УДК 51.330.115

ОБ ОДНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕХНОЛОГИЕЙ

В.Н.Воробьева

Данная работа представляет собой попытку изучения обобщения модели Неймана - Гейла на случай, когда производственное отображение модели зависит от времени и по ряду дополнительных ограничений не обладает свойством нормальности.

Развитие экономики,описываемой моделью, оценивается наличием оптимальной траектории, т.е. такой последовательности состояний модели, что в каждый момент времени производство достигает максимального темпа роста, называемого темпом роста модели в данный момент. Преимущество такого подхода состоит в том,что, во-первых, он позволяет оценивать развитие экономики локально, т.е. в пределах двух соседних периодов времени, и не требует рассмотрения всей последовательности состояний. Во-вторых, этот критерий не требует введения каких-либо дополнительных оценок, как, например, функций полезности (необходимых в случае, когда экономика нацелена на максимальное потребление продуктов) или цен на продукты.

Экономическая интерпретация основных результатов состоит в следующем: экономическая система, описанная моделью, не может функционировать бесконечно долго, если, начиная с некоторого момента времени, темп роста одного из продуктов существенно опережает темп роста модели (т.е. если последовательность разностей между темпом роста этого продукта и темпом роста модели больше некоторого положительного числа). При более слабом условии положительности каждой из указанных разностей траектории бесконечные последовательности состояний модели существуют; все они обладают свойством асимптотической стационарности и асимптотической оптимальности.

Рассмотрим следующую модель экономики. Экономика функционирует в дискретном времени $t=0,1,2,\dots$ Каждый момент времени t считается началом производственного цикла. Состояние экономики в момент t характеризуется некоторым количеством фондов H_t, которое делится на две части, одна из них предназначена для дальнейшей переработки, т.е. для воспроизводства, а другая - для непроизводственного потребления. То, что идет на воспроизводство, в свою очередь делится на две части K_t и L_t, где K_t - объем производственных фондов, L_t - объем фондов, предназначенных для оплаты труда, т.е. суммарная заработная плата.

Будем предполагать, что:

I) Непроизводственное потребление пропорционально L_t с коэффициентом пропорциональности μ_t.

Таким образом, получим,

$$H_t = K_t + (1+\mu_t)L_t \, .$$

2) Для всех t справедливо следующее неравенство:

$$K_t \geq \nu_t K_t \, ,$$

где $0<\nu_t<1$. Это условие можно интерпретировать так: производственные фонды частично изнашиваются и оставшаяся часть переходит в следующий период, ν_t - коэффициент износа фондов.

3) Для всех t имеет место соотношение

$$L_{t+1} \geq \gamma_t L_t \, .$$

Пусть γ_t - темп роста народонаселения в момент t, тогда условие 3 означает, что потребность в рабочей силе растет не медленнее, чем население.

Для каждого момента t определена производственная функция F_t, заданная на $R^1_+ \times R^1_+$ и со значениями в R^1_+, где $R^1_+=[0,\infty)$. Относительно функции F_t предполагаем, что она непрерывна и дифференцируема по обеим переменным, однородна первой степени по обеим переменным, строго вогнута,

$$F_t(0,L)=F_t(K,0)=0, \qquad t=0,1,2\dots,$$

для всех $K,L \in R^1_+$;

$$\left.\frac{dF_t}{dK}\right|_{(0,1)} \le M, \quad \left.\frac{dF_t}{dL}\right|_{(1,0)} \le P, \quad t=0,1,\dots,$$
$$M>0, \; P>0.$$

Положим

$$x_t=(K_t,L_t), \quad A_t=\begin{pmatrix} \nu_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Производственное отображение модели в момент t (без учета условий 2 и 3) определяется соотношением

$$a_t(x_t)=\langle 0,A_t x_t\rangle + F_t(K_t,L_t)\cdot\beta_t,$$

где $\langle 0,A_t x_t\rangle=\{x: 0\le x\le A_t x_t\}$, $\beta_t=\{x: x\times(1,1+\mu_t)\le 1\}$.

Очевидно, что отображения a_t супержинейны; следовательно, каждое из них задает модель Неймана - Гейла [I], знак " $\times$ " означает скалярное произведение.

Введем следующие обозначения:

$$u_t=\frac{L_t}{K_t}, \quad F_t(1,u_t)=f_t(u_t).$$

Рассмотрим последовательность функций α_t, действующих из R^1_+ в R^1_+:

$$\alpha_t(u)=\frac{f_t(u)+\nu_t}{1+(1+\mu_t)u}, \quad t=0,1,\dots$$

Для каждого t функция α_t обладает следующими свойствами:

I) $\alpha_t(0)=\nu_t$; это следует из свойств функций F_t.

