Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

МАГИСТРАЛИ С ДИСКОНТОМ, МЕНЬШИМ ЕДИНИЦЫ, В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Н.П.Дементьев

§1. Теорема существования магистралей при дисконте, меньшим единицы

В [1] дана теорема о существовании магистралей при некоторых условиях для динамических моделей. Одно из таких условий состоит в том, что функция полезности должна обращаться в нуль на границе положительного ортанта. Ниже показывается, что это предположение, часто не выполняющееся в моделях, является излишним при доказательстве теоремы в том случае, когда технологическое множество - компакт.

Приведем, следуя [1], необходимые ниже определения и некоторые теоремы.

Рассматривается модель экономической динамики, технологические возможности которой задаются с помощью множеств Ω_t, $t=0,1,\dots$, где Ω_t - выпуклое замкнутое множество, лежащее в $R^n_+\times R^n_+$, причем $(0,0)\in\Omega_t$, $(0,y)\notin\Omega_t$ при $y\neq 0$, $Pr_2\Omega_t\cap \operatorname{int}R^n_+\neq\emptyset$.*)

Траекторией модели называется последовательность $(x_t,c_t)_{t=0}^{\infty}$,

*) Если Z - подмножество прямого произведения $R^n_+\times R^n_+$, то, по определению, первая проекция $Pr_1 Z$ множества Z состоит из всех элементов $x\in R^n_+$, для которых найдется $y\in R^n_+$ такой, что $(x,y)\in Z$. Аналогично определяется вторая проекция $Pr_2 Z$ множества Z. Через $\operatorname{int}A$ обозначается внутренность множества A.

удовлетворяющая следующим условиям:

$$(x_t, x_{t+1} + c_{t+1}) \in \Omega_t, \text{ где } x_t \geq 0, c_t \geq 0, t = 0, 1, \ldots \qquad (I.I)$$

Последовательность $(c_t)_{t=1}^{\infty}$, соответствующая траектории (x_t, c_t), называется траекторией потребления.

Оптимальность траектории в определенной модели зависит лишь от последовательности векторов потребления (c_t) и вычисляется с помощью последовательности функций $U = (u_t)_{t=0}^{\infty}$, где $u_t: R_+^n \to R_n^1$. Функция u_t называется функцией полезности или предпочтения для интервала времени t.

Предполагается, что $u_t, t = 0, 1, \ldots$, – вогнутая возрастающая непрерывная функция, причем $u_t(0) = 0$. "Полезность" всей траектории $c = (c_t)_{t=0}^{\infty}$ будем обозначать через $\gamma(c)$, где $\gamma(c) = \sum_{t=0}^{\infty} u_t(c_t)$, а "полезность" ее t-куска через $\gamma_t(c)$:

$$\gamma_t(c) = \sum_{\tau=0}^{t} u_\tau(c_\tau).$$

Обозначим множество всех траекторий потребления, соответствующих всевозможным траекториям, выходящим из начального состояния x_0, через $C(x_0)$.

Траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)_{t=0}^{\infty}$ или соответствующая ей траектория $(\bar{c}_t)_{t=0}^{\infty}$ называется U-оптимальной, если

$$\varliminf_{t \to \infty} (\gamma_t(\bar{c}) - \gamma_t(c)) \geq 0$$

для всех траекторий $c \in C(x_0)$.

Будем говорить, что траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)$ допускает характеристику, если найдется последовательность (p_t), где $p_t \in R_+^n$, такая, что

$$p_{t+1}\bar{x}_{t+1} - p_t\bar{x}_t + u_{t+1}(\bar{c}_{t+1}) \geq p_{t+1}(y-c) - p_t x + u_{t+1}(c). \qquad (I.2)$$

(Здесь $t = 0, 1, \ldots, (x, y) \in \Omega_t, 0 \leq c \leq y$.) При этом последовательность (p_t) называется характеристикой траектории $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)$.

Приведем одно достаточное условие U-оптимальности траекторий.

ТЕОРЕМА I [I]. Пусть траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)$ допускает характеристику $(p_t)_{t=0}^{\infty}$ такую, что $\lim_{t \to \infty} p_t \bar{x}_t = 0$. Тогда траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)$ является U-оптимальной.

В.Л.Макарову принадлежит теорема, в которой выясняется вопрос о существовании магистралей (стационарных U-оптимальных траекторий $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)_{t=0}^{\infty}, \bar{x}_t = \bar{x}, \bar{c}_t = \bar{c}$) для модели, у которой $\Omega_t = \Omega$ для всех t и $u_t = \mu^{-t} u$, где u - вогнутая непрерывная функция, μ - положительное число. Эта модель обозначается в дальнейшем через (Ω, u).

