УДК 517.514

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ЛИПШИЦА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Н. Владимиров

В связи с задачей перемещения массы в евклидовом пространстве, а также различных ее обобщений (см. [1]; [2], гл. VIII, § 4; [3]), возникает необходимость в изучении класса U функций u : $R^n \longrightarrow R$, удовлетворяющих соотношению:

$$u(y) - u(x) \leq r(x,y), \quad x, y \in R^n, \tag{1}$$

где через $r(x,y)$ обозначена евклидова метрика в R^n. Для функций $u \in U$ положим

$$m_0(u) = \inf\{u(x) \mid x \in R^n\}, \quad m_1(u) = \sup\{u(x) \mid x \in R^n\}.$$

Нас будет интересовать более узкий класс U_0, состоящий из функций $u \in U$, удовлетворяющих следующим условиям:

если $u(y) \neq m_0(u)$, то для некоторого $x \neq y$ в (1) достигается равенство; (2)

если $u(x) \neq m_1(u)$, то для некоторого $y \neq x$ в (1) достигается равенство. (3)

Для случая евклидовой плоскости указанный класс функций Липшица был изучен В. А. Булавским и Г. Ш. Рубинштейном. На одном из заседаний семинара по выпуклому анализу и теории экстремальных задач ими был поставлен вопрос о возможности получения аналогичных результатов для евклидовых пространств произвольной размерности.

В настоящей заметке на этот вопрос дается положительный ответ.

Сразу заметим, что если $u \in U_0$, то $-u$ и $u + c$, где c - произвольная постоянная, также лежат в U_0.

Приведем примеры функций исследуемого класса.

I) Пусть H - гиперплоскость в R^n. Положим

$$u(x)=\varepsilon(x)\,r(x,H),$$

где $\varepsilon(x)$ - знак, отвечающий положению x в том или ином полупространстве, порожденном H.

2) Возьмем выпуклое замкнутое нетелесное множество $M\subset R^n$. Положим

$$u(x)=r(x,M).$$

3) Пусть M определено, как выше. Рассмотрим периодические функции $\varphi_i : R \longrightarrow R$ $(i=1,2)$ периода 2 такие, что

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1,\\ -t+2, & 1<t\le 2,\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t+1).$$

Положим

$$u_i(x)=\varphi_i(r(x,M)),\quad i=1,2.$$

Первый пример, очевидно, соответствует случаю, когда $m_0(u)=-\infty$, $m_1(u)=+\infty$, а второй - случаю $m_0(u)=0, m_1(u)=+\infty$. Нетрудно проверить, что, по существу, других неограниченных функций в U_0 нет.

Третий пример отвечает случаю $m_0(u)=0, m_1(u)=1$. Но этим примером случай ограниченных функций нашего класса не исчерпывается. Действительно, пусть гиперплоскости H_j $(j=\overline{1,4})$ расположены в R^n следующим образом: H_1 параллельна H_2, H_3 параллельна H_4, H_1 ортогональна H_3, $r(H_3,H_4)$ - целое число. Пусть, далее, замкнутое полупространство F_1, порожденное H_1, содержит H_2; замкнутое полупространство F_2, порожденное H_2, содержит H_1.

Обозначим

$$E_3=H_3\cap F_1\cap F_2,\ E_4=H_4\cap F_1\cap F_2.$$

4) Определим функцию

$$u(x)=\begin{cases} \varphi_i(r(x,E_3)), & x\in F_1,\\ \varphi_j(r(x,E_4)), & x\in F_2,\end{cases}$$

где $i=j$, если $r(H_3,H_4)$ - четное число, и $i\ne j$ в противном случае.

Примеры 3)-4) по существу исчерпывают случай ограниченных функций из U_0. Проверке этой гипотезы и посвящена основная часть работы.

