УДК 519.95

РЕЛАКСАЦИЯ В ЗАДАЧАХ С НЕРАВЕНСТВАМИ

В.А.Булавский

В статье для систем неравенств предлагается способ единообразного построения целой группы методов решения, которые аналогичны релаксационным методам линейной алгебры. Рассматривается также применение этих методов к решению некоторых экстремальных задач. В качестве основной рассматривается система неравенств

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $f_i : R^n \to R$ – выпуклые функции. Нам будет удобно записать эту систему в векторном виде

$$F(x) \le 0, \tag{1}$$

положив $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$.

1. Итерационный процесс. Выберем матрицу B размерами $m \times m$, удовлетворяющую при некотором $\gamma > 0$ условию положительной определенности: $z^T B z \ge \gamma \cdot |z|^2$ при всех $z \in R^m$. Здесь и ниже $|z|^2 = z^T \cdot z$. Отметим, что симметрия матрицы B не предполагается. Выбрав $x_0 \in R^n$, построим последовательность $\{x_k\}$ следующим образом. Если x_k уже определено, то решим относительно z_k задачу с условиями дополнительности

$$F(x_k) \le B z_k, \; z_k \ge 0, \; z_k^T \cdot F(x_k) = z_k^T \cdot B z_k. \tag{2}$$

В силу положительной определенности матрицы B эта задача разрешима [1]. Вычислим $\xi_k \in -\partial[z_k^T \cdot F(x_k)]$ (∂ означает субдифференцирование по x) и положим $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \xi_k$. Шаг α_k предполагается положительным. Его выбор будет обсуждаться ниже.

2. Случай совместной системы. Пусть x_* – некоторое решение

системы (I). Тогда

$$|x_{k+1}-x_*|^2=|x_k-x_*|^2+\alpha_k^2\cdot|\xi_k|^2+2\alpha_k\xi_k^T\cdot(x_k-x_*)\leq$$

$$\leq|x_k-x_*|^2+\alpha_k^2|\xi_k|^2+2\alpha_k z_k^T\cdot(F(x_*)-F(x_k))\leq$$

$$\leq|x_k-x_*|^2+\alpha_k^2|\xi_k|^2-2\alpha_k z_k^T\cdot F(x_k).$$

В силу соотношений (2) получаем

$$|x_{k+1}-x_*|^2\leq|x_k-x_*|^2-2\alpha_k z_k^T B z_k+\alpha_k^2|\xi_k|^2. \quad (3)$$

Неравенство (3) показывает, что при $z_k\neq 0$ направление ξ_k является фейеровским [2] относительно множества решений системы (I). Неравенство (3) позволяет эффективно вычислить и шаг α_k. Точке наискорейшего спуска соответствует

$$\alpha_k=\bar{\alpha}_k\triangleq(z_k^T B z_k)/|\xi_k|^2,$$

а промежуток $(0,2\bar{\alpha}_k)$ является промежутком гарантированной релаксации: при $\alpha_k\in(0,2\bar{\alpha}_k)$ получаем, что $|x_{k+1}-x_*|<|x_k-x_*|$.

Заметим, что в силу совместности системы (I) при $z_k\neq 0$ также и ξ_k отлично от нуля. Если же $z_k=0$, то x_k является решением. Имеет место обычная теорема сходимости.

ТЕОРЕМА I. Если существует такое $\varepsilon>0$, что $(\alpha_k/\bar{\alpha}_k)\in[\varepsilon,2-\varepsilon]$ при всех k, то последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому решению системы (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности последовательности $\{x_k\}$ для некоторого $c>0$ при всех k окажется $|\xi_k|\leq c\cdot|z_k|$, так что $\bar{\alpha}_k\geq\gamma/c$. Из неравенства (3) получаем, что

$$|x_{k+1}-x_*|^2\leq|x_k-x_*|^2-\alpha_k(2-\alpha_k/\bar{\alpha}_k)z_k^T B z_k\leq$$

$$\leq|x_k-x_*|^2-(\alpha\varepsilon^2/c)z_k^T B z_k,$$

или

$$|x_{k+1}-x_*|^2\leq|x_k-x_*|^2-(\gamma^2\varepsilon^2/c)\cdot|z_k|^2. \quad (4)$$

Отсюда следует, что $z_k\to 0$, и из условий (2) для предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{x_k\}$ получаем, что $F(\bar{x})\leq 0$, т.е. $\bar{x}$ является решением системы (I). Положив в (4) $x_*=\bar{x}$, найдем, что $x_k\to\bar{x}$. Теорема доказана.