ТЕОРЕМА 2 [I]. Пусть модель (Ω, u) и значение μ таковы, что

I) $\mu \in (1, \lambda_0)$, где $\lambda_0 = \sup\{\lambda \geq 0 | \exists (x,y) \in \Omega$ такой, что $\lambda x < y\}$;

2) $u(c)$ - вогнутая возрастающая непрерывная функция, причем $\sup_{c \in R_+^n} u(c_0) \geq u(c_0)$ $\forall c_0 \in R_+^n$;

3) множество $C = \{c \in R_+^n | c = y - x, (x,y) \in \Omega\}$ непусто, компактно и телесно;

4) $u(c) = 0$, если $c^i = 0$ хотя бы для одного i.

Тогда магистраль существует.

Условие об обращении в нуль функции полезности на границе положительного ортанта в теореме 2 является ограничительным в некоторых экономических моделях. Ниже, предполагая компактность множества Ω, доказывается аналогичная теорема при более широких предположениях относительно функции полезности и множества C.

ТЕОРЕМА 3. Пусть модель (Ω, u) удовлетворяет условиям I,2 теоремы 2 и Ω - компакт. Тогда магистраль существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала две теоремы, каждая из которых является вариантом теоремы 3 при более сильных предположениях относительно модели (Ω, u). Ниже всюду предполагается компактность Ω.

ТЕОРЕМА 3а. Пусть модель (Ω, u) удовлетворяет условиям I-3 теоремы 2 и пусть $\sup_{c \in R_+^n} u(c) = \bar{u} < \infty$. Тогда магистраль существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3а. Пусть $Z_\varepsilon = \{(c,\gamma) \in R^{n+1} | c^i \geq \varepsilon, i = 1, \ldots, n; \gamma \in [0, u(c)]\}$ и пусть W_ε есть выпуклая оболочка множества $Z_\varepsilon \cup 0 \subset R^{n+1}$. Определим функцию $u_\varepsilon(c)$ на R_+^n следующим образом:

$$u_\varepsilon(c)=\begin{cases}\sup\limits_{(c,r)\in W_\varepsilon} r, & c\in \operatorname{int} R^n_+,\\ 0, & c\in R^n_+\setminus \operatorname{int} R^n_+.\end{cases} \tag{I.3}$$

ЛЕММА I. $u_\varepsilon(c)$ совпадает с $u(c)$ на $R^n_+ + \varepsilon v$ и является непрерывной вогнутой возрастающей функцией на R^n_+, где $v=(1,1,\dots,1)\in R^n_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы. Заметим, что множество W_ε состоит из элементов вида $\lambda(c,r)$, где $(c,r)\in Z_\varepsilon$, $\lambda\in[0,1]$.

Пусть $c_0\in R^n_+ +\varepsilon v$. Покажем, что $u_\varepsilon(c_0)=u(c_0)$. В силу вогнутости функции $u(c)$ имеем

$$\lambda u(c)=(1-\lambda)u(0)+\lambda u(c)\le u(\lambda c),\ \lambda\in[0,1].$$

Отсюда

$$u_\varepsilon(c_0)=\sup_{\substack{\lambda c=c_0\\ 0\le\lambda\le 1}}\lambda u(c)\le \sup_{\substack{\lambda c=c_0\\ 0\le\lambda\le 1}} u(\lambda c)=u(c_0).$$

С другой стороны,

$$u_\varepsilon(c_0)=\sup_{\substack{\lambda c=c_0\\ 0\le\lambda\le 1}}\lambda u(c)\ge u(c_0).$$

Тем самым совпадение функций $u_\varepsilon(c)$ и $u(c)$ на $R^n_+ +\varepsilon v$ доказано.

Покажем, что функция $u_\varepsilon(c)$ непрерывна на R^n_+. Пусть $c_0\in R^n_+ \setminus \operatorname{int} R^n_+$. Тогда для $\forall\sigma>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $u_\varepsilon(c)\le\sigma$, как только $\|c-c_0\|\le\delta$, где $\|c\|=\max|c^i|$. Докажем это. Пусть $\|c-c_0\|\le\delta, y\in R^n_+ +\varepsilon v, \lambda y=c, \lambda\ge 0$. Тогда очевидно, что $\lambda\le\delta\varepsilon^{-1}$. Поэтому

$$u_\varepsilon(c)=\sup_{(\lambda,y)\in T_\varepsilon(c)}\lambda u(y)\le\delta\varepsilon^{-1}\bar u,$$

где $T_\varepsilon(c)=\{(\lambda,y)\in R^{n+1}_+ \mid \lambda y=c, y\in R^n_+ +\varepsilon v, 0\le\lambda\le 1\}$.

Таким образом, в качестве δ можно положить величину $\sigma\varepsilon\bar u^{-1}$, и непрерывность $u_\varepsilon(c)$ на $R^n_+\setminus\operatorname{int} R^n_+$ доказана. Непрерывность $u_\varepsilon(c)$ на $\operatorname{int} R^n_+$ следует из ее вогнутости на $\operatorname{int} R^n_+$.