2) $\lim\limits_{u\to\infty}\alpha_t(u)=0.$

3) У функции α_t максимум достигается ровно в одной точке на $[0,\infty)$. Докажем это свойство. Если функция α_t монотонна, то из свойства 2 следует, что она убывает на $[0,\infty)$, и, значит, ее максимум достигается в единственной точке $u^*=0$. Предположим, что α_t не является монотонной. Тогда α_t имеет точки экстремума на $[0,\infty)$, для которых $\alpha_t'(u^*)=0$. Из строгой вогнутости функции F_t следует, что множество $U_t^*=\{u_1^*,u_2^*,\dots\}$ таких точек не более чем счетно, причем

$$u_1^*<u_2^*<\dots$$

Поскольку u_i^* - точки экстремума, $\alpha_t'(u_i^*)=0$, $i=1,2,\dots$, это равносильно тому, что

$$f'_t(u_i^*)(1+(1+\mu_t)u_i^*)-(f_t(u_i^*)+\nu_t)(1+\mu_t)=0$$

или

$$\frac{1}{1+\mu_t}\, f'_t(u_i^*)=\alpha_t(u_i^*).$$

Поскольку f'_t строго убывает, то $f'_t(u_1^*)>f'_t(u_2^*)>\ldots$, а значит, $\alpha_t(u_1^*)>\alpha_t(u_2^*)>\ldots$ Отсюда нетрудно видеть, что α_t в точке u_1^* имеет локальный максимум и он является единственным экстремумом функции α_t на $[0,\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Темпом роста модели в момент t называется

$$\bar{\alpha}_t=\max_{u\in R^1_+}\alpha_t(u)=\alpha_t(\bar{u}_t).$$

Заметим, что для каждого момента времени t число $\bar{\alpha}_t$ является неймановским темпом роста модели Неймана - Гейла, задаваемой отображением a_t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $\{x_t\}$ $(t=0,1,\ldots)$ $(x_t\in R^2_+)$ называется траекторией, если $x_{t+1}\in a_t(x_t)$, $t=0,1,\ldots$, и $x_t=(K_t,L_t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3.

Рассмотрим отображение $s: R^1_+\times R^1_+\to R^1_+$ такое, что $s(K,L)=\frac{L}{K}$. Тогда каждой последовательности $\{x_t\}$, $t=0,1,\ldots$, соответствует последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\ldots$, где $u_t=s(x_t)$.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы в модели существовала траектория, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\ldots$, что*

$$\frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)}\le u_t\le\frac{\gamma_{t-1}\,u_{t-1}}{f_{t-1}(u_{t-1})+\nu_{t-1}-\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1}}. \quad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Необходимость. Пусть последовательность $\{x_t\}$, $t=0,1,\ldots$, где $x_t=(K_t,L_t)$, - траектория. Из определения траектории следует, что для $\{x_t\}$ выполняются условия 2 и 3. Положим $u_t=L_t/K_t$, $\gamma_{t-1}=K_t/K_{t-1}$, $\varphi_{t-1}=L_t/L_{t-1}$. Тогда $u_t=\frac{L_t}{K_t}=\frac{\varphi_{t-1}L_{t-1}}{\gamma_{t-1}K_{t-1}}=\frac{\varphi_{t-1}}{\gamma_{t-1}}u_{t-1}$. Условие 3 равносильно соотношению $\varphi_{t-1}\geqslant\varphi_{t-1}\frac{\mu_{t-1}}{\mu_t}$. Так как

$$K_t=F_{t-1}(K_{t-1},L_{t-1})+\nu_{t-1}K_{t-1}-L_t(1+\mu_t),$$

то

$$\gamma_{t-1}=\frac{K_t}{K_{t-1}}=f_{t-1}(u_{t-1})+\nu_{t-1}-\frac{L_t}{K_{t-1}}(1+\mu_t)=f_{t-1}(u_{t-1})+$$

$$+\nu_{t-1}-\varphi_{t-1}u_{t-1}(1+\mu_t)\leq f_{t-1}(u_{t-1})+\nu_{t-1}-\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1}.$$