Заметим, что вместо стационарного итерационного процесса можно было бы рассмотреть процесс, в котором матрица $B=B_k$ выбирается на каждом шаге. Если γ_k – константа положительной определенности матрицы B_k, то для сохранения сходимости достаточно потребовать, чтобы отношения $\|B_k\|/r_k$ были ограничены в совокупности.

3. Случай несовместной системы. Теперь мы не будем предполагать систему (I) совместной. Назовем неподвижной точкой нашего (стационарного) итерационного процесса такую пару $(x_*, z_*) \in R^n \times R^m$, что

$$F(x_*) \leqslant B z_*, \quad z_* \geqslant 0, \quad z_*^T F(x_*) = z_*^T B z_*, \tag{5}$$

$$0 \in \partial [z_*^T F(x_*)]. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 2. Вторая компонента z_* неподвижной точки определена однозначно, а множество M_* значений первой компоненты x_* выпукло и замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если (x_*, z_*) и (x_{**}, z_{**}) – две неподвижные точки, то $z_*^T B z_{**} \geqslant z_*^T F(x_{**}) \geqslant z_*^T F(x_*) = z_*^T B z_*$. Аналогично получим, что $z_{**}^T B z_* \geqslant z_{**}^T B z_{**}$. Их этих двух неравенств получаем, что $0 \geqslant (z_* - z_{**})^T B (z_* - z_{**})$, и в силу положительной определенности матрицы B оказывается $z_* = z_{**}$. Таким образом, вторая компонента единственна. Если множество неподвижных точек не пусто, то значения x_* заполняют множество $M_* = M_1 \cap M_2$, где M_1 – множество решений системы $F(x) \leqslant B z_*$ с выпуклыми левыми частями, а M_2 – множество точек минимума (ввиду (6)) выпуклой функции $z_*^T \cdot F(x)$. Условие дополнительности в (5) будет выполнено автоматически для всех $x_* \in M_2$. Теорема доказана.

Неподвижная точка, конечно, существует не у всякой системы. Ситуация здесь во многом аналогична проблеме существования решения задачи о минимизации невязки несовместной системы в той или иной метрике. Автор не может в данный момент сформулировать достаточно общую теорему существования, но для важного случая линейной системы такая теорема имеет место.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F(x) \equiv Ax - b$ и матрица B удовлетворяет условию положительной определенности. Тогда у рассматриваемого итерационного процесса существует неподвижная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему

$$Ax - Bz \le b,\ z \ge 0,\ A^T z = 0. \qquad (7)$$

Поскольку для всякого решения системы

$$u \ge 0,\ u^T A = 0,\quad -u^T B + v^T A^T \ge 0 \qquad (8)$$

$u^T B u \le 0$, т.е. $u = 0$, то неравенство $u^T b \ge 0$ является следствием совместной системы (8), и по теореме Минковского – Фаркаша система (7) совместна. Рассмотрим задачу квадратичного программирования: максимизировать величину $-(z^T Bz + b^T z)$ при ограничениях (7). Так как система ограничений совместна, а максимизируемая функция ограничена сверху нулем, то задача квадратичного программирования имеет решение (x, z). По признаку оптимальности найдутся $u \ge 0$ и v , при которых

$$u^T A = 0,\ -u^T B + v^T A \ge -z^T B - z^T B^T - b^T, \qquad (9)$$

$$u^T (Ax - Bz) = u^T b, -u^T Bz + v^T A z = -z^T Bz - z^T B^T z - b^T z. \qquad (10)$$

Умножив первое неравенство в (7) на z^T и второе соотношение в (5) на u , получим

$$z^T Bz \ge -z^T b,\ -u^T Bu + u^T Bz + z^T Bu \ge -b^T z. \qquad (11)$$

Кроме того, из (10) имеем

$$-u^T Bz = u^T b,\quad -2z^T Bz + u^T Bz = b^T u. \qquad (12)$$

Сложив соотношения (11) и (12), получим $(z-u)^T B(z-u) \le 0$, т.е. $u = z$. Второе из соотношений (12) вместе с (7) при этом показывает, что пара (x, z) удовлетворяет условиям (5) и (6), т.е. является неподвижной точкой итерационного процесса. Теорема доказана.

