УДК 512.25/26

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И.Лобырев

Если требуется минимизировать линейную форму (c,x), где x принадлежит выпуклому замкнутому множеству $R \subset E^N$, то можно решать эту задачу проекционным методом, стандартный шаг которого заключается в следующем. По точке x_k вне R выберем замкнутое множество G_k, содержащее R и не содержащее точку x_k, и найдем в G_k точку $\bar{x}_k$, ближайшую к x_k. Затем из точки $\bar{x}_k$ сделаем шаг на выбранную величину λ_k в направлении антиградиента минимизируемой функции. Для новой точки $x_{k+1} = \bar{x}_k - \lambda_k c$ выберем новое множество G_{k+1} и т.д. При удачном выборе последовательности множеств G_k и чисел λ_k получается сходящийся процесс.

В работах [1,2] предлагается в качестве точек $\bar{x}_k$ брать приближенные проекции точек x_k на множество R, причем так, чтобы полупространство $\{y \in E^N : (\bar{x}_k - x_k, y - \bar{x}_k) \geq 0\}$ содержало множество R. В данном случае в качестве множеств G_k брались полупространства – простейшие аппроксимации множества R. В качестве начальной точки для очередного приближенного проектирования целесообразно брать проекцию точки x_{k+1} на предыдущую аппроксимацию G_k множества R. Для ускорения процесса желательно использовать более точную и естественную аппроксимацию множества на каждом шаге. Такие приближенные проекции точек x_k и соответствующие им аппроксимации множества R можно строить, например, используя итеративные методы проектирования на множество R [3-5]. В этих методах строится последовательность выпуклых замкнутых множеств Q_ν, которые содержат множество R и расстояние до которых от проектируемой точки x_k строго растет, причем какую бы точность проектирования заранее ни задали, всегда в последовательности найдется множество Q_ν, обеспечивающее эту точность. Таким образом, можно в качестве очередного множества G_k брать соответствующее Q_ν.

Излагаемый метод, как и все проекционные методы, использует в качестве основной операции проектирование на многогранное выпуклое множество, т.е. получение точки этого множества, ближайшей в евклидовой метрике к данной точке. Поэтому настоящая статья, в основном, посвящена модификации методов проектирования в предположении, что многогранное множество задано большой системой линейных неравенств. Модификация позволяет учитывать структуру матрицы системы, определяющей допустимое множество R, и заключается в указании способа построения последовательности аппроксимирующих множеств Q_ν, а следовательно, и множеств G_k. Изложим несколько алгоритмов: алгоритм без учета специфики матрицы системы ограничений, алгоритм, учитывающий блочность в верхней и нижней части матрицы при различном упорядочении ее столбцов, и, наконец, алгоритм для узкоблочной задачи с распадающейся (блочной) окаймляющей частью. Третий алгоритм описан более подробно. Возможны различные комбинации этих алгоритмов.

При изложении методов нам придется часто оперировать частями строк, столбцов и матриц, вырезаемых указанием множества номеров строк и столбцов. Так, символ $A[M,N]$ обозначает матрицу, индексы строк которой пробегают множество M, а индексы столбцов - множество N. В этом случае можно использовать символ $A[I,J]$, если $I \subset M$ и $J \subset N$. При этом $A[I,J]$ обозначает часть матрицы $A[M,N]$, составленную из ее элементов, стоящих на пересечении строк с индексами из I и столбцов с индексами из J. Если же $M \subset I$ и $N \subset J$, то символ $A[I,J]$ обозначает матрицу, которая получается из матрицы $A[M,N]$ добавлением к ней соответствующего количества нулевых строк и столбцов (которым присвоены индексы из множеств $I \setminus M$ и $J \setminus N$ соответственно).

Предположим, что нам нужно найти решение системы линейных неравенств

$$A[M,N]\,x[N] \geq b[M], \tag{I}$$

ближайшее к заданной точке $x^\circ[N]$. Будем рассматривать случай, когда число ограничений и переменных в системе (I) достаточно велико, так что точно решить задачу

$$\min\{|x[N]-x^{\circ}[N]|: A[M,N]x[N] \geq b[M]\}$$

оказывается невозможным. Применим итеративный метод [3,5], в котором аппроксимирующая система

$$A[I,N]x[N] \geq b[I], \; I \subset M,$$

заменяется усредненной системой, вообще говоря, меньшего размера, но дающей ту же приближенную проекцию точки $x^{\circ}[N]$.