Приведем общие рассуждения относительно исследуемых объектов. Возьмем произвольную функцию $u \in U_0$. Если при фиксированных x и y в (I) достигается равенство, то будем записывать $x \uparrow y$. Нетрудно увидеть, что если $x \uparrow y$ и z принадлежит отрезку (x,y), то $x \uparrow z$ и $z \uparrow y$. Это вытекает из соотношения:

$$u(y)-u(x)=[u(y)-u(z)]+[u(z)-u(x)]\le r(z,y)+r(x,z)=r(x,y).$$

Далее, если $x \uparrow y$ и $y \uparrow z$, то $x \uparrow z$ и z принадлежит прямой $\Pi(x,y)$, проходящей через x и y. Действительно,

$$u(z)-u(x)=[u(z)-u(y)]+[u(y)-u(x)]=r(y,z)+r(x,y)\ge r(x,z).$$

Учитывая (I), имеем

$$u(z)-u(x)=r(x,y)+r(y,z)=r(x,z).$$

Последнее равенство возможно только в том случае, когда $z\in\Pi(x,y)$. И, наконец, если $x \uparrow z$ для любого $z\in G$, где G - подмножество прямой, то $x \uparrow z$ для любого z из замыкания множества G.

Таким образом, отношение $x \uparrow y$ есть частичный порядок в R^n. Максимальные линейно-упорядоченные множества назовем линиями тока (ЛТ). Следовательно, через каждую точку $x\in R^n$ проходит некоторая ЛТ, которая является отрезком, лучом либо прямой. ЛТ могут обрываться только в экстремальных точках, т.е. в тех точках, где функция $u\in U_0$ достигает своего экстремума. Пересекаться ЛТ могут только в экстремальных точках.

Связное подмножество G некоторой прямой назовем обобщенной линией тока (ОЛТ), если $G=\bigcup_i G_i$, где каждая из G_i является ЛТ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $[x_1, x_2]$ - отрезок ЛТ такой, что

$$u(x_1)=\delta_1,\ u(x_2)=\delta_2.$$

Тогда открытый шар $B(x_1, |\delta_1-\delta_2|)$ не содержит точек x таких, что $u(x)=\delta_2$.

Рассмотрим случай, когда $m_0(u)=-\infty, m_1(u)=+\infty$. Тогда ЛТ - это прямые, причем непересекающиеся. Пусть Π - одна из таких прямых. Возьмем $x\in\Pi\cap u^{-1}(t)$, и пусть H_t - гиперплоскость, проходящая через x ортогонально Π. В силу замечания, $u^{-1}(t)\subset H_t$. Если бы нашелся $y\in H_t$, для которого $u(y)=t_1\ne t$, то y принадлежал бы H_{t_1}, чего быть не может в силу параллельности гиперплоскостей H_t и H_{t_1}. Таким образом, этот случай исчерпывается первым примером.

Рассмотрим случай, когда $m_0(u)=0$, $m_1(u)=\infty$. Тогда ЛТ - это лучи с началом в точках $x\in u^{-1}(0)$. Пусть $y\notin u^{-1}(0)$, тогда существует $x\in u^{-1}(0)$ такой, что замкнутый луч $\bar{l}(x,y)$ является ЛТ. Проведем гиперплоскость H через x ортогонально $\bar{l}(x,y)$. Из замечания вытекает, что $u^{-1}(0)$ и y лежат в различных замкнутых полупространствах, порожденных H. Следовательно, $u^{-1}(0)$ - выпуклое замкнутое множество. Из (3) следует, что $u^{-1}(0)$ не может быть телесным. Таким образом, второй пример исчерпывает полностью этот случай.

