Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.

Выпуклый анализ

УДК 519.53

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА ПРЯМОЙ ДИСКРЕТНЫМИ

Э.О.Рапопорт

В [I] была введена следующая метрика в пространстве Φ счетно-аддитивных мер на метрическом компакте K таких, что $\varphi(K) = const$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. Тогда

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \inf_{\psi \in \Psi_{\varphi_1, \varphi_2}} \int_{K \times K} r(x, y)\, \psi(dx, dy),$$

где $r(x,y)$ – метрика на K, $\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$ – семейство всех неотрицательных счетно-аддитивных по каждому аргументу функций, определенных на $K \times K$ и удовлетворяющих условию

$$\psi(\ell, K) - \psi(K, \ell) = \varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell) \quad \forall \ell \subset K.$$

Эта метрика оказывается удобной для приближения вероятностных мер, заданных на R, мерами с дискретным носителем. Отметим, что метрику можно распространить на вероятностные меры с некомпактным носителем, удовлетворяющие условию

$$\int_R x\, d\varphi < \infty. \tag{I}$$

Пусть φ удовлетворяет условию (I). Легко показать, что точечная мера ε_x ($\varepsilon_x(\ell) = 1$, если $x \in \ell$; $\varepsilon_x(\ell) = 0$, если $x \notin \ell$), наилучшим в смысле метрики ρ образом приближающая φ, должна обладать следующим свойством:

$$\varphi((-\infty, x)) = \varphi((x, \infty)).$$

Заметим, что для существования и единственности такой точки

x достаточно, чтобы на $\operatorname{supp}\varphi$ была строго монотонной и непрерывной функция распределения f, соответствующая мере φ, $f(x)=\varphi((-\infty,x))$. Множество таких функций будем в дальнейшем обозначать через B.

Пусть теперь имеются две точечные меры ε_x и ε_y $(x<y)$. Легко видеть, что наилучшее приближение φ линейными комбинациями этих мер есть следующая мера η:

$$\eta=\varphi\left(\left(-\infty,\frac{x+y}{2}\right)\right)+\varphi\left(\left(\frac{x+y}{2},\infty\right)\right)\varepsilon_y.$$

Эти соображения позволяют исследовать и случай k точечных мер. Пусть имеется k точек $a_1<a_2<\ldots<a_k$ (узлы приближения) и $k-1$ точек $y_1<y_2<\ldots<y_{k-1}$ (барьеры приближения).

ЛЕММА I. При фиксированных узлах $a_1, a_2,\ldots, a_k$ наилучшим приближением является такое, которое сопоставляет точке a_i массу, сосредоточенную на интервале $\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)$. При фиксированных барьерах $y_1,y_2,\ldots,y_{k-1}$ наилучшим приближением является такое, в котором узлы определяются из соотношений

$$\varphi((y_{i-1},a_i))=\varphi((a_i,y_i)).$$

Можно рассмотреть теперь следующий итеративный процесс: фиксируем произвольные узлы $a_1^{(1)},a_2^{(1)},\ldots,a_k^{(1)}$ $(a_j^{(1)}\le a_{j+1}^{(1)})$, строим по ним оптимальные барьеры $y_1^{(1)},y_2^{(1)},\ldots,y_{k-1}^{(1)}$ $\left(y_j^{(1)}=a_j^{(1)}+a_{j+1}^{(1)}/2\right)$. По этим барьерам строим новые оптимальные узлы $a_1^{(2)},a_2^{(2)},\ldots,a_k^{(2)}$ и т.д.

Если f – функция распределения меры φ, то этот процесс описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$f(a_1^{(i)})=1/2 f(a_1^{(i-1)}+a_2^{(i-1)}/2),$$

$$f(a_j^{(i)})=1/2 f(a_{j-1}^{(i-1)}+a_j^{(i-1)}/2)+1/2 f(a_j^{(i-1)}+a_{j+1}^{(i-1)}/2), \quad (2)$$

$$f(a_k^{(i)})=1/2+1/2 f(a_{k-1}^{(i-1)}+a_k^{(i-1)}/2).$$

На i-том шаге итерации получаем " k-меру" $\eta^{(i)}$, носитель которой есть совокупность узлов приближения $\{a_j^{(i)}\}$ $(j=\overline{1,k})$, причем в точке $a_j^{(i)}$ сосредоточена масса $\rho_j^{(i)}=f(a_{j+1}^{(i)}+a_j^{(i)}/2)-$ $-f(a_j^{(i)}+a_{j-1}^{(i)}/2)$. Заметим, что $\rho(\varphi,\eta^{(i)})$ монотонно убывает с ростом i.