Вогнутость функции $u_\varepsilon(c)$ на R^n_+ следует из того простого факта, что если функция вогнута на открытом выпуклом множестве и непрерывна на его замыкании, то она вогнута на замыкании множества.

Монотонность функции $u_\varepsilon(c)$ следует из очевидного соотношения

$$u_\varepsilon(c_1)=\sup_{(\lambda,y)\in T_\varepsilon(c_1)}\lambda u(y)\ge\sup_{(\lambda,y)\in T_\varepsilon(c_2)}\lambda u(y)=u_\varepsilon(c_2),\ c_1\ge c_2.$$

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 сводилось к существованию величин $\bar{x},\bar{c},p\in R^n_+, \bar{\pi}\in R^1_+$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $(\bar{x},\bar{x}+\bar{c})\in\Omega$,

2) $\bar{\pi}>0,\ \bar{\pi}+\sum_{i=1}^{n}p^i=1$, (I.4)

3) $-p\bar{x}+\mu^{-1}p\bar{x}+\mu^{-1}\bar{\pi}u(\bar{c})\geqslant$
$\geqslant -px+\mu^{-1}pz+\mu^{-1}\bar{\pi}u(c),\ (x,z+c)\in\Omega,\ z\geqslant 0,\ c\geqslant 0,$

и применению теоремы I, поскольку из I)–3) вытекает, что траектория $(\bar{x},\bar{c})$ допускает характеристику $(p_t)=(\mu^{-t}\bar{\pi}^{-1}p)$.

Модель (Ω,u_ε) удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому каждому $m\in N$ можно сопоставить величины $\bar{x}_m,\bar{c}_m,p_m,\bar{\pi}_m$, удовлетворяющие условиям I,2 и условию

$$3')\ s_m=-p_m\bar{x}_m+\mu^{-1}p_m\bar{x}_m+\mu^{-1}\bar{\pi}_m u_{1/m}(\bar{c}_m)\geqslant$$
$$\geqslant -p_m x+\mu^{-1}p_m z+\mu^{-1}\bar{\pi}_m u_{1/m}(c),$$

где $(x,z+c)\in\Omega,\ z\geqslant 0,\ c\geqslant 0.$

Поскольку последовательность $(\bar{x}_m,\bar{c}_m,p_m,\bar{\pi}_m)_{m=1}^{\infty}$ ограничена, можно выделить подпоследовательность $\bar{x}_{m_\alpha},\bar{c}_{m_\alpha},p_{m_\alpha},\bar{\pi}_{m_\alpha}$, сходящуюся к некоторым величинам $\bar{x}_0,\bar{c}_0,p_0,\bar{\pi}_0$ при $\alpha\to\infty$. Эти величины удовлетворяют условиям I,2 из (I.4). Действительно, проверим, что $\bar{\pi}_0>0$. Положим $\theta=\min_i(\mu^{-1}\tilde{y}^i-\tilde{x}^i)>0$, где $\tilde{y}>\mu\tilde{x},(\tilde{x},\tilde{y})\in\Omega$. Тогда

$$(\mu^{-1}-1)p_m\bar{x}_m+\mu^{-1}\bar{\pi}_m u_{1/m}(c_m)\geqslant p_m(\mu^{-1}\tilde{y}-\tilde{x})\geqslant(1-\bar{\pi}_m)\theta.$$

Откуда $\bar{\pi}_m\bar{u}\mu^{-1}\geqslant(1-\bar{\pi}_m)\theta$, или $\bar{\pi}_m\geqslant\frac{\theta\mu}{\bar{u}+\theta\mu}$. Поэтому $\bar{\pi}_0\geqslant\frac{\theta\mu}{\bar{u}+\theta\mu}$.

Покажем, что
$$s_0=-p_0\bar{x}_0+\mu^{-1}p_0\bar{x}_0+\mu^{-1}\bar{\pi}_0 u(\bar{c}_0)\geqslant$$
$$\geqslant -p_0 x+\mu^{-1}p_0 z+\mu^{-1}\bar{\pi}_0 u(c),$$
$$(x,z+c)\in\Omega,\ z\geqslant 0,\ c\geqslant 0. \qquad (I.5)$$