Наконец, рассмотрим случай, когда $m_0(u)=0, m_1(u)=1$. Тогда ЛТ - это отрезки единичной длины. Для каждого фиксированного $\delta\in[0,1]$ введем в рассмотрение многозначное отображение:

$$\Phi_\delta(x)=\{y\,|\,u(y)=\delta,\ |u(y)-u(x)|=r(x,y)\}.$$

Нетрудно проверить, что эти отображения имеют замкнутые графики. Действительно, пусть $x_m\to x$, $y_m\to y$, $y_m\in\Phi_\delta(x_m)$. Тогда

$$r(x,y)=\lim r(x_m,y_m)=\lim|u(y_m)-u(x_m)|=|u(y)-u(x)|,$$

$$u(y)=\lim u(y_m)=\delta\quad(m\to\infty).$$

ЛЕММА 1. Из каждой экстремальной точки выходит по крайней мере два отрезка ЛТ.

Действительно, пусть $[x_0,x_1]$ - единичный отрезок ЛТ. Для определенности будем считать, что $u(x_0)=0$. Проведем через x_0 гиперплоскость H ортогонально $[x_0,x_1]$. Пусть $\{x_m\}$ - последовательность точек, лежащих на прямой $\Pi(x_0,x_1)$ в замкнутом полупространстве F, порожденном H и не содержащем x_1, и $\lim x_m=x_0 (m\to\infty)$. Тогда $\Phi_1(x_m)\subset F$, так как в противном случае нарушилось бы условие (1) для точек x_0 и $y_m\in\Phi_1(x_m)\cap$ $\cap(R^n\setminus F)$. Следовательно, $\Phi_1(x_0)\cap F\neq\varnothing$.

Экстремальную точку x_0 назовем особой точкой, если существуют два отрезка ЛТ $[x_0,x_1]$ и $[x_0,x_2]$, не лежащие на одной прямой.

ЛЕММА 2. Пусть x_0 - особая точка, $[x_0,x_1]$ и $[x_0,x_2]$ - два единичных отрезка ЛТ, не лежащие на одной прямой. Тогда для любого $x\in[x_1,x_2]$ $|u(x)-u(x_0)|=r(x_0,x)$. Продолжив отрезки $[x_0,x]$ до отрезков единичной длины, получим дугу $\widehat{x_1 x_2}$ единичной окружности, которая является линией уровня.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для определенности считать, что $u(x_0)=0$. Проверим, что $x_0 \uparrow x_3$, где $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$. Пусть $S(x_i,1)$ - единичные сферы с центром в x_i $(i=1,2)$. Тогда $r(x_3,S(x_1,1)\cup \cup S(x_2,1))=r(x_3,x_0)$, $[B(x_1,1)\cup B(x_2,1)]\cap u^{-1}(0)=\emptyset$. Значит,

$$u(x_3)\geq r(x_0,x_3)\geq u(x_3)-u(x_0)=u(x_3).$$

Следовательно, $x_0 \uparrow x_3$. Отрезок $[x_0,x_3]$ продолжим до единичного отрезка ЛТ $[x_0,\bar{x}_3]$. Итак, наше утверждение выполнено для всех двоично-рациональных точек дуги $\widehat{x_1 x_2}$. Из непрерывности функции u вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть x_0 - особая точка. Тогда существуют единичные отрезки ЛТ $[x_0,x_1]$ и $[x_0,x_2]$ такие, что $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x_0)=0$. Тогда $M=\cup\{[x_0,x_1]\,|\,x_1\in \in \Phi_1(x_0)\}$ - выпуклое множество. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда существует гиперплоскость H, выделяющая M и такая, что $M\cap H=\{x_0\}$. Пусть F - замкнутое полупространство, порожденное H и не содержащее M. Возьмем отрезок $[x_0,y]\subset F$, ортогональный H. Обозначим через $\{x_m\}$ последовательность точек этого отрезка, сходящуюся к x_0. Тогда, как и в лемме I, $\Phi_1(x_0)\cap F\neq\emptyset$. Это противоречие и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. Множество особых точек замкнуто.