Разобьем множество индексов M на p подмножеств: $M=M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$. При $\ell=1,2,\ldots,p$ обозначим

$$A_\ell = \{x[N]: A[M_\ell,N]x[N] \geq b[M_\ell]\}$$

и предположим, что число p и число индексов в множествах M_ℓ не слишком велики, так что мы в состоянии решать встречающиеся ниже задачи о нахождении ближайшей точки. Построим итерационный процесс, использовав точку $x^{\circ}[N]$ в качестве начальной. Предположим, что уже получены некоторая точка $x^{\nu}[N]$ и множество Q_ν, задаваемое системой неравенств

$$Y_\nu[\ell,N]x[N] \geq y_\nu[\ell], \; \ell \in P=\{1,2,\ldots,p\},$$

где ℓ-е неравенство является некоторым следствием подсистемы, задающей множество A_ℓ, а точка $x^{\nu}[N]$ есть проекция $x^{\circ}[N]$ на множество Q_ℓ. Выберем множество $A_{\ell(\nu)}$, не содержащее $x^{\nu}[N]$, и в качестве точки $x^{\nu+1}[N]$ возьмем проекцию точки $x^{\circ}[N]$ на пересечение множеств $A_{\ell(\nu)}$ и Q_ν. В процессе точного проектирования точки $x^{\circ}[N]$ на множество $A_{\ell(\nu)} \cap Q_\nu$ попутно получаются строка оценок $v[M_{\ell(\nu)}]$ системы неравенств, задающей множество $A_{\ell(\nu)}$, и строка оценок $V[P]$ системы неравенств, задающей множество Q_ν. Используя эти оценки, мы определим множество $Q_{\nu+1}$ такой системой неравенств:

$$Y_{\nu+1}[P,N]x[N] \geq y_{\nu+1}[P],$$

где

$$Y_{\nu+1}[P\setminus\{\ell(\nu)\},N]=Y_\nu[P\setminus\{\ell(\nu)\},N], \; y_{\nu+1}[P\setminus\{\ell(\nu)\}]=y_\nu[P\setminus\{\ell(\nu)\}],$$

$$Y_{\nu+1}[\ell(\nu),N]=V[\ell(\nu)]Y_\nu[N]+v[M_{\ell(\nu)}]A[M_{\ell(\nu)},N],$$

$$y_{\nu+1}[\ell(\nu)]=V[\ell(\nu)]y_\nu[\ell(\nu)]+v[M_{\ell(\nu)}]b[M_{\ell(\nu)}].$$

Если индексы $\ell(\nu)$ выбирать в циклическом порядке, то, как доказано в [2,5], процесс сходится с линейной скоростью.

Предположим теперь, что множество R задано системой линейных неравенств

$$A[M,N]x[N] \geq a[M],$$
$$B[T,N]x[N] \geq b[T],$$

где матрицы $A[M,N]$ и $B[T,N]$ - блочно-диагональные, т.е. множества M,N и T,N можно так разбить на p и s непересекающихся подмножеств

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p, \qquad N = N'_1 \cup N'_2 \cup \ldots \cup N'_p,$$
$$T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_s, \qquad N = N''_1 \cup N''_2 \cup \ldots \cup N''_s,$$

что все ненулевые элементы матриц $A[M,N]$ и $B[T,N]$ сосредоточены в блоках

$$A[M_1,N'_1], A[M_2,N'_2], \ldots, A[M_p,N'_p]; B[T_1,N''_1], B[T_2,N''_2], \ldots, B[T_s,N''_s].$$

Таким образом, матрицы $A[M,N]$ и $B[T,N]$ при соответствующих упорядочениях строк и столбцов имеют вид

$$A[M,N] = \begin{bmatrix} A[M_1,N'_1] & & \\ & \ddots & \\ & & A[M_p,N'_p] \end{bmatrix}, \quad B[T,N] = \begin{bmatrix} B[T_1,N''_1] & & \\ & \ddots & \\ & & B[T_s,N''_s] \end{bmatrix}$$

В этом случае $R = \left(\bigcap_{\ell=1}^{p} A_\ell\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{s} B_k\right)$, где

$$A_\ell = \{x[N] : A[M_\ell,N'_\ell]\, x[N'_\ell] \geq a[M_\ell]\},$$
$$B_k = \{x[N] : B[T_k,N''_k]\, x[N''_k] \geq b[T_k]\}.$$

