in H$, осуществляющий равенство $[a,f]=(b,f)$, справедливое для всех $f\in H$. Тогда (8) можно записать в виде

$$\inf\{\|f\|_A^2-2[a,f]: f\in K\},$$

где K - множество неотрицательных элементов из H. Поскольку $\|f\|_A^2-2[a,f]=\|f-a\|_A^2-\|a\|_A^2$, то (8) может быть записано проще:

$$\inf\{\|f-a\|_A : f\in K\}. \qquad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. В пространстве H существует единственное решение задачи (8).

Доказательство следует из эквивалентности (8) и (9), а также из выпуклости и замкнутости в H множества K.

3. Для того чтобы связать задачу Синьорини с задачей о минимуме квадратичного функционала на конусе неотрицательных элементов пространства H, следует заметить, что (5) являются условиями дополняющей нежесткости для экстремальной задачи (8). А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы функция $f_0\in H$ была решением задачи (8), необходимо и достаточно, чтобы f_0 удовлетворяла условиям (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f_0 \in K$ решает задачу (8). Обозначим $\alpha(f) = (Af,f) - 2(b,f)$; $\alpha(f)$ – выпуклый функционал. Пусть $h(y) \in H$ – функция, заданная на S' и такая, что при малых $t>0$ $f_0 + th \in K$. Тогда $\alpha(f_0+th) \geq \alpha(f_0)$. Имеем $[\alpha(f_0+th)-\alpha(f_0)]/t = 2(Af_0-b,h)+t(Ah,h)$. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{t\to+0}[\alpha(f_0+th)-\alpha(f_0)]/t = 2(Af_0-b,h) \geq 0.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо при всяких $h \geq 0$, то $Af_0 - b \geq 0$. Полагая $h = -tf_0$, получим $-t(Af_0-b,f_0) \geq 0$, откуда следует, что $(Af_0-b,f_0)=0$, так как оба множителя в скалярном произведении неотрицательны. Но тогда и $f_0(Af_0-b)=0$ на S'. Необходимость доказана.

Достаточность докажем от противного. Допустим, что $f_0 \in K$ удовлетворяет условиям (5), но не решает задачу (8). Тогда существует $f_1 \in K$ такая, что $\alpha(f_1) < \alpha(f_0)$. Напишем условие выпуклости функционала:

$$\alpha(th_1 + (1-t)h_2) \leq t\alpha(h_1) + (1-t)\alpha(h_2);$$

здесь $h_1 \in K, h_2 \in K, 0 \leq t \leq 1$. Отсюда

$$\alpha(h_2 + t(h_1-h_2)) - \alpha(h_2) \leq t[\alpha(h_1) - \alpha(h_2)]$$

и

$$\lim_{t\to+0}[\alpha(h_2+t(h_1-h_2))-\alpha(h_2)]/t = 2(Ah_2-b,h_1-h_2) \leq \alpha(h_1)-\alpha(h_2).$$

Подставляя в последнее неравенство $h_1 = f_1$, $h_2 = f_0$, получим $2(Af_0-b,f_1-f_0) \leq \alpha(f_1)-\alpha(f_0)$. Из условий (5) имеем $(Af_0-b,f_0)=0$, но $\alpha(f_1)-\alpha(f_0)<0$ по допущению, поэтому $(Af_0-b,f_1)<0$, что невозможно, так как оба сомножителя в скалярном произведении неотрицательны. Противоречие доказывает теорему.

В заключение выражаю благодарность С.Г. Михлину за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ФИКЕРА Г. Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974.
2. ЛИОНС Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых за-

дач. - М.: Мир, 1972.
3. СОБОЛЕВ С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
4. МИХЛИН С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. - М.-Л. ГИТТЛ, 1952.
5. МИХЛИН С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.
6. ЛИОНС Ж.-Л., МЕДЖЕНЕС Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Поступила в ред.-изд. отдел
9.10.1979 г.