Действительно, пусть $\{x_m\}$- последовательность особых точек такая, что $u(x_m)=0$, $x_m\to x_0 (m\to\infty)$. Для любого номера m выберем два единичных отрезка ЛТ $[x_m,y_m]$ и $[x_m,z_m]$, угол между которыми фиксирован и равен θ, где $0<\theta<\pi$. Найдем подпоследовательность $\{x_{m_{k_\ell}}\}$, для которой существуют пределы

$$\lim y_{m_{k_\ell}}=y,\ \lim z_{m_{k_\ell}}=z\ \ (\ell\to\infty).$$

Тогда $x_0\uparrow y$; $x_0\uparrow z$ и угол между $[x_0,y]$ и $[x_0,z]$ равен θ. Следовательно, x_0 - особая точка.

ЛЕММА 5. Пусть x_0 - особая точка,

$[x_0, z_1]$ и $[x_0, z_2]$ - два отрезка ЛТ, не лежащие на одной прямой. Тогда замкнутый луч $\bar{\Lambda}\left(x_0, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ является ОЛТ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x_0)=0$ и единичный отрезок ЛТ $[x_0, x_1] \ni \frac{z_1+z_2}{2}$. Докажем, что $[x_0, x_1]$ можно продолжить за x_1 до отрезка ОЛТ $[x_0, x_2]$ длины 2. Предположим противное: пусть такое продолжение невозможно. В этом случае, без ограничения общности, можно считать, что указанное продолжение невозможно для всей дуги $\widehat{z_1 z_2}$ единичной окружности с центром в x_0. Для любой точки $x \in \widehat{z_1 z_2}$, не совпадающей с z_1 и z_2, $\Phi_0(x) \subset H_x$, где H_x - гиперплоскость, проходящая через x ортогонально $\widehat{z_1 z_2}$. С каждой такой точкой связан отрезок ОЛТ $[x', x'']$ длины 2 такой, что $\frac{x'+x''}{2}=x$. В силу предположения о непродолжимости дуги $\widehat{z_1 z_2}$ можно считать, что существует $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ такое, что углы между $[x', x'']$ и $[x, x_0]$ не меньше, чем θ. Рассмотрим точки y_1 и y_2, лежащие на этой дуге по разные стороны от H_{x_1}. Возьмем последовательность точек $\{P_m\} \subset \Phi_0(x_1)$ такую, что $P_m \to x_0$. Из каждой точки P_m, кроме отрезка $[x_1, P_m]$, выходит по крайней мере еще один отрезок ЛТ $[P_m, q_m]$. Можно считать при этом, что угол между $[P_m, x_1]$ и $[P_m, q_m]$ не меньше, чем $\pi/2$. Но тогда, очевидно, найдется номер m', начиная с которого в зависимости от положения q_m в том или ином замкнутом полупространстве, порожденном H_{x_1}, выполняется по крайней мере одно из соотношений:

$$B(q_m, 1) \cap \Phi_0(y_i) \neq \emptyset \quad (i=1,2).$$

Получаем противоречие с замечанием. Итак, каждый отрезок ЛТ $[x_0, x]$, где $x \in \widehat{z_1 z_2}$, продолжаем до отрезка ОЛТ длины 2. Доказательство леммы завершается индукцией по длине отрезков ОЛТ.

СЛЕДСТВИЕ 1. С каждой особой точкой x связан выпуклый замкнутый конус $Q(x)$, любой луч которого, начинающийся в x, является ОЛТ.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть x_i $(i=1,2)$ - особые точки, $K_i \subset Q(x_i)$ - некоторые двумерные конусы с вершинами в x_i, $\mathring{K}_1$ - относительная внутренность K_1.

Тогда $\mathring{K}_1 \cap K_2 = \phi$.