Если теперь, как и раньше, в качестве неравенств, задающих множества Q_ν, брать некоторые следствия соответствующих подсистем линейных неравенств, то матрица системы, определяющей множество Q_ν, будет состоять из двух узкоблочных матриц $Y_\nu[P,N]$ и $Z_\nu[S,N]$, где

$$Y_\nu[P,N] = \begin{bmatrix} Y_\nu[1,N'_1] & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & Y_\nu[p,N'_p] \end{bmatrix}, \quad Z_\nu[S,N] = \begin{bmatrix} Z_\nu[1,N''_1] & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Z_\nu[s,N''_s] \end{bmatrix}$$

Как и в описанном выше итерационном процессе, на каждом шаге будем точно проектировать либо на множество $A_{\ell(\nu)} \cap Q_\nu$, либо на множество $B_{k(\nu)} \cap Q_\nu$. Чтобы упростить индексацию, опишем шаг в предположении, что выбрано $\ell(\nu)=1$ или $k(\nu)=1$, и опустим индекс итерации ν. Остальные случаи аналогичны. Таким образом, в первом случае нужно найти решение системы неравенств с матрицей

$$W[M,\cup\{P\setminus\{1\}\cup S,N] = \left[\begin{array}{c|c} A[M_1,N_1'] & \\ \hline & Y[P\setminus\{1\},N\setminus N_1'] \\ \hline \multicolumn{2}{c}{Z[S,N]} \end{array}\right] \qquad (2)$$

ближайшее к точке $x^\circ[N]$. Здесь опущена строка $Y[1,N_1']$, так как она является неотрицательной комбинацией строк матрицы $A[M_1,N]$, и соответствущее ограничение в аппроксимирующей системе избыточно. Алгоритм точного проектирования требует хранения обратной матрицы к матрице Грамма для некоторой подсистемы строк матрицы (2). Соответствующую вырезку будем называть базисной матрицей. Пусть это матрица

$$W[I\cup L\cup H,N] = \left[\begin{array}{c|c} A[I,N_1'] & 0 \\ \hline 0 & Y[L,N\setminus N_1'] \\ \hline \multicolumn{2}{c}{Z[H,N]} \end{array}\right]$$

где $I\subset M_1$, $L\subset P\setminus\{1\}$, $H\subset S$. Соответствующая матрица Грамма имеет структуру

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A[I,N_1']A^T[N_1',I] & 0 & A[I,N_1']Z^T[N_1',H] \\ \hline 0 & Y[L,N\setminus N_1']Y^T[N\setminus N_1',L] & Y[L,N\setminus N_1']Z^T[N\setminus N_1',H] \\ \hline Z[H,N_1']A^T[N_1',I] & Z[H,N\setminus N_1']Y[N\setminus N_1',L] & Z[H,N]Z^T[N,H] \end{array}\right] \qquad (3)$$

Предполагая, что $S \gg P$, обратную к этой матрице можно найти последовательным окаймлением, причем достаточно хранить только обратную к диагональной матрице

$$D[H,H]=Z[H,N]Z^T[N,H]$$

и обратные к матрицам $\Pi[L,L]$ и $K[I,I]$, где

$$\Pi[L,L]=Y[L,N\setminus N_1']Y^T[N\setminus N_1',L]-Y[L,N\setminus N_1']Z^T[N\setminus N_1',H]\cdot D^{-1}[H,H]Z[H,N\setminus N_1']Y^T[N\setminus N_1',L],$$

$$K[I,I]=A[I,N_1']A^T[N_1',I]-A[I,N_1']Z^T[N_1',H]D^{-1}[H,H]Z[H,N_1']\cdot A^T[N_1',I]-A[I,N_1']Z^T[N_1',H]D^{-1}[H,H]Z[H,N\setminus N_1']Y^T[N\setminus N_1',L]\cdot \Pi^{-1}[L,L]Y[L,N\setminus N_1']Z^T[N\setminus N_1',H]D^{-1}[H,H]Z[H,N_1']A^T[N_1',I].$$

Здесь и в дальнейшем через $D^{-1}[H,H]$ и $\Pi^{-1}[L,L]$ обозначены обратные к матрицам $D[H,H]$ и $\Pi[L,L]$ соответственно. Кроме того, желательно еще хранить и подправлять матрицы $A[I,N_1']\mathcal{Z}^T[N_1',H]$ и $Y[L,N\setminus N_1']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1',H]$. Ясно, что матрица $K^{-1}[I,I]=\Gamma^{-1}[I,I]$, где $\Gamma^{-1}[I\cup L\cup H, I\cup L\cup H]$, обратная к матрице (3).