Из леммы I вытекает очевидное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Если существует " k-мера", наилучшим образом приближающая φ, то ее носитель - множество $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ $(a_j\leq a_{j+1})$ - должен удовлетворять соотношениям

$$f(a_1)=1/2f(a_1+a_2/2),$$
$$-----------------$$
$$f(a_j)=1/2f(a_{j-1}+a_j/2)+1/2f(a_j+a_{j+1}/2), \quad (3)$$
$$-----------------------$$
$$f(a_k)=1/2+1/2f(a_k+a_{k-1}/2).$$

Множество $(a_1,a_2,\dots,a_k)$, удовлетворяющее этим соотношениям, будем называть стационарной " k-точкой", соответствующей мере φ, или просто стационарной " k-точкой".

Возникает естественный вопрос о сходимости процесса, определяемого соотношениями (2), к стационарной " k-точке". При произвольных начальных узлах этот вопрос остается открытым, однако можно построить сходящийся процесс, специфическим образом выбирая начальное приближение.

ЛЕММА 2. Если существует такой номер i, что $a_j^{(i)}\leq a_j^{(i-1)}$ (или $a_j^{(i)}\geq a_j^{(i-1)}$) для всех $j=\overline{1,k}$, то последовательность узлов сходится.

Будем доказывать лемму только для случая $a_j^{(i)}\leq a_j^{(i-1)}$. Отметим сначала, что если условия леммы выполняются для некоторого i, то (как следует из (2)) они выполняются и для всех s, бóльших i. Поэтому для каждого j последовательность $a_j^{(s)}$ монотонно убывающая. Покажем теперь, что она ограничена снизу. Действительно, если при всех j $a_j^{(s)}\to-\infty$ при $s\to\infty$, то, начиная с некоторого s_0, все $a_j^{(s)}$ меньше наперед заданного $z_0<0$. При этом расстояние от меры $\eta^{(s)}$, определяемой узлами $\{a_j^{(s)}\}$, до меры φ можно оценить снизу:

$$\rho(\varphi,\eta^{(s)})\geqslant\int_{z_0}^{\infty}(x-z_0)d\varphi=\int_{z_0}^{\infty}x\,d\varphi+(-z_0)\int_{z_0}^{\infty}d\varphi>\int_{-\infty}^{\infty}x\,d\varphi+(-z_0)\int_{z_0}^{\infty}d\varphi.$$

Выберем z_0 так, чтобы $\int_{z_0}^{\infty}d\varphi>\frac{1}{2}$. Тогда $\rho(\varphi,\eta^{(s)})>\int_{-\infty}^{\infty}x\,d\varphi-z_0/2$.
Поэтому при $z_0\to-\infty$ расстояние от φ до $\eta^{(s)}$ стремится к ∞, что противоречит уменьшению расстояния при процессе (2).

Следовательно, при некотором j все $a_j^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots)$ ограничены. Пусть γ_0 – минимальный из индексов, при котором $a_j^{(s)}$ ограничены снизу. Если $a_t^{(s)}$ стремится к $-\infty$ при $t<\gamma_0$, то вся масса должна быть сосредоточена в точках $\{a_j^{(s)}\}, j=j_0,j+1,\ldots,k$, т.е. увеличение числа узлов приводит к увеличению расстояния. Это противоречие и доказывает лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $f\in B$. Тогда для каждого b существует $x<b$ такой, что

$$f(x)\leqslant 1/2\,f(x+b/2).$$

Рассмотрим сначала случай $b=0$. Если существует $x<0$ такой, что $f(x)=0$, то утверждение тривиально. Пусть для всех отрицательных x $f(x)>0$. Предположим теперь, что $f(x)>1/2 f(x/2)$ для всех $x<0$. Пусть $g(x)=-xf(x)$. Тогда наше предположение принимает вид

$$g(x)>g(x/2)>0\qquad\forall x<0.$$

Поскольку f монотонно возрастающая, то

$$f(-1)\geqslant f(x)\geqslant f(-2)$$

и для всех $x\in[-2,-1]$ выполняется неравенство $g(x)\geqslant f(-2)$. Если $x\in[-2^{k+1},-2^{k}]$, то $g(x)>g(x/2^k)\geqslant f(-2)$, поскольку $x\cdot 2^{-k}\in$ $\in[-2,-1]$. Поэтому для всех x, меньших -1, справедливо $f(x)\geqslant$ $\geqslant f(-2)/-x$ или $-x\geqslant f(-2)/f(x)$. Так как $\int_{-\infty}^{\infty}x\,df$ сходится, то существует такое c, что для всех $A>1$ выполняется цепочка неравенств

$$c>\int_{-A}^{-1}(-x)\,df\geqslant f(-2)\int_{-A}^{-1}df/f=f(-2)(\ln f(-1)-\ln f(-A)).$$

Но при $A\to\infty$ правая часть стремится к ∞. Полученное противоречие и доказывает лемму в случае $b=0$.