Предположим, что найдутся элементы $x_1,z_1,c_1\geqslant 0,(x_1,z_1+c_1)\in\Omega$, для которых $-p_0x_1+\mu^{-1}p_0z_1+\mu^{-1}\bar{\pi}u(c_1)=s_0+m, m>0$. Поскольку $u(c)\geqslant u_\varepsilon(c), c\in R^n_+$, то для произвольного фиксированного $\sigma>0$ найдется α_0 такое, что при $\alpha>\alpha_0$ выполняется неравенство $s_{m_\alpha}\leqslant s_0+\sigma$. Рассмотрим элементы технологического множества вида $(\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)x_1,\lambda\tilde{y}+(1-\lambda)y_1),\lambda\in[0,1]$. Пусть $x_2(\lambda)=\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)x_1$; $z_2(\lambda)=(1-\lambda)z_1$, $c_2(\lambda)=\lambda\tilde{y}+(1-\lambda)c_1$. Выберем $\lambda>0$ настолько малым, чтобы $-p_0x_2(\lambda)+\mu^{-1}p_0z_2(\lambda)+\mu^{-1}\bar{\pi}_0u(c_2(\lambda))\geqslant s_0+m-\sigma$. Поскольку $c_2(\lambda)\in \operatorname{int} R^n_+$, то найдется $\alpha_1\geqslant\alpha_0$ такое, что $u(c_2(\lambda))=u_{1/m_\alpha}(c_2(\lambda))$ при $\alpha\geqslant\alpha_1$. Поскольку $p_{m_\alpha}\to p_0,\bar{\pi}_{m_\alpha}\to\bar{\pi}_0$, то найдется такое $\alpha_2\geqslant\alpha_1$, что $-p_{m_\alpha}x_2(\lambda)+\mu^{-1}p_{m_\alpha}z_2(\lambda)+$ $+\mu^{-1}\bar{\pi}_{m_\alpha}u(c_2(\lambda))\geqslant s_0+m-2\sigma$ при $\alpha\geqslant\alpha_2$, где $u(c_2(\lambda))=u_{1/m}(c_2(\lambda))$.

Итак,

$$s_0+\sigma \geq s_{m_\alpha} \geq p_{m_\alpha} x_2(\lambda)+\mu^{-1} p_{m_\alpha} x_2(\lambda)+\mu^{-1}\pi_{m_\alpha} u(c(\lambda)) \geq s_0+m-2\sigma,$$

что не верно при малых σ. Тем самым справедливость (I.5) установлена. Поскольку последовательность $(\mu^{-t}\pi_0^{-1}p_0)$ является характеристикой траекторий $(\bar{x}_0, \bar{c}_0)$, то утверждение теоремы 3а следует из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3б. Пусть модель (Ω, u) удовлетворяет условиям I, 2 теоремы 2 и пусть $\sup_{c\in R_+^n} u(c)=\bar{u}<\infty$. Тогда магистраль существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3б. Множество $C=\{c\in R_+^n | c=y-x, (x,y)\in\Omega\}$ непусто и компактно в силу условия I и компактности Ω. Предположим, что Ω не является телесным множеством. Пусть $\bar{\Omega}\subset R_+^n \times R_+^n$ – некоторый телесный компакт, обладающий обычными свойствами технологического множества, т.е. $(0,0)\in\bar{\Omega}, (0,y)\notin\bar{\Omega}$ при $y\neq 0$, $Pr_1 \bar{\Omega} \cap \operatorname{int} R_+^n \neq \emptyset$. Сопоставим каждому $m\in N$ технологическое множество $\Omega_m=\Omega+m^{-1}\bar{\Omega}$. Легко проверить, что модель (Ω_m, u) удовлетворяет условиям теоремы 3а, причем $\lambda_0=\sup\{\lambda\geq 0 | \exists (x,y)\in\Omega$ такой, что $\lambda x<y\}\geq\lambda_m=\sup\{\lambda\geq 0|\exists(x,y)\in\Omega_m$, такой, что $\lambda x<y\}$. Поэтому модель (Ω_m, u) имеет магистраль с дисконтирующим множителем $\mu\in(1,\lambda_0)$, допускающую характеристику, т.е. найдутся величины $\bar{x}_m, \bar{c}_m, p_m, \pi_m$ такие, что

$$-p_m\bar{x}_m+\mu^{-1}p_m\bar{x}_m+\mu^{-1}\pi_m u(\bar{c}_m)\geq \tag{I.6}$$
$$\geq -p_m x+\mu^{-1}p_m(y-c)+\mu^{-1}\pi_m u(c),$$

где $(\bar{x}_m, \bar{x}_m+\bar{c}_m)\in\Omega_m, (x,y)\in\Omega_m, c\leq y, \sum_{i=1}^n p_m^i+\pi_m=1, \pi_m>0.$ Выбирая точку сгущения $(\bar{x}, \bar{c}, p, \pi)$ последовательности $(\bar{x}_m, \bar{c}_m, p_m, \pi_m)$, имеем

$$-p\bar{x}+\mu^{-1}p\bar{x}+\mu^{-1}\pi u(c)\geq -px+\mu^{-1}p(y-c)+\mu^{-1}\pi u(c),$$
$$(\bar{x}, \bar{x}+\bar{c})\in\Omega, (x,y)\in\Omega, c\leq y, \sum_{i=1}^n p^i+\pi=1.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $\pi>0$, поскольку в этом случае траектория $(\bar{x}, \bar{c})$ допускает характеристику $(p_t)=(\mu^{-t}\pi^{-1}p)$. Чтобы доказать неравенство $\pi>0$, подставим в (I.6) для произвольного $m\in N$ тройку $(x,y,c)=(\tilde{x},\tilde{y},0)$, где $(\tilde{x},\tilde{y})\in\Omega$, такой элемент, что $\tilde{y}>\mu\tilde{x}$. Тогда

$$\mu^{-1}\pi_m u(\bar{c})\geq\sum_{i=1}^n p_m^i(\mu^{-1}\tilde{y}^i-\tilde{x}^i)\geq\theta(1-\pi_m)$$