Во втором случае $(k(y)=1)$ мы будем находить ближайшее к $x^\circ[N]$ решение системы линейных неравенств с матрицей

$$\left[\begin{array}{c|c} B[T_1,N_1''] & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{Z}[S\setminus\{1\},N\setminus N_1''] \\ \hline \multicolumn{2}{c}{Y[P,N]} \end{array}\right]$$

Здесь опущена строка $\mathcal{Z}[1,N_1'']$, так как она является неотрицательной комбинацией строк матрицы $B[T_1,N_1'']$. Матрица $\Gamma[H\cup L\cup J, H\cup L\cup J]$, определяемая множествами индексов $J\subset T_1$, N_1'', $L\subset P$, $H\subset S\setminus\{1\}$, в этом случае имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c|c} B[J,N_1'']B^T[N_1'',J] & B[J,N_1'']Y^T[N_1'',L] & 0 \\ \hline Y[L,N_1'']B^T[N_1'',J] & Y[L,N]Y^T[N,L] & Y[L,N\setminus N_1'']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1'',H] \\ \hline 0 & \mathcal{Z}[H,N\setminus N_1'']Y^T[N\setminus N_1'',L] & \mathcal{Z}[H,N\setminus N_1'']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1'',H] \end{array}\right]$$

Находя, как и раньше, обратную к этой матрице получим, что для проведения процесса проектирования достаточно иметь обратную к диагональной матрице

$$D[H,H]=\mathcal{Z}[H,N\setminus N_1'']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1'',H],$$

обратные к матрицам

$$\Pi[L,L]=Y[L,N]Y^T[N,L]-Y[L,N\setminus N_1'']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1'',H]D^{-1}[H,H]\cdot$$
$$\cdot\mathcal{Z}[H,N\setminus N_1'']Y^T[N\setminus N_1'',L];$$

$$K[J,J]=B[J,N_1'']B^T[N_1'',J]-B[J,N_1'']Y^T[N_1'',L]\Pi^{-1}[L,L]\cdot$$
$$\cdot Y[L,N_1'']B^T[N_1'',J];$$

матрицы $B[J,N_1'']Y^T[N_1'',L]$ и $Y[L,N\setminus N_1'']\mathcal{Z}^T[N\setminus N_1'',H]$. Матрица $K^{-1}[J,J]=\Gamma^{-1}[J,J]$.

Интерес представляет случай, когда можно обойтись только обратными к указанным выше матрицам. Это возможно, например, тогда, когда уже сама матрица $B[T,N]$ является узкоблочной, т.е. можно положить $B[T,N]=\mathcal{Z}[T,N]$, причем $B[k,N_k'']=1$ для $k=1,2,\ldots$ $\ldots,s$.

Итак, будем рассматривать задачу с системой ограничений

$$\begin{aligned} A[M,N]\,x[N] &\geq a[M], \\ B[T,N]\,x[N] &= b[T], \\ x[N] &\geq 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

где, как и раньше, ненулевые элементы матрицы $A[M,N]$ находятся в блоках $A[M_1,N_1'], A[M_2,N_2'], \ldots, A[M_p,N_p']$, а ненулевые элементы матрицы $B[T,N]$ – в однострочных блоках $B[k,N_k'']$, $k\in T$. Матрица системы линейных неравенств, определяющей в нашем случае, например, множество $A_1 \cap Q_\nu$, будет иметь структуру

$$\left[\begin{array}{c|c} A[M_1,N_1'] & 0 \\ \hline 0 & Y[P\setminus\{1\}, N\setminus N_1'] \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B[T,N]} \end{array}\right] \qquad (5)$$

(Имеются в виду только ограничения общего вида)

Мы не будем излагать полностью алгоритм точного проектирования [6], а остановимся лишь на учете линейных ограничений (5) при выборе способа хранения и переработки информации об обратной к матрице Грамма текущего базиса и при умножении на нее некоторого вектора.