Отсюда следует, что необходимым условием для выполнения 3) является неравенство

$$u_t\geqq\frac{\gamma_{t-1}u_{t-1}}{f_{t-1}(u_{t-1})+\nu_{t-1}-\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1}}. \qquad (2)$$

Условие 2 равносильно соотношению $\gamma_{t-1}\geqslant\nu_{t-1}$. Так как

$$L_t=(F_{t-1}(K_{t-1},L_{t-1})+\nu_{t-1}K_{t-1}-K_t)\frac{1}{1+\mu_t},$$

то

$$\varphi_{t-1}=\frac{L_t}{L_{t-1}}=\frac{1}{1+\mu_t}\left(F_{t-1}\left(\frac{1}{u_{t-1}},1\right)+\frac{\nu_{t-1}}{u_{t-1}}-\frac{\gamma_t}{u_{t-1}}\right),$$

отсюда

$$\varphi_t\leq\frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{u_{t-1}(1+\mu_t)}.$$

Следовательно,

$$u_t\leqq\frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)}. \qquad (3)$$

2. Достаточность. Предположим, что существует последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\ldots$, для которой выполняется (I). Положим

$$K_t=\frac{1}{1+u_t(1+\mu_t)}H_t,\quad L_t=\frac{u_t}{1+u_t(1+\mu_t)}H_t,$$

где H_0 – начальный запас фондов,

$$H_t=F_{t-1}(K_{t-1},L_{t-1})+\nu_{t-1}K_{t-1},\quad t=1,2,\ldots$$

Докажем, что последовательность $\{x_t\}=\{(K_t,L_t)\}$, $t=0,1,\ldots$, является траекторией.

I) $x_t\in a_{t-1}(x_{t-1})$, $t=1,2,\ldots$, так как

$$K_t+(1+\mu_t)L_t=H_t. \qquad (4)$$

2) Докажем, что x_t удовлетворяет условию 3, $t=0,1,2,\ldots$ По условию теоремы,

$$u_t\geqslant\frac{\gamma_{t-1}u_{t-1}}{f_{t-1}(u_{t-1})+\nu_{t-1}-\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1}}.$$

Это равносильно следующему условию:

$$L_t[F_{t-1}(K_{t-1},L_{t-1})+\nu_{t-1}K_{t-1}]\geq L_{t-1}\gamma_{t-1}[K_t(1+\mu_t)L_t].$$

Учитывая (4), получим, что $L_t \geq L_{t-1}\gamma_{t-1}$.

3) Докажем, что x_t удовлетворяет условию 2. По условию теоремы, $u_t \leq \frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)}$, отсюда $L_t \leq \frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)} K_t$.

Сопоставляя это неравенство с (4), получим условие 2.

Таким образом, условия 2 и 3 задают множество возможных значений u_t, которые соответствуют траекториям моделей

$$U_t(u_{t-1}, f_{t-1}) = \left[\frac{\gamma_{t-1}\, u_{t-1}}{f_{t-1}(u_{t-1}) + \nu_{t-1}(1+\mu_t)\gamma_{t-1}u_{t-1}}, \frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)}\right],$$

$t = 1, 2, \ldots$

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы множества $U_t(u_{t-1}, f_{t-1})$, $t=1,2,\ldots$, были непусты, необходимо и достаточно, чтобы для $t=1,2,\ldots$ выполнялись условия

$$\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1} \leq f_{t-1}(u_{t-1}). \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $U_t(u_{t-1}, f_{t-1}) \neq \Lambda$ равносильно неравенству

$$\frac{\gamma_{t-1}\, u_{t-1}}{f_{t-1}(u_{t-1}) + \nu_t(1+\mu_t)u_{t-1}} \leq \frac{f_{t-1}(u_{t-1})}{\nu_{t-1}(1+\mu_t)}$$

или неравенству

$$(f_{t-1}(u_{t-1}) + \nu_t)(f_{t-1}(u_{t-1}) - \gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1}) \geq 0.$$

Поскольку $f_t(u) \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, u \in [0, \infty)$, то

$$\gamma_{t-1}(1+\mu_t)u_{t-1} \leq f_{t-1}(u_{t-1}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Траектория $\{x_t\}$, $t = 0, 1, \ldots$, называется хорошей, если $\inf_t \alpha_t(u_t) > 0$, $u_t = S(x_t)$.