или

$$\pi_m \geq \frac{\theta\mu}{\bar{u}+\theta\mu},$$

где $\theta = \min_i (\mu^{-1}\bar{y}^i - \bar{x}^i) > 0$. Отсюда и $\pi \geq \frac{\theta\mu}{\bar{u}+\theta\mu}$. Теорема 3б доказана.

Условия теоремы 3б отличаются от условий теоремы 3 лишь одним дополнительным ограничением

$$\sup_{c \in R^n_+} u(c) < \infty. \tag{I.7}$$

Однако это неравенство, введенное для упрощения построения аппроксимирующих функций $u_\varepsilon(c)$ и множеств Ω_m, является излишним. Действительно, пусть $\sup_{c \in R^n_+} u(c) = \infty$. Выберем r достаточно большим числом таким, что $\|c\| \leq r$ $\forall c \in C$, и пусть $a = \max_{\substack{\|c\| \leq r \\ c \in R^n_+}} u(c)$. Определим функцию $\tilde{u}(c)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(c) = \min(u(c), a + n - \sum_{i=1}^n e^{-c^i}).$$

Тогда $\tilde{u}(c)$ удовлетворяет условию (I.7) и потому существуют характеристика $\tilde{p}_t = \mu^{-t}\tilde{p}$ и решение $\tilde{x}, \tilde{c}$ такие, что

$$\max_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ 0 \leq c \leq y}} (-\tilde{p}x + \mu^{-1}\tilde{p}(y-c) + \mu^{-1}\tilde{u}(c)) = -\tilde{p}\tilde{x} + \mu^{-1}\tilde{p}\tilde{x} + \mu^{-1}\tilde{u}(\tilde{c}).$$

Поскольку максимизируемая функция совпадает с функцией $-\tilde{p}x + \mu^{-1}\tilde{p}(y-c) + \mu^{-1}u(c)$ в некоторой окрестности $(\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{c})$, то в силу совпадения локального и глобального максимума для выпуклых функций имеет место

$$\max_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ 0 \leq c \leq y}} (-\tilde{p}x + \mu^{-1}\tilde{p}(y-c) + \mu^{-1}u(c)) = -\tilde{p}\tilde{x} + \mu^{-1}\tilde{p}\tilde{x} + \mu^{-1}u(\tilde{c}).$$

Поэтому $(\tilde{x}, \tilde{c}), (\mu^{-t}\tilde{p})$ – соответственно магистраль и характеристика магистральной траектории в модели (Ω, u) . Теорема 3 полностью доказана.

§ 2. Магистрали в динамической модели Леонтьева

В теореме 2 [I] пара $(\bar{x}, \bar{c})$, определяющая магистраль, находилась как неподвижная точка специально подобранного отображения. Задача нахождения неподвижных точек, как известно, сложна и весьма трудоемка. Однако трудности вычисления иногда можно обойти. Ниже предлагается алгоритм нахождения магистралей леонтьевской динамической модели, особенно часто применяемой в экономических расчетах. В этом алгоритме строится некоторая последовательность задач выпуклого программирования, оптимальные решения которых сходятся к паре $(\bar{x}, \bar{c})$, определяющей магистраль.

I. Модель. Определим технологическое множество динамической модели Леонтьева с n отраслями следующим образом: $\Omega = \{(\Phi, \Phi+v) \in R^n_+ \times R^n_+ \mid \exists x \in R^n_+$ такой, что $x \geq Ax + v, \alpha x \leq 1, Bx \leq \Phi\}$.

Здесь $A \geq 0$ – описывающая межотраслевые потоки продуктивная неразложимая матрица, т.е.

I) $\exists x$ такой, что $0 \leq Ax < x$ (продуктивность);

2) из $x \geq 0, x \neq 0, \theta > 0, x \geq \theta Ax$ следует $x > 0$ (неразложимость);

$B \geq 0$ – описывающая фондообразование матрица, не имеющая нулевых столбцов;

$\alpha > 0$ – вектор коэффициентов трудоемкостей.

Величины x, v, Φ интерпретируются соответственно как валовые выпуски отраслей, конечные выпуски отраслей и фонды.