Действительно, пусть существует $x_0 \in \mathring{K}_1 \cap K_2$. В силу леммы 5, окружность C с центром в x_0, проходящая через x_1 и x_2, является линией уровня, конус K_1 можно считать двумерной плоскостью, причем K_1 и K_2 ортогональны C. Обозначим через γ_i $(i=1,2)$ линии уровня, лежащие в K_i соответственно и содержащие x_0. Для каждой точки $y \in \gamma_2$ существует отрезок ЛТ $[y, z]$, принадлежащий $\Lambda(x_2, y)$ и такой, что $z \in (x_2, y)$. Но тогда можно указать окрестность V точки x_0 такую, что для любых $y \in V \cap \gamma_2$

$$B(z, 1) \cap \gamma_1 \neq \phi.$$

Полученное противоречие и доказывает следствие 2.

Рассмотрим теперь объекты иной природы - "поверхности уровня". Начнем с неэкстремальных "поверхностей". Зафиксируем $\delta \in (0,1)$. Пусть $x \in u^{-1}(\delta)$ и найдем $x_0 \in u^{-1}(0)$ такой, что $x_0 \nmid x$.

Пусть $y = \frac{x_0 + x}{2}$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что $B(x, \varepsilon_1)$ не содержит особых точек, $B(y, \varepsilon_2)$ не содержит экстремальных точек и

$$\Phi_\delta(B(y, \varepsilon_2)) \subset B(x, \varepsilon_1).$$

Через точку y, ортогонально отрезку $[x_0, x]$, проведем гиперплоскость H. Тогда ограничение $\Phi_\delta|_{B(y,\varepsilon_2)\cap H}$ является гомеоморфизмом. А так как это справедливо для любой точки $x \in u^{-1}(\delta)$, то каждая компонента связности $\Gamma_\delta \subset u^{-1}(\delta)$ является $(n-1)$-мерной поверхностью. Далее, через каждую точку $x \in \Gamma_\delta$ проходит единственный единичный отрезок ЛТ $[x_0, x_1]$. Это означает, что

$$\Gamma_\delta \cap [B(x_0, \delta) \cup B(x_1, 1-\delta)] = \phi.$$

Другими словами, Γ_δ является гладкой поверхностью.

Перейдем теперь к экстремальным "поверхностям". Каждая компонента связности $\Gamma_1 \subset u^{-1}(1)$ является непрерывным образом простой поверхности: $\Gamma_1 = \Phi_1(\Gamma_{1/2})$. Предположим, что существует неособая точка $x \in \Gamma_1$. Тогда существует окрестность $V_x \cap \Gamma_1$, гомеоморфная $(n-1)$-мерному шару. Кроме того, можно найти z и y из $u^{-1}(0)$ такие, что $y \nmid x$, $z \nmid x$ и $x = \frac{y+z}{2}$. Но тогда Γ_1 удовлетворяет условию гладкости:

$$\Gamma_1 \cap [B(y, 1) \cup B(z, 1)] = \phi.$$

Если же $x \in \Gamma_1$ - особая точка, то для каждого единичного отрезка ЛТ$[x_0, x]$ выполняется соотношение $\Gamma_1 \cap B(x, 1) = \phi$.

Непосредственно из следствия 2 вытекает, что если $\partial\Gamma_0 \neq \phi$, то $\Phi_1(\partial\Gamma_0)$ является выпуклой $(n-1)$-мерной поверхностью.

ЛЕММА 6. Если открытый луч $\Lambda(x_0, x_1)$ является ОЛТ, не содержащей особых точек, то существует $\delta > 0$ такое, что $[G_{x_0} \cap B(x_0, \delta)] \cap u^{-1}(0) = \phi$, где G_{x_0} - открытое полупространство, порожденное гиперплоскостью H и содержащее x_1, а H проходит через x_0 ортогонально $[x_0, x_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots$ - последовательность экстремальных точек на $\bar{\Lambda}(x_0, x_1)$. Из леммы 4 вытекает, что для каждого номера $m \geq 1$ можно указать число $\delta_m > 0$ такое, что $\Gamma_{x_m} \cap B(x_m, \delta_m)$ - $(n-1)$-мерная поверхность без особых точек, где через Γ_{x_m} обозначена компонента связности, содержащая x_m. Зафиксируем произвольно $\varepsilon \in (0,1)$ и положим

$$C_\varepsilon = \Lambda(x_0, x_1) + B(0, \varepsilon).$$

Учитывая следствия I и 2, получаем, что лишь конечное число множеств $\partial\Gamma_{x_m}$ может пересекаться с C_ε. Следовательно, можно выбрать $\delta \in (0,1)$, для которого

$$C_\delta \cap \partial\Gamma_{x_m} = \phi \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