Предположим теперь, что для системы (1) при данной матрице B итерационный процесс имеет неподвижную точку (x_*, z_*). Повторив выкладки первого пункта, получим, что

$$|x_{k+1} - x_*|^2 \le |x_k - x_*|^2 + \alpha_k^2 |\xi_k|^2 - 2\alpha_k z_k^T B(z_k - z_*).$$

Но $z_*^T B z_k \ge z_*^T F(x_k) \ge z_*^T \cdot F(x_*) = z_*^T B z_*$. Таким образом, $z_*^T B(z_k - z_*) \ge 0$, и поэтому

$$|x_{k+1} - x_*|^2 \le |x_k - x_*|^2 + \alpha_k^2 |\xi_k|^2 - 2\alpha_k (z_k - z_*)^T B(z_k - z_*). \qquad (13)$$

Если $z_k \ne z_*$ (в противном случае (x_k, z_k) – неподвижная точка), то $(z_k - z_*)^T B(z_k - z_*) > 0$, и в силу (13) направление ξ_k снова является фейеровским относительно множества M_*. Однако определение величины шага α_k теперь затруднено, так как z_* неизвестно.

При линейной системе (I), когда $F'(x_k)=F'(x_*)=A$ и $A^T z_*=0$, имеем $\xi_k=-A^T(z_k-z_*)$. Поэтому если известна такая константа $\beta>0$, что

$$\beta\cdot(y^T A A^T y)\le y^T B y \tag{I4}$$

при всех y, то

$$|x_{k+1}-x_*|^2\le|x_k-x_*|^2-\alpha_k(2\beta-\alpha_k)\cdot|\xi_k|^2; \tag{I5}$$

и можно положить, например, $\alpha_k=\beta$.

ТЕОРЕМА 4. Если система (I) линейная, $F(x)\equiv Ax-b$ и константа β выбрана из условия (I4), то при $(\alpha_k/\beta)\in[\varepsilon,2-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, последовательность $\{(x_k,z_k)\}$ сходится к некоторой неподвижной точке итерационного процесса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия теоремы, из (I5) получим

$$|x_{k+1}-x_*|^2\le|x_k-x_*|^2-\varepsilon^2\beta^2|\xi_k|^2, \tag{I6}$$

т.е. $\xi_k\to 0$. Пусть $\bar{x}$ – предельная точка последовательности $\{x_k\}$ и $x_{k_\nu}\to\bar{x}$. Из последнего соотношения в (2) видно, что последовательность $\{z_{k_\nu}\}$ ограничена, и можно считать, что $z_{k_\nu}\to\bar{z}$. Переходя к пределу при $\nu\to\infty$, получим, что пара $(\bar{x},\bar{z})$ является неподвижной точкой итерационного процесса. Положив $x_*=\bar{x}$ и $z_*=\bar{z}$, из (I6) найдем, что $x_k\to\bar{x}$. Ввиду единственности z_* получаем, что $z_k\to\bar{z}=z_*$. Теорема доказана.

Заметим, что можно положить, например, $\beta=\gamma/\|AA^T\|$.

В общем выпуклом случае можно пользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ выбрана так, что ряд $\sum\alpha_k$ расходится, а ряд $\sum\alpha_k^2\cdot|\xi_k|^2$ сходится. Тогда последовательность $\{(x_k,z_k)\}$ сходится к некоторой неподвижной точке итерационного процесса (если такая существует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая неравенство (I3), найдем, что

$$|x_{k+1}-x_*|^2\le|x_i-x_*|^2+\sum_{s=i}^{k}\alpha_s^2\,|\xi_s|^2, \tag{I7}$$

т.е. последовательность $\{x_k\}$ ограничена.

Если бы при некотором $\delta > 0$ неравенство $(z_k - z_*)^T B(z_k - z_*) \geq \delta$ выполнялось для всех k, то из (13) следовала бы сходимость ряда $\sum \alpha_k$. Поэтому существует подпоследовательность $\{z_{k_\nu}\}$, сходящаяся к z_*. Можно считать, что $x_{k_\nu} \to \bar{x}$. Но тогда, переходя к пределу в (2), найдем, что

$$F(\bar{x}) \leq B z_*, \; z_* \geq 0, \; z_*^T (F(\bar{x}) - B z_*) = 0.$$

Последнее из этих соотношений вместе с (5) дает, что $z_*^T F(\bar{x}) = z_*^T F(x_*)$. Но согласно (6), точка x_* доставляет свободный минимум выпуклой функции $z_*^T F(x)$. Так как точка $\bar{x}$ тоже является точкой минимума этой функции, то $0 \in \partial [z_*^T F(\bar{x})]$, и пара $(\bar{x}, z_*)$ является неподвижной точкой итерационного процесса.