Пусть базис на очередном шаге определяется множествами индексов: $I\subset M_1$, $J\subset N$ (условия неотрицательности учитываются алгоритмически [6], $J_1\subset J\cap N_1'$, $L\subset P\setminus\{1\}, T$). Тогда базисная матрица будет вырезкой из матрицы (5):

$$\left[\begin{array}{c|c} A[I,J_1] & 0 \\ \hline 0 & Y[L,J\setminus J_1] \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B[T,J]} \end{array}\right]$$

а соответствующая матрица Грамма имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A[I,J_1]A^T[J_1,I] & 0 & A[I,J_1]B^T[J_1,T] \\ \hline 0 & Y[L,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L] & Y[L,J\setminus J_1]B^T[J\setminus J_1,T] \\ \hline B[T,J_1]A^T[J_1,T] & B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L] & B[T,J]B^T[J,T] \end{array}\right] \qquad (6)$$

Считая, как и выше, что число узких блоков значительно превосходит число остальных, вместо хранения и подправки обратной к матрице $\Gamma[I\cup L\cup T, I\cup L\cup T]$ будем хранить и подправлять обратные к матрицам $D[T,T]$, $\Pi[L,L]$, $K[I,I]$, которые в нашем случае получаются по формулам

$$D[T,T]=B[T,J]B^T[J,T],$$

$$\Pi[L,L]=Y[L,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L]-Y[L,J\setminus J_1]B^T[J\setminus J_1,T]\cdot$$
$$\cdot D^{-1}[T,T]B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L],$$

$$K[I,I]=A[I,I]A^T[J_1,I]-A[I,J_1]B^T[J_1,T]D^{-1}[T,T]B[T,J_1]\cdot$$
$$\cdot A^T[J_1,I]-A[I,J_1]B^T[J_1,T]D^{-1}[T,T]B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L]\cdot$$
$$\cdot\Pi^{-1}[L,L]Y[L,J\setminus J_1]B^T[J_1,T]D^{-1}[T,T]B[T,J]A^T[J_1,I].$$

Здесь $D^{-1}[T,T]$, $\Pi^{-1}[L,L]$, $K^{-1}[I,I]$ обозначают обратные к матрицам $D[T,T]$, $\Pi[L,L]$, $K[I,I]$ соответственно.

Все подправки хранимых матриц будут связаны с изменением множеств индексов J,I и L, а измененные множества индексов и соответствующие измененные матрицы будем отмечать чертой сверху. Возможны следующие изменения множеств J,I и L и матриц $D^{-1}[T,T]$, $\Pi^{-1}[L,L]$, $K^{-1}[I,I]$:

1) $\bar J=J\cup\{j\}$, $\bar I=I$, $\bar L=L$, $j\in M_1$, $\bar T=T$; $\bar D^{-1}[\bar T,\bar T]=$
$$=D^{-1}[T,T]-(D^{-1}[T,T]B[T,j]B^T[j,T]D^{-1}[T,T])/(1+\gamma);$$
$$\bar\Pi^{-}[\bar L,\bar L]=\Pi^{-1}[L,L]-(\Pi^{-1}[L,L]\eta^T[L]\Pi^{-1}[L,L])/(1+\gamma+\alpha);$$
$$K^{-1}[\bar I,\bar I]=K^{-1}[I,I]-(K^{-1}[I,I](\xi[I]+t[I])^T(\xi[I]+t[I])K^{-1}[I,I])/$$
$$/(1+\gamma+\alpha+\beta).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\eta[L]=B^T[j,T]D^{-1}[T,T]B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L],$$
$$\xi[I]=B^T[j,T]D^{-1}[T,T]B[T,J_1]A^T[J_1,J]-A^T[j,I],$$
$$t[I]=\eta[L]\Gamma^{-1}[L,L]Y[L,J\setminus J_1]B^T[J\setminus J_1,T]D^{-1}[T,T]\cdot$$
$$\cdot B[T,J_1]A^T[J_1,I],$$
$$\gamma=B^T[j,T]D^{-1}[T,T]B[T,j],$$
$$\alpha=\eta[L]\Gamma^{-1}[L,L]\eta^T[L],$$
$$\beta=(\xi[I]+t[I])K^{-1}[I,I](\xi[I]+t[I])^T.$$