ТЕОРЕМА 2. Если параметры модели удовлетворяют условиям

1) $\nu_t \geq \nu > 0$,

2) $\gamma_t \geq \gamma > 0$,

3) $\mu_t \leq \bar{\mu} < +\infty$,

то все траектории в модели являются хорошими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим некоторую траекторию $\{x_t\}$, $t = 0, 1, \ldots$ Ей соответствует последовательность $\{u_t\}$, $t = 0, 1, \ldots$, где $u_t = S(x_t)$. Предположим сначала, что последовательность

$\{u_t\}$, $t=0,1,\dots$, ограничена. Докажем, что тогда $\inf\limits_t \alpha_t(u_t)>0$. Действительно,

$$\alpha_t(u_t)=\frac{f_t(u_t)+\nu_t}{1+(1+\mu_{t+1})u_t}\geqslant\frac{f_t(u_t)+\nu_t}{1+(1+\mu_{t+1})M_1}\geqslant\frac{\nu_t}{1+(1+\mu_{t+1})M_1}\geqslant\frac{\nu}{(1+\bar\mu)M_1}>0,$$

где $M_1\geqslant\sup\limits_t u_t$. Следовательно, $\inf\limits_t \alpha_t(u_t)>0$.

2) Докажем, что если $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, - траектория, то соответствующая последовательность $\{u_t\}$ ограничена. Пусть это неверно, тогда существует такая подпоследовательность $\{u_{t_k}\}$, $k=0,1,\dots$, что $u_{t_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$. Возьмем $L_{t_k}=1$, тогда $K_{t_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. По следствию к теореме I выполняется неравенство

$$\gamma_{t_k}(1+\mu_{t_k+1})u_{t_k}\leqslant f_{t_k}(u_{t_k})$$

или

$$\gamma_{t_k}(1+\mu_{t_k+1})\,1/K_{t_k}\leqslant\frac{F_{t_k}(K_{t_k},1)}{K_{t_k}}.$$

Из условия вогнутости F_{t_k} следует, что

$$\frac{F_{t_k}(K_{t_k},1)}{K_{t_k}}\leqslant\frac{dF_{t_k}}{dK}\bigg|_{(0,1)}\leqslant M.$$

Следовательно, $\gamma_{t_k}(1+\mu_{t_k+1})\cdot 1/K_{t_k}\leqslant M$. Учитывая условия 2 и 3 теоремы, придем к противоречию.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Условия 2 и 3 являются достаточными, но не необходимыми. Так, например, условие I можно заменить на условие $\inf\limits_t F_t(1,u)>0,\ u\in(0,\infty)$, и теорема останется справедливой.

2. Аналогично второй части теоремы доказывается, что если $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, - траектория, то последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\dots$, отделена от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Траектория $\{\bar x_t\}$, $t=0,1,\dots$, называется оптимальной, если для соответствующей ей последовательности $\{\bar u_t\}$, $t=0,1,\dots$, где $\bar u_t=S(\bar x_t)$, существует такое t^* , что для всех $t>t^*$

$$\alpha_t(\bar u_t)=\max_{u_t\in[0,+\infty)}\alpha_t(u_t)\ (=\bar\alpha_t).$$

Из определения следует, что оптимальная траектория проходит по неймановским процессам моделей, задаваемых последовательностью производственных отображений $\{a_t\}$, $t=0,1,\dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, называется асимптотически стационарной, если существует $\lim\limits_{t\to\infty}u_t$, где $u_t=S(x_t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, называется асимптотически оптимальной, если $\lim\limits_{t\to\infty}(u_t-\bar u_t)=0$, где $\bar u_t$

соответствует оптимальной траектории модели Неймана – Гейла, определяемой отображением a_t, $\bar{u}_t = S(\bar{x}_t)$; $u_t = S(x_t)$, $t=0,1,\dots$

ТЕОРЕМА 3. Пусть в модели существует траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$ Если найдется такой момент времени t^*, что для всех $t > t^*$ выполняется неравенство

$$\varphi_t > \xi_t \qquad (6)$$

(или $\varphi_t < \xi_t$), где $\varphi_t = \frac{L_{t+1}}{L_t}$, $\xi_t = \frac{K_{t+1}}{K_t}$, $t=0,1,\dots$, то траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, является асимптотически стационарной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u_{t+1} = \frac{L_{t+1}}{K_{t+1}} = \frac{\varphi_t L_t}{\xi_t K_t} = \frac{\varphi_t}{\xi_t} u_t$, то для достаточно больших t выполняется неравенство $\varphi_t > \xi_t$. Это означает, что с некоторого места последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\dots$, монотонно возрастает. Поскольку $\{x_t\}$ – траектория, из доказательства теоремы 2 следует, что последовательность $\{u_t\}$ ограничена сверху; значит, существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mu_t \le \mu_{t+1}$, $t=0,1,\dots$ Если существует такой момент времени t^*, что