Считая $x_* = \bar{x}$, из (17) находим, что для любой предельной точки $\hat{x}$ последовательности $\{x_k\}$ выполнено неравенство

$$|\hat{x} - \bar{x}|^2 \leq |x_{k_\nu} - \bar{x}|^2 + \sum_{s=k_\nu}^{\infty} \alpha_s^2 \, |\xi_s|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $\nu \to \infty$, получим, что $\hat{x} = \bar{x}$. Таким образом, $x_k \to \bar{x} = x_*$. С другой стороны, из соотношений (2) и (5) получаем $(z_k - z_*)^T (F(x_k) - F(x_*)) \geq (z_k - z_*)^T B (z_k - z_*)$, т.е. $\gamma \cdot |z_k - z_*| \leq |F(x_k) - F(x_*)|$, и, следовательно, $z_k \to z_*$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, дифференцируемы, то направление релаксации определяется по формуле $\xi_k = -[F'(x_k)]^T z_k$. В недифференцируемом случае в качестве ξ_k можно выбирать любой субградиент функции $z_k^T F(x)$. При этом от выбора субградиента зависит скорость релаксации. Стандартной рекомендацией здесь является пожелание выбирать субградиент с наименьшей нормой (если, конечно, это не связано с чрезмерными затратами вычислительного труда). В этом случае быстрее уменьшается ξ_k, что делает менее обременительным второе условие теоремы 5. На практике, по-видимому, целесообразно придерживаться какой-нибудь промежуточной тактики.

4. Чебышевское решение. Выберем неотрицательный столбец $d \in R^m$ и рассмотрим задачу о нахождении

$$\varepsilon_* = \inf \{\varepsilon : F(x) \leq \varepsilon \cdot d, \; x \in R^n, \; \varepsilon \geq 0\}.$$

Поскольку столбец d не предполагается строго положительным, то поставленная задача о чебышевском решении может быть и неразрешимой, т.е. может быть $\varepsilon_* = +\infty$. Для решения этой задачи можно предложить следующий итеративный процесс.

Пусть ε_0 – нижняя граница для ε_*, например, $\varepsilon_0 = 0$. Мы построим такую последовательность $\{\varepsilon_k\}$, что $\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$ и $\varepsilon_k \le \varepsilon_*$ при всех k. Для этого при известном ε_k положим $F^{(k)}(x) = F(x) - \varepsilon_k \cdot d$ и, выбрав матрицу B, найдем неподвижную точку (x_k, z_k) для системы $F^{(k)}(x) \le 0$. Если для некоторых $\varepsilon \ge 0$ и $\tilde{x} \in R^n$ выполняется неравенство $F(\tilde{x}) \le \varepsilon \cdot d$, то

$$(\varepsilon - \varepsilon_k) \cdot (z_k^T d) \ge z_k^T (F(\tilde{x}) - \varepsilon_k \cdot d) = z_k^T F^{(k)}(\tilde{x}) \ge z_k^T F^{(k)}(x_k) = z_k^T B z_k. \quad (18)$$

Возможны три случая. Если $z_k = 0$, то $\varepsilon_k = \varepsilon_*$, и мы нашли чебышевское решение x_k системы (I). Если $z_k \ne 0$, но $z_k^T d = 0$, то при положительно определенной матрице B неравенство (18) противоречиво при любом ε. Это означает, что $\varepsilon_* = +\infty$, и чебышевская задача неразрешима при данном столбце d. Наконец, если $z_k^T d > 0$, то в силу неравенства (18) величина $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + (z_k^T F^{(k)}(x_k)) / (z_k^T d)$ служит нижней оценкой для ε_*, и можно перейти к следующему шагу. Формулируя этот процесс, мы подразумеваем, что у последовательности задач неподвижные точки существуют. Таким образом, этот процесс строго обоснован лишь для линейного случая.

ТЕОРЕМА 6. Если последовательность неподвижных точек $\{(x_k, z_k)\}$ бесконечная, то $\lim \varepsilon_k = \varepsilon_*$, причем $z_k \to 0$ в случае, если $\varepsilon_* < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lim \varepsilon_k = +\infty$, то $\varepsilon_* = +\infty$ в силу неравенств $\varepsilon_k \le \varepsilon_*$. Пусть $\lim \varepsilon_k = \bar{\varepsilon} < +\infty$. Очевидно, что $\bar{\varepsilon} \le \varepsilon_*$. Так как $\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = (z_k^T B z_k) / (z_k^T d) \ge (\gamma / |d|) |z_k|$, то $z_k \to 0$. С другой стороны, $F(x_k) \le \varepsilon_k d + B z_k$, и в то же время для некоторого i с $d_i > 0$ выполнено неравенство $f_i(x_k) \ge \varepsilon_* d_i$. Для этого номера i имеем

$$\varepsilon_* \le \varepsilon_k + (B z_k)_i / d_i \le \varepsilon_k + (B z_k)_i / d_{min},$$