В силу замечания,

$$B(x_1, 1) \cap B(x_0, \delta) \cap u^{-1}(0) = \phi.$$

Предположим, что существует $x_0' \in B(x_0, \delta) \cap B(x_m, m) \cap u^{-1}(0)$ $(m \geq 2)$. Тогда $r(x_0', x_m) < m$, $[x_m, x_0] \cap \Gamma_{x_i} \ni x_i'$, $r(x_i', x_{i+1}') \geq 1$ $(i = \overline{1, m-1})$. Отсюда $r(x_0', x_1') < 1$. Это противоречит условию (I).

Итак, для всех m

$$B(x_0, \delta) \cap B(x_m, m) \cap u^{-1}(0) = \phi.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $u \in U_0$ не имеет особых точек. Тогда, в силу леммы 6, поверхности уровня - это семейство параллельных гиперплоскостей, т.е.

$$u(x) = \varphi_1(r(x, H_0)),$$

где гиперплоскость $H_0 \subset u^{-1}(0)$.

Пусть теперь $x_0 \in u^{-1}(0)$ – особая точка функции $u \in U_0$ такая, что существует число $\delta > 0$, для которого $\gamma_0 = B(x_0, \delta) \cap \Gamma_{x_0}$ содержит только особые точки. Тогда соответствующие конусы $Q(x)$ для $x \in \gamma_0$ не пересекаются. В силу леммы 6, множество γ_0 является выпуклым множеством размерности не более $n-2$. Отсюда Γ_{x_0} является выпуклым множеством той же размерности и

$$u(x) = \varphi_1(r(x, \Gamma_{x_0})).$$

Пусть теперь $x_0 \in u^{-1}(0)$ – особая точка нашей функции u и Γ_{x_0} является $(n-1)$-мерной поверхностью. Тогда $\Phi_1(\partial\Gamma_{x_0})$ – выпуклая поверхность. Предположим сначала, что $Q(x_0)$ не содержит особых точек, отличных от x_0. Тогда, в силу леммы 6, максимальная размерность аффинного многообразия ℓ, содержащегося в $Q(x_0)$, равна I. Обозначим через H_0 гиперплоскость, проходящую через x_0 ортогонально ℓ. Тогда существует окрестность V точки x_0, для которой $V \cap \Gamma_{x_0} \subset H_0$. Множество $\Gamma_{x_0} \cap H_0$ является выпуклым и относительно телесным в H_0. Если $\Gamma_{x_0} \cap H_0 = \Gamma_{x_0}$, то

$$u(x) = \varphi_1(r(x, \Gamma_{x_0})).$$

Если же $\Gamma_{x_0} \neq \Gamma_{x_0} \cap H_0$, то на цилиндре с основанием $\Gamma_{x_0} \cap H_0$ есть особые точки, не принадлежащие $\Gamma_{x_0} \cap H_0$. Это возможно только в случае, приведенном в примере 4.

Предположим, наконец, что $Q(x_0)$ содержит особую точку $y_0 \neq x_0$. Так как конусы $Q(x)$ и $Q(y)$ описывают выпуклые поверхности при $x \in \partial\Gamma_{x_0}, y \in \partial\Gamma_{y_0}$, то это возможно только в случае, приведенном в примере 4, когда $H_1 = H_2$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Ш.Рубинштейну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. – Докл. АН СССР, 1942, т.37, № 7–8, с.227–229.

2. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.

3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - Успехи мат. наук, 1970, т.25, вып.5, с.171-201.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.10.1979 г.