$$\gamma_t - \bar{\alpha}_t > 0, \ t \ge t^*, \qquad (7)$$

то все траектории в модели являются асимптотически стационарными и асимптотически оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы, начиная с некоторого места, выполняется неравенство $\gamma_t > \bar{\alpha}_t$. Тогда для любой траектории выполняется условие (6) теоремы 3. Действительно, $\varphi_t \ge \gamma_t > \bar{\alpha}_t$; с другой стороны, $\xi_t < \bar{\alpha}_t$, так как если бы выполнялось $\xi_t \ge \bar{\alpha}_t$, то для всех $u \in U_t(u_{t-1}, f_{t-1})$ было бы справедливо неравенство

$$\alpha_t(u) = \frac{\xi_t K_t + \varphi(1+\mu_{t+2}) L_t}{K_t + (1+\mu_{t+1}) L_t} > \bar{\alpha}_t \frac{K_t + (1+\mu_{t+2}) L_t}{K_t + (1+\mu_{t+1}) L_t} \ge \bar{\alpha}_t ,$$

но $\bar{\alpha}_t = \max\limits_{u \in [0,\infty)} \alpha_t(u)$. Следовательно, $\varphi_t > \xi_t$, $t \ge t^*$. По теореме 3 траектория является асимптотически стационарной, т.е. существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t$.

Докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}(u_t - \bar{u}_t) = 0$. Так как существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi_t}{\xi_t} = 1$, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi_t - \xi_t) = 0$, но $\varphi_t > \bar{\alpha}_t > \xi_t$ и

$\varphi_t > \alpha_t > \xi_t$, значит, $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi_t - \bar{\alpha}_t) = 0$. Из непрерывности и строгой вогнутости функций F_t, $t=0,1,\dots$, следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}(\bar{u}_t - u_t) = 0$, т.е. траектория является асимптотически оптимальной.

Это следствие выражает магистральное свойство оптимальной траектории.

ТЕОРЕМА 4. Если технология постоянна (т.е. $F_t = F$, $\nu_t = \nu$, $\mu_t = \mu$, $\gamma_t = \gamma$, $t = 0,1,\dots$), то для того чтобы в модели существовала оптимальная траектория, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{\alpha} \geq \gamma, \quad \bar{\alpha} \geq \nu. \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Необходимость. Пусть $\{\bar{x}_t\}$, $t=0,1,\dots$, – оптимальная траектория. Тогда $\bar{u}_t = const$, $t=0,1,\dots$, где $\bar{u}_t = S(\bar{x}_t)$. Отсюда $\xi_t = \varphi_t = \bar{\alpha}_t$, $t=0,1,\dots$, но $\varphi_t \geq \gamma$, $\xi \geq \nu$; следовательно, (8) справедливо.

2) Достаточность. Пусть выполняется (8). Положим $u_t = \bar{u}$. Тогда любая последовательность $\{\bar{x}_t\}$, $t=0,1,\dots$, для которой $\{u_t\} = \{\bar{u}\}$ и $\bar{x}_t \in a_t(\bar{x}_{t-1})$, $t=1,2,\dots$, является оптимальной траекторией.

СЛЕДСТВИЕ. Если технология постоянна и оптимальной траектории в модели не существует, то не существует траекторий вообще.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оптимальной траектории в модели не существует. Предположим, что существует некоторая траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$ Тогда по теореме не выполняется по крайней мере одно из условий (8). Пусть, например, $\bar{\alpha} < \gamma$. По следствию к теореме 3 траектория $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, является асимптотически стационарной и асимптотически оптимальной. Для этого необходимо, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty}(\gamma_t - \bar{\alpha}_t) = 0$, но $\gamma_t = \gamma$, $\bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}$, $t=0,1,\dots$, $\gamma - \bar{\alpha} > 0$. Следовательно, траекторий в модели не существует. Случай, когда не выполняется второе условие (8), аналогичен.