Пусть u – строго вогнутая непрерывная функция на R^n_+, причем $u(0), u(c_0) < \sup_{c \in R^n_+} u(c)\ \forall c_0 \in R^n_+$. Определим $\bar{\rho} = \sup\{\rho \in R^1_+ \mid \exists (\omega_1, \omega_2) \subset \Omega$ такое, что $\rho\omega_1 \leq \omega_2, (\omega_1, \omega_2) \neq 0\}$. Из продуктивности A следует $\bar{\rho} > 1$. Действительно, из $\tilde{x} > A\tilde{x}$ вытекает $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} + \tilde{v})$, где $\tilde{\Phi} = B\tilde{x}_0, \tilde{v} = \tilde{x}_0 - A\tilde{x}_0$, а $\tilde{x}_0 = \lambda\tilde{x}$, $\lambda\alpha\tilde{x} = 1$. Поскольку B не имеет нулевых столбцов, то $\bar{\rho} < \infty$. Предполагается, что дисконтирующий множитель μ принадлежит открытому интервалу $(1, \bar{\rho})$.

Пусть $a = \alpha(E-A)^{-1}, b = \alpha(E-A-(\mu-1)B)^{-1}$. Рассмотрим семейство вспомогательных задач

$$\mu^{-1} u(c) - \pi bc \to \max, \ c \geq 0, \qquad (2.I)$$

зависящее от параметра $\pi \in [0, \infty)$. Обозначим оптимальное решение задачи (2.I) при параметре π через $c(\pi)$, если такое решение существует. Ниже устанавливается, что при некотором $\bar{\pi} \in [0, \infty)$ пара

$$\bar{\Phi} = B(E-A)^{-1} c(\bar{\pi}), \ \bar{c} = c(\bar{\pi}) \qquad (2.2)$$

определяет магистраль.

2. Алгоритм нахождения магистрали. В результате работы алгоритма отыскивается величина $\bar{\pi}$, которая в силу (2.2)

определяет магистраль.

0-шаг. Положим $\pi_0 = 0$ и пусть Π_0 — первое число последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} = (2^n)_{n=1}^{\infty}$, для которого $ac(\psi_n) \leq 1$.
Пусть теперь известны величины π_k, Π_k.

$k+1$-шаг. Рассмотрим три возможных случая.

$i)$ $ac(\pi_k) = 1$. Тогда полагаем $\bar{\pi} = \pi_k$.

$ii)$ $ac(\Pi_k) = 1$. Тогда полагаем $\bar{\pi} = \Pi_k$.

В случаях $i), ii)$ работа алгоритма завершается на $k+1$-м шаге.

$iii)$ Случаи $i), ii)$ не имеют места. Тогда полагаем $\pi_{k+1} = \pi_k$, $\Pi_{k+1} = 2^{-1}(\pi_k + \Pi_k)$ при $ac(2^{-1}(\pi_k + \Pi_k)) \leq 1$ и $\pi_{k+1} = 2^{-1}(\pi_k + \Pi_k)$, $\Pi_{k+1} = \Pi_k$ в противном случае.

Если для каждого шага алгоритма случаи $i), ii)$ не имеют места (алгоритм не прерывается на некотором шаге), полагаем

$$\bar{\pi} = \lim_{k \to \infty} \pi_k = \lim_{k \to \infty} \Pi_k .$$

3. Обоснование алгоритма. Исследуем необходимые ниже свойства оптимизационных задач (2.I). Для неразложимой и продуктивной матрицы A, как известно, выполняется неравенство $(E-A)^{-1} > 0$. Легко можно показать, что матрица $A + (\mu - 1)B$ также продуктивна и неразложима при $\mu \in [1, \bar{\rho})$. Поэтому векторы a и b, определенные при описании алгоритма нахождения магистрали, строго положительны.

ЛЕММА 2. Существует $\pi^0 \in R^1_+$ такой, что $ac(\pi^0) \leq 2^{-1}$.

Действительно, в качестве π^0 можно выбрать решение уравнения $f(\pi) = 0$, где

$$f(\pi) = \max_{ac = 2^{-1}} (\mu^{-1} u(c) - \pi bc),$$

поскольку в силу строгой вогнутости $u(c)$ и условия $u(0) = 0$

$$\mu^{-1} u(c) - \pi^0 bc \leq 0$$

при $ac \geq 2^{-1}$,

$$\max_{ac \leq 2^{-1}} (\mu^{-1} u(c) - \pi^0 bc) > 0.$$

Лемма доказана.

Пусть Π — множество всех значений параметра $\pi \geq 0$, при которых задача (2.I) имеет решение. Пусть π^0 — число, определенное в лемме 2. Тогда очевидно, что и всякое $\pi \geq \pi^0$ удовлетворяет условию леммы.