2) $\bar J=J\setminus\{j\}$, $\bar I=I$, $\bar L=L$, $\bar T=T$, $j\notin M_1$; $D^{-1}[\bar T,\bar T]=$
$$=D^{-1}[T,T]+(D^{-1}[T,T]B[T,j]B^T[j,T]D^{-1}[T,T])/(1-\gamma);$$
$$\bar\Pi^{-1}[\bar L,\bar L]=\Pi^{-1}[L,L]+(\Pi^{-1}[L,L]\eta^T[L]\eta[L]\Pi^{-1}[L,L])/(1-\gamma-\alpha);$$
$$\bar K^{-1}[\bar I,\bar I]=K^{-1}[I,I]+(K^{-1}[I,I](\xi[I]+t[I])^T(\xi[I]+t[I])K^{-1}[I,I])/$$
$$/(1-\gamma-\alpha-\beta).$$

Здесь обозначения те же, что и в случае I.

3) $\bar{J}=J\cup\{j\}, \bar{I}=I, \bar{L}=L, \bar{T}=T, j\notin M_j$.

Формулы подправок для этого случая совпадают со случаем I, только векторы $\eta[L]$ и $\xi[I]$ здесь имеют следующий вид:

$$\eta[L]=B^T[j,T]D^{-1}[T,T]B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L]-Y^T[j,L],$$

$$\xi[I]=B^T[j,T]D^{-1}[T,T]B[T,J_1]A^T[J_1,I].$$

4) $\bar{J}=J\setminus\{j\}, \bar{I}=I, \bar{L}=L, \bar{T}=T, j\notin M_1$.

Формулы подправок для матриц $D^{-1}[T,T], \Pi^{-1}[L,L], K^{-1}[I,I]$ совпадают с формулами подправок для случая 2, а обозначения полностью совпадают со случаем 3.

5) $\bar{J}=J, \bar{I}=I\cup\{i\}, \bar{L}=L, \bar{T}=T;\ \bar{D}^{-1}[\bar{T},\bar{T}]=$
$=D^{-1}[T,T];\ \bar{\Pi}^{-1}[\bar{L},\bar{L}]=\Pi^{-1}[L,L];\ \bar{K}^{-1}[\bar{I},\bar{I}]=$
$=K^{-1}[\bar{I},\bar{I}]+(\varkappa^T[\bar{I}]\varkappa[\bar{I}])/(\theta-\xi[I]K^{-1}[I,I]\xi^T[I])$.

Здесь через $K^{-1}[\bar{I},I]$ обозначена матрица, которая получается из матрицы $K^{-1}[I,I]$ добавлением нулевой i-й строки и нулевого i-го столбца, а величины $\xi[I], \varkappa[I]$ и θ получаются по формулам

$$\xi[\bar{I}]=A[i,J_1]A^T[J_1,\bar{I}]-A[i,J_1]B[J_1,T]D^{-1}[T,T]B^T[T,J_1]\cdot$$
$$\cdot A[J_1,I]-A[i,J_1]B^T[J_1,T]D^{-1}[T,T]B[T,J\setminus J_1]Y^T[J\setminus J_1,L]\Pi^{-1}[L,L]\cdot$$
$$\cdot Y[L,J\setminus J_1]B^T[T,J\setminus J_1]D^{-1}[T,T]B[T,J_1]A^T[J_1,\bar{I}];$$
$$\varkappa[I]=\xi[I]K^{-1}[I,I],\ \varkappa[i]=-1,\ \theta=\xi[i].$$

6) $\bar{J}=J, \bar{I}=I\setminus\{i\}, \bar{L}=L, \bar{T}=T;\ \bar{D}^{-1}[\bar{T},\bar{T}]=D^{-1}[T,T];$
$$\bar{\Pi}^{-1}[\bar{L},\bar{L}]=\Pi^{-1}[L,L];\ \bar{K}^{-1}[\bar{I},\bar{I}]=K^{-1}[\bar{I},\bar{I}]-$$
$$-(K^{-1}[\bar{I},i]K^{-1}[i,\bar{I}])/K^{-1}[i,i],$$

где $K^{-1}[\bar{I},\bar{I}], K^{-1}[\bar{I},i], K^{-1}[i,\bar{I}], K^{-1}[i,i]$ — соответствующие вырезки из матрицы $K^{-1}[I,I]$.