где $d_{min} = \min\{d_i : d_i > 0\}$. Переходя к пределу, получим $\varepsilon_* \le \bar{\varepsilon}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку описанный процесс является двухуровневым, то его следует рассматривать как некоторую идеальную схему. При практической реализации возникают стандартные вопросы о тактике выбора точностей решения внутренних задач. На этих вопросах мы не останавливаемся.

В случае, если задача линейная, теорему 6 можно существенно усилить.

ТЕОРЕМА 7. Если $F(x)\equiv Ax-b$, то последовательность $\{(x_k,z_k)\}$ конечная, т.е. при некотором k окажется $z_k^T d=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае

$$Ax_k-\varepsilon_k d\le b+Bz_k,\ z_k^T A=0,\ z_k\ge 0,$$

$$z_k^T(Ax_k-\varepsilon_k d)=z_k^T(b-Bz_k). \qquad (19)$$

Если положить $y_k=z_k/(z_k^T d)$, то в силу написанных соотношений этот столбец будет решать следующую задачу линейного программирования:

$$\min\{y^T(b+Bz_k):\ y^TA=0,\ y^Td=1,\ y\ge 0\}.$$

Если $\varepsilon_*<+\infty$, то в силу теоремы 6 $Bz_k\to 0$, и при некотором k столбец y_k будет решением задачи

$$\min\{y^Tb:\ y^TA=0,\ y^Td=1,\ y\ge 0\}.$$

Но эта задача двойственна для чебышевской задачи

$$\max\{-\varepsilon:\ Ax-\varepsilon d\le b\}.$$

Поэтому $y_k^T b=-\varepsilon_*$. Согласно (19) тогда получим $\varepsilon_k=\varepsilon_*-(z_k^TBz_k)/(z_k^Td)$, и, следовательно, $\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k+(z_k^TBz_k)/(z_k^Td)=\varepsilon_*$. Поэтому на следующем шаге окажется $z_{k+1}=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varepsilon_*=+\infty$. В системе (1) отберем те неравенства, которым соответствуют нулевые компоненты столбца d и из них составим систему $\tilde{A}x\le\tilde{b}$. Ввиду неразрешимости чебышевской задачи эта система несовместна. Из соответствующих строк и столбцов матрицы B выделим подматрицу $\tilde{B}$. Согласно теореме 3 существует пара (x_*,z_*), для которой

$$\tilde{A}x_*\le\tilde{b}+\tilde{B}z_*,\ z_*\ge 0,\ z_*^T\tilde{A}x_*=z_*^T(\tilde{b}+\tilde{B}z_*),\quad z_*^T\tilde{A}=0.$$

Дополним столбец z_* нулями (в компонентах, соответствующих ненулевым d_i) и определим $\tilde{\varepsilon}$ из условия: $Ax_*-\tilde{\varepsilon}d\le b+Bz_*$. При $\varepsilon_k\ge\tilde{\varepsilon}$ получим $Ax_*-\varepsilon_k d\le b+Bz_*$, и в силу определения z_* пара (x_*,z_*) окажется неподвижной точкой. Ввиду теоремы 2 $z_k=z_*$, т.е. $z_k^Td=0$. Теорема доказана.

Если нужно решить задачу линейного программирования, то можно поступить следующим образом. Предположим, что известна оценка (сверху для задачи на максимум и снизу для задачи на минимум) функции цели. Сформулировав несовместную систему, в которой последним неравенством стоит невыполнимое требование на функцию цели, будем решать эту систему в чебышевском смысле, взяв в качестве d последний орт. Как было доказано, мы либо найдем ее решение (и получим решение задачи линейного программирования), либо установим неразрешимость чебышевской задачи, т.е. неразрешимость задачи линейного программирования. Аналогичный подход можно применить и к задаче линейного программирования с несколькими критериями.

ЛИТЕРАТУРА

1. COTTLE R.W. On a problem in linear inequalities. - J. London Math. Soc., 1968, v.43, part 3, N 171, p. 378-384.
2. ЕРЕМИН И.И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании. - Мат. заметки, 1968, т.3, № 2, 217-234.

Поступила в ред.-изд. отдел
11.VI.1979 г.