В теореме 4 постоянство технологии существенно. Покажем, что в случае, когда технология переменна, условия, аналогичные условию (8), не являются необходимыми (но достаточными) для существования траекторий в модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Оптимальным темпом роста продукта L на траектории $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, в момент t называется

$$\bar\varphi_t(u_t)=\frac{\bar L_{t+1}}{L_t}.$$

Аналогично определяется оптимальный темп роста продукта K на траектории $\{x_t\}$, $t=0,1,\dots$, в момент t: $\bar f_t(u_t)=\frac{\bar K_{t+1}}{K_t}$, где $\bar K_{t+1}$ и $\bar L_{t+1}$ таковы, что

$$\frac{F_{t+1}(\bar K_{t+1},\bar L_{t+1})+\nu_t\bar K_{t+1}}{\bar K_{t+1}+(1+\mu_{t+1})\bar L_{t+1}}=\max_{(K,L)\in R^2_+}\frac{F_{t+1}(K,L)+\nu_t K}{K+(1+\mu_{t+1})}.$$

Для того чтобы в модели существовала оптимальная траектория, необходимо и достаточно, чтобы, начиная с некоторого места, выполнялись неравенства

$$\bar\varphi_t(\bar u_t)\geq\gamma_t\ ,\quad \bar f_t(u_t)\geq\nu_t. \tag{9}$$

(Это утверждение легко проверяется.) Условия (9) являются аналогом условий (8) для переменной технологии.

Следующий пример показывает, что в случае невыполнения (9) (т.е. существует такая подпоследовательность моментов времени $\{t_k\}$, $k=0,1,\dots$, что для этих моментов не выполняется хотя бы одно из двух неравенств из (9)) траектории в модели могут существовать.

ПРИМЕР. Построим траекторию, для которой $\bar\varphi_t(u_{t-1})<\gamma_t$, $t=1,2,\dots$, и она не является асимптотически оптимальной.

Пусть $F_t(K_t,L_t)=K_t^{1-\beta_t}\cdot L_t^{\beta_t}$, $\beta_t\in(0,1)$, $t=0,1,\dots$, тогда $f_t(u)=u^{\beta_t}$. Предположим, что последовательности параметров $\{\mu_t\}$, $t=0,1,\dots$, и $\{\nu_t\}$, $t=0,1,\dots$, заданы. Построим такую последовательность $\{u_t\}$, $t=0,1,\dots$, что $u_t\in U_t(u_{t-1},f_{t-1})$, $t=1,2,\dots$, и $\bar\varphi_t(u_{t-1})<\gamma_t$, $t=1,2,\dots$, а затем построим по $\{u_t\}$ траекторию $\{x_t\}$ таким же образом, как в теореме I.

Пусть в начальный момент времени имеем оптимальное распределение ресурсов в соответствии с производственной функцией F_0, т.е. $u_0=\bar u_0$. Предположим, что мы построили $2t$ членов последовательности $u_0,u_1,\dots,u_{2t}$. Построим множество $U_{2t+1}(u_{2t},f_{2t})=[a_{2t+1},\ b_{2t+1}]$, где

$$a_{2t+1}=\frac{\gamma_{2t}\,u_{2t}}{u_{2t}^{\beta_2}+\nu_{2t}-\gamma_{2t}(1+\mu_{2t+1})u_{2t}}.$$

Положим $u_{2t+1}=a_{2t+1}$. Поскольку u_t монотонно возрастает с ростом β_t, $t=0,1,\dots$, то можно выбрать β_{2t+1} таким, что $\bar u_{2t+1}+q<a_{2t+1}=u_{2t+1}$, где $q>0$. Возьмем γ_{2t+1} из промежутка

$$\left(0,\ \frac{a_{2t+1}^{\beta_{2t+1}}+\nu_{2t+1}}{1+(1+\mu_{2t+2})a_{2t+1}}\right),$$

тогда $a_{2t+2} < a_{2t+1}$. Положим $u_{2t+2} = a_{2t+2}$. Затем выбираем такое β_{2t+2}, что $\bar{u}_{2t+2} + q < a_{2t+2}$, и возьмем γ_{2t+2} из промежутка

$$\left(\frac{a_{2t+2}^{\beta_{2t+2}} + \gamma_{2t+2}}{1+(1+\mu_{2t+3})a_{2t+2}}, \infty\right).$$

Тогда $a_{2t+3} > a_{2t+2}$. Таким образом, мы можем построить модель, в которой $\bar{u}_t \notin U_t(u_{t-1}, f_{t-1}), t=1,2,\ldots$ (т.е. оптимальной траектории не существует), и $|\bar{u}_t - u_t| > q > 0$, $t=0,1,\ldots$ (т.е. траектория не является асимптотически оптимальной).

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отд.
3.01.1979 г.