7) $\bar{J}=J, \bar{I}=I=\varnothing, \bar{L}=L\cup\{\ell\}, \bar{T}=T;\ \bar{\Pi}^{-1}[\bar{L},\bar{L}]=$
$=\Pi^{-1}[\bar{L},\bar{L}]+(\zeta^T[\bar{L}]\zeta[\bar{L}])/(\theta-\eta[L]\Pi^{-1}[L,L]\eta^T[L];\ \bar{D}^{-1}[\bar{T},\bar{T}]=$
$=D^{-1}[T,T]$, где

$\eta[L]=Y[\ell,J]Y^T[J,\bar{L}]-Y[\ell,J]B^T[J,T]D^{-1}[T,T]B[T,J]Y^T[J,\bar{L}]$;

$\zeta[L]=\eta[L]\Pi^{-1}[L,L]$, $\zeta[\ell]=-1$, $\quad \theta=\eta[\ell]$.

8) $\bar{J}=J$, $\bar{I}=I$, $\bar{L}=L\setminus\{\ell\}$, $\bar{T}=T$; $\bar{D}^{-1}[\bar{T},\bar{T}]=D^{-1}[T,T]$;

$\bar{\Pi}^{-1}[\bar{L},\bar{L}]=\Pi^{-1}[\bar{L},\bar{L}]-(\Pi^{-1}[\bar{L},\ell]\Pi^{-1}[\ell,\bar{L}])/\Pi^{-1}[\ell,\ell]$,

$$\bar{K}^{-1}[\bar{I},\bar{I}]=K^{-1}[I,I]-\frac{K^{-1}[I,I]t^T[I]t[I]K^{-1}[I,I]}{\Pi^{-1}[\ell,\ell]+t[I]K^{-1}[I,I]t^T[I]},$$

где

$t[I]=\Pi^{-1}[\ell,L]Y[L,J\setminus J_\ell]B^T[J\setminus J_\ell,T]D^{-1}[T,T]B[T,J_\ell]A^T[J_\ell,I]$.

Как видно из сказанного выше, подправки матриц $D^{-1}[T,T]$, $\Pi^{-1}[L,L]$, $K^{-1}[I,I]$, если они производятся, идут по единой схеме пополнения, а именно:

$$\bar{D}^{-1}[\bar{T},\bar{T}]=D^{-1}[\bar{T},\bar{T}]+\frac{\ell^T[\bar{T}]\,\ell[\bar{T}]}{a},$$

$$\bar{\Pi}^{-1}[\bar{L},\bar{L}]=\Pi[\bar{L},\bar{L}]+\frac{h^T[\bar{L}]\,h[\bar{L}]}{b};$$

$$\bar{K}^{-1}[\bar{I},\bar{I}]=K^{-1}[\bar{I},\bar{I}]+\frac{x^T[\bar{I}]\,x[\bar{I}]}{c}.$$

Здесь скаляры a, b, c и векторы $\ell^T[\bar{T}]$, $h[\bar{L}]$, $x[\bar{I}]$ определяются соответственно случаям I–8.

На первый взгляд может показаться, что формулы подправок матриц $D^{-1}[T,T]$, $\Pi^{-1}[L,L]$ и $K^{-1}[I,I]$ довольно сложны и требуют много операций. Это так, если нет специфики в матрицах $Y[L,J]$ и $B[T,J]$. Но в нашем случае матрицы $Y[L,J]$ и $B[T,J]$ узкоблочные (т.е. $D[T,T]$ диагональная), а столбцами матрицы $B[T,J]$, кроме того, являются единичные орты. Таким образом, если все это учесть, то число операций для подправки хранимых обратных матриц значительно сокращается.

Теперь осталось рассмотреть, как, используя только матрицы $D^{-1}[T,T]$, $\Pi^{-1}[L,L]$, $K^{-1}[I,I]$, $A[I,J]$, $Y[L,J]$, $B[T,J]$, умножить некоторый вектор на матрицу, обратную к матрице (6). Умножение на такую матрицу необходимо будет производить в двух случаях, а именно: при проектировании на множество $Q\cap A_\ell$, $\ell\in P$, и при проектировании на множество Q (получение первого приближения после отскока по антиградиенту минимизируемой линейной функции). Во втором случае $I=\varnothing$, поэтому умножение упрощается. Начнем со второго случая. Допустим, что нам необходимо умножить вектор $Z[T\cup L]$ на матрицу, обратную к матрице

$$\left[\begin{array}{c|c} B[T,J]B^T[J,T] & B[T,J]Y^T[J,L] \\ \hline Y[L,J]B^T[J,T] & Y[L,J]Y^T[J,L] \end{array}\right]$$

Если через вектор $t[TUL]$ обозначить результат умножения, то этот вектор получается в результате таких шагов:

ШАГ I. $t[L]=\Pi^{-1}[L,L](z^T[L]-Y[L,J]B^T[J,T]D^{-1}[T,T]z^T[T])$.