ЛЕММА 3. Множество Π открыто, причем отображение $c(\pi)$ непрерывно на Π.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi' \in \Pi$. Поскольку функция $u(c)$ не достигает максимума на R^n_+, то $\pi' > 0$. Покажем, что найдется окрестность π', лежащая в Π. Пусть это не так. Тогда в силу совпадения локального и глобального максимумов для вогнутой функции найдутся последовательности $(\pi_s)_{s=1}^{\infty}$, $(c_s)_{s=1}^{\infty}$, число $\delta > 0$ такие, что

$$\lim_{s\to\infty} \pi_s = \pi', \ \|c_s - c(\pi')\| = \delta, \ c_s \geq 0,$$

$$\mu^{-1}u(c_s) - \pi_s bc_s \geq \mu^{-1}u(c(\pi')) - \pi_s bc(\pi').$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $c_s \to \tilde{c}$. Переходя к пределу, имеем

$$\mu^{-1}u(\tilde{c}) - \pi' b\tilde{c} \geq \mu^{-1}u(c(\pi')) - \pi' bc(\pi'), \ \|\tilde{c} - c(\pi')\| = \delta,$$

что противоречит строгой вогнутости функции $u(c) - \pi' bc$. Итак, Π – открытое множество.

Предположим теперь, что $c(\pi)$ не является непрерывной функцией в точке $\pi' \in \Pi$. Тогда найдутся последовательность $(\pi_s)_{s=1}^{\infty}$ такая, что $\pi_s \to \pi'$, $s \to \infty$, и число $\delta > 0$ такое, что $\|c(\pi_s) - c(\pi')\| \geq \delta$. Пусть c_s – точка пересечения отрезка, соединяющего точки $c(\pi')$ и $c(\pi_s)$ со сферой $\{c \,/\, \|c - c_s\| = \delta\}$. Тогда $\|c_s - c(\pi')\| = \delta$, $c_s \geq 0$, $\mu^{-1}u(c_s) - \pi_s bc_s \geq \mu^{-1}u(c(\pi')) - \pi_s bc(\pi')$, что невозможно, как было показано при доказательстве первого утверждения леммы. Лемма доказана.

Пусть $\pi'' = \inf_{\pi \in \Pi} \pi$. Тогда $\Pi = (\pi'', \infty)$. Для доказательства этого факта достаточно показать, что из $\pi_2 > \pi_1$, $\pi_1 \in \Pi$ следует $\pi_2 \in \Pi$. Действительно, функция $\mu^{-1}u(c) - \pi_1 bc$ ограничена сверху на R^n_+, поэтому функция $\mu^{-1}u(c) - \pi_2 bc$ неотрицательна лишь на ограниченном множестве, и, стало быть, максимум $\mu^{-1}u(c) - \pi_2 bc$ достигается в некоторой точке.

Покажем, что найдется $\sigma > 0$ такое, что

$$ac(\pi) > 1, \text{ если } \pi \in \Pi, \ |\pi - \pi''| < \sigma. \tag{2.3}$$

Имеем для произвольного фиксированного $c \in R^n_+$

$$\mu^{-1}u(c(\pi)) - \pi bc(\pi) \geq \mu^{-1}u(c) - \pi bc. \tag{2.4}$$

Допустим, что (2.3) не имеет места. Тогда в силу компактности множества $\{c \geq 0 | ac \leq 1\}$ можно выделить последовательность (π_s) такую, что $\pi_s \to \pi'' + 0, c(\pi_s) \to c_0$ при $s \to \infty$. Переходя в (2.4) к пределу по $\pi_s, c(\pi_s)$, имеем

$$\mu^{-1} u(c_0) - \pi'' b c_0 \geq \mu^{-1} u(c) - \pi'' bc,\ c \in R^n_+,$$

т.е. $\pi'' \in \Pi$. Это противоречит лемме 3. Соотношение (2.3) доказано.

ТЕОРЕМА 4. Система соотношений

$$ac = 1 \tag{2.5}$$

$$\pi b - g \geq 0,\ c(\pi b - g) = 0,\ g \in grad(\mu^{-1} u(c)), \tag{2.6}$$
$$c \geq 0,\ \pi > 0$$

имеет хотя бы одно решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π – определенное выше множество значений параметра π, при которых задача (2.I) имеет оптимальное решение. При $\pi \in \Pi$ пара $(c(\pi), \pi)$ удовлетворяет соотношениям (2.6) как необходимым условиям оптимальности в задаче (2.I), соответствующей параметру π. При $\pi = \pi_0$ (см. лемму 2) функция $f(\pi) = ac(\pi)$ принимает значение меньше единицы. С другой стороны, из (2.3) следует существование $\pi_1 \in \Pi$ такого, что $f(\pi_1) > 1$. Вектор-функция $c(\pi)$ непрерывна на Π (см. лемму 3) и, стало быть, $f(\pi)$ также непрерывна на Π. Поэтому существует $\bar{\pi} \in (\pi^0, \pi_1)$ такое, что $f(\bar{\pi}) = 1$. Теорема доказана.

Легко видеть, что алгоритм, описанный выше, реализует поиск одного из решений уравнения $f(\pi) = 1$, а следовательно, и соответствующего решения системы (2.5), (2.6). Покажем теперь, что пара $(\bar{\Phi}, \bar{c})$, определенная в (2.2), задает магистраль модели Леонтьева.

Для этого достаточно установить, что решение $\Phi = \bar{\Phi}$, $F = \bar{\Phi}$, $c = \bar{c}$, $y = \bar{c}$, $x = (E-A)^{-1}\bar{c}$ оптимально в следующей экстремальной задаче:

$$-\varphi\Phi + \mu^{-1}\varphi F + \mu^{-1} u(c) \to max$$

при ограничениях

$$x \geq Ax + y, \tag{2.7}$$
$$\alpha x \leq 1, \tag{2.8}$$
$$Bx \leq \Phi, \tag{2.9}$$
$$c + F \leq \Phi + y, \tag{2.10}$$
$$x, y, c, \Phi, F \geq 0,$$

где $\varphi = \mu\bar{\pi}\alpha(E - A - (\mu - 1)B)^{-1}$. Заметим, что система (2.7)-(2.10) есть явное выражение соотношений

$$(\Phi, \Phi + y) \in \Omega,$$

$$c + F \leq \Phi + y, \quad 0 \leq c \leq \Phi + y.$$

Очевидно, что решение $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}, \bar{c}, \bar{c}, (E-A)^{-1}\bar{c})$ допустимо. Покажем его оптимальность. Действительно, оценки $s_1 = \bar{\pi}\alpha(E-A-(\mu-1)B)^{-1}$, $s_2 = \bar{\pi}$, $s_3 = (\mu-1)\bar{\pi}\alpha(E-A-(\mu-1)B)^{-1}$, $s_4 = s_1$, соответствующие ограничениям (2.7)-(2.10), удовлетворяют достаточным условиям оптимальности Куна – Таккера в дифференциальной форме. Справедливость соответствующих неравенств по переменным Φ, y, F, x проверяется непосредственно, причем неравенства выполняются как строгие равенства. Справедливость неравенств, соответствующих переменной c, и условий дополняющей нежесткости следует из (2.6).

4. Пример. Пусть функция полезности u задается следующим образом:

$$u(c) = \max\{\lambda \mid \lambda\gamma \leq c\},$$

где γ – некоторый ненулевой неотрицательный вектор, задающий структуру потребления.

Пусть $\mu \in (1, \bar{\rho})$ – фиксированный дисконтирующий множитель. По теореме 4 модель Леонтьева с такой функцией полезности имеет магистраль $(\bar{\Phi}^{\mu}_t, \bar{c}^{\mu}_t)^{\infty}_{t=0} \equiv (\bar{\Phi}^{\mu}, \bar{c}^{\mu})^{\infty}_{t=0}$, где $\bar{c}^{\mu}$ удовлетворяет (2.5), (2.6) при некотором $\bar{\pi} > 0$. Покажем, что магистраль не зависит от параметра μ, т.е. $(\bar{\Phi}^{\mu}, \bar{c}^{\mu}) = (\bar{\Phi}^{\nu}, \bar{c}^{\nu})$, если $\mu, \nu \in (1, \bar{\rho})$.

Докажем сначала, что для всякого $\mu \in (1, \bar{\rho})$ выполняется равенство

$$\bar{c}^{\mu} = \bar{\lambda}^{\mu}\gamma, \tag{2.11}$$

где $\bar{\lambda}^{\mu} = \max\{\lambda \mid \lambda\gamma \leq \bar{c}^{\mu}\}$.

Предположим противное. Тогда для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(\bar{c}^{\mu})^i > \bar{\lambda}^{\mu}\gamma^i$. Из (2.5), (2.6) следует, что $\bar{\pi}^{\mu}b^i = g^i$ для некоторого $g \in \mathrm{grad}(\mu^{-1}u(\bar{c}^{\mu}))$. Поскольку $b^i > 0, \bar{\pi}^{\mu} > 0$, то $g^i > 0$. Но в точке $\bar{c}^{\mu}$ производная $\partial u / \partial c^i (\bar{c}^{\mu}) = 0$, поскольку малые вариации по переменной не влияют на значение функции $u(c)$. Поэтому $g^i = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.11).

Из (2.5) и (2.11) получаем $\bar{c}^{\mu} = (a\gamma)^{-1}\gamma$, и, стало быть, величины $\bar{\Phi}^{\mu} = B(E-A)^{-1}\bar{c}^{\mu}$, $\bar{c}^{\mu}$ не зависят от μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
2. KOOPMANS T.C. A model of a continuing state with scarle capital. - Cowles foundation paper N 353. Preprint, 1971.

Поступила в ред.-изд. отдел
30.10.1978 г.