ШАГ 2. $t[T]=D^{-1}[T,T](z^T[T]-B[T,J]Y^T[J,L]t[L])$.

В первом случае, т.е. когда нужно умножить вектор $z[TULUJ]$ на обратную к матрице (6), необходимо, как и раньше, проделать шаг I и шаг 2, затем осуществить следующий

ШАГ 3. $t[I]=K^{-1}[I,I](z[I]-A[I,J_1]B^T[J_1,T]t^T[T])$;

здесь вектор $t[TULUT]$, как и раньше, - результат умножения матрицы, обратной к матрице (6), на вектор $z[TULUI]$. После того, как проделан шаг 3, необходимо присвоить вектору $z[T]$ новое значение, а именно:

$$\bar{z}[T]=z[T]-B[T,J_1]A^T[J_1,I]t[I].$$

И снова проделать шаг I и шаг 2. Таким образом, в перфом случае необходимо два раза проделать шаг I и шаг 2. Однако, учитывая то, что матрица $D[T,T]$ - диагональная, а столбцы матрицы $B[T,J]$ - единичные орты, число операций не намного возрастает по сравнению с полным хранением обратной к (6).

В заключение рассмотрим схему проекционного метода решения задачи линейного программирования с множеством допустимых значений, заданных системой (4), а именно: минимизировать величину

$$C[N]x[N]$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &A[M_l', N_l']x[N_l'] \geqslant a[M_l'], \quad l\in P; \\ &B[t,N_t'']x[N_t''] = b[t], \quad t\in T; \qquad (7) \\ &x[N]\geqslant 0. \end{aligned}$$

Метод решения полностью совпадает с одним из алгоритмов, описанных в статье [7], но последовательность аппроксимирующих множеств G будет строиться согласно алгоритму настоящей работы, т.е. системы линейных ограничений, задающих множества G, будут иметь вид

$$\begin{aligned} &Y[l,N_l']x[N_l'] \geqslant y[l], \quad l\in P; \\ &B[T,N]x[N] = b[T]; \\ &x[N] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Решение начинается с произвольной точки $x^0[N]$, которая является решением задачи: минимизировать

$$C[N]\,x[N]$$

при ограничениях

$$a[T,N]\,x[N]=b[T],$$

$$x[N]\geq 0.$$

Получить решение этой задачи легко, потому что матрица $B[T,N]$ узкоблочная.

Опишем стандартный шаг проекционного метода. Пусть уже получены точка $x^n[N]$, соответствующая ей аппроксимация G_n и определена каким-то способом (см. [7]) точность ε_n. Взяв в качестве начальной точки проекцию точки $x^n[N]$ на множество $\{x[N]: C[N]x[N]\leq C[N]x^0[N]\}$ и обозначив ее через $z^{n+1}[N]$, будем проводить итерационный процесс проектирования на множество, заданное системой (7), пока не достигнем точности ε_n. Целесообразно в качестве множества Q_0 взять множество G_n. На некотором шаге $\nu(n)$ мы достигнем требуемой точности и положим

$$G_{n+1}=Q_{\nu(n)},\quad x^{n+1}[N]=x^n_{\nu(n)}[N].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Проекционный метод с регулируемой точностью для задачи выпуклого программирования. В кн.:Оптимизация. Вып. I5(32). Новосибирск, 1974, с.23-3I.
2. ЛОБЫРЕВ А.И. Ускорение сходимости в итерационном методе проектирования на многогранное множество. - В кн.: Оптимизация. Вып. I5(32). Новосибирск, с.58-72.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22). Новосибирск, 1972, с. II-22.
4. ЕРЕМИН И.И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании. - Мат. заметки, 1968, т.3, № 2, с. 2I7-234.
5. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22). Новосибирск, 1972, с. I28-I32.

6. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгоритм квадратичного программирования. – В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1972, с. 23–36.
7. ЛОБЫРЕВ А.И. Об одной схеме регулирования точности в проекционных методах для задач математического программирования. – Настоящий сб., с. 51–60.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.04.1979 г.