Пусть $b\neq 0$. Рассмотрим $h(x)=f(x+b)$. Функция h – также функция распределения, удовлетворяющая условиям леммы. Поэтому существует x_0 такое, что $h(x_0)\leqslant 1/2\,h(x_0/2)$. Но тогда

$f(x_0+b)\le 1/2 f(b+x_0+b/2)$, и точка x_0+b искомая.

Мы можем теперь построить процесс (который в дальнейшем будем называть левым процессом), сходящийся к стационарной точке.

Пусть имеется стационарная " k -точка", т.е. заданы числа $a_1<a_2<\ldots<a_k$, удовлетворяющие (3).

Для построения стационарной " $k+1$ -точки" возьмем в качестве начального приближения точки $a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \ldots, a_k^{(1)}$, где $a_j^{(1)}$ таково, что $a_j^{(1)}=a_j$ $(j=\overline{1,k})$, а

$$f(a_0^{(1)})\le 1/2 f(a_0^{(1)}+a_1^{(1)}/2).$$

Тогда

$$f(a_0^{(2)})=1/2 f(a_0^{(1)}+a_1^{(1)}/2)>f(a_0^{(1)})$$

и

$$f(a_1^{(2)})=1/2 f(a_1^{(1)}+a_0^{(1)}/2)+1/2 f(a_1^{(1)}+a_2^{(1)}/2)\geqslant \tfrac{1}{2} f(a_1^{(1)}+a_2^{(1)}/2)=f(a_1^{(1)}).$$

В остальных соотношениях будет равенство. Поэтому $a_j^{(2)}\geqslant a_j^{(1)}, j=\overline{0,k}$, и монотонный процесс приводит к стационарной " $k+1$ -точке".

ЛЕММА 4. Пусть имеется стационарная " k -точка" $(a_1,\ldots,a_k)$ и множество $A=\{x/f(x)\le 1/2 f(x+a_1/2)\}$ выпукло. Тогда левый процесс приводит к одной и той же стационарной " $k+1$ -точке", независимо от выбора $x_0\in A$.

Рассмотрим последовательность $(\alpha_0^{(i)},\ldots,\alpha_k^{(i)})$, полученную из начального приближения $\alpha_0^{(1)}=x_0, \alpha_1^{(1)}=a_1,\ldots,\alpha_k^{(1)}=a_k$. Если предположить, что для всех i $\alpha_0^{(i)}\in A$, то и $\alpha_0=\lim \alpha_0^{(i)}$ принадлежит A . Но тогда

$$f(\alpha_0)=1/2 f(\alpha_0+\alpha_1/2);\ f(\alpha_0^{(1)})=1/2 f(x_0+a_1/2)$$

и

$$f(\alpha_1^{(1)})=1/2 f(x_0+a_1/2)+1/2 f(a_1+a_2/2)>f(a_1+a_2/2)=f(a_1).$$

Следовательно, $\alpha_1>a_1$ и $f(\alpha_0)>1/2 f(\alpha_0+a_1/2)$. Поэтому найдется такое s , что $\alpha_0^{(s)}\notin A$. Пусть y_0 – другая точка из A такая, что $y_0>x_0$. Вектор $(\alpha_0^{(s)},\ldots,\alpha_k^{(s)})$ покомпонентно мажорирует вектор $(y_0,a_1,\ldots,a_k)$. Значит, предельные векторы равны. Лемма доказана.

Ясно, что для любой стационарной " k-точки" $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$

выполняется неравенство $f(a_1)\le 1/2$. Поэтому для удобства пользования леммой 4 мы потребуем выполнения следующего условия:

$$\text{для любого } b \text{ такого, что } f(b)\le 1/2, \quad \text{множество } A_b=\{x \mid f(x)\le 1/2 f(\tfrac{x+b}{2})\} \text{ выпукло.} \qquad (*)$$

ЛЕММА 5. Для каждой стационарной "k-точки" существует меньшая (покомпонентно), полученная левым процессом из некоторой стационарной "$k-1$-точки".

Пусть $(b_1, b_2,\ldots, b_k)$ – стационарная "k-точка". Взяв в качестве начального приближения $(b_2,\ldots,b_k)$, получим некоторую стационарную "$k-1$-точку" $(\beta_2,\ldots,\beta_k)$. Пусть x_0 таково, что $x_0<b_1$ и $f(x_0)<1/2 f(\frac{x_0+b_1}{2})$. Набор $(x_0,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ порождает новую стационарную "k-точку" $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, при этом вектор $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ покомпонентно мажорирует вектор $(a_1, a_2,\ldots,a_k)$, так как $\beta_j<b_j\ (j=\overline{2,k})$ и

$$f(a_1^{(i)})=1/2 f(a_1^{(i-1)}+a_2^{(i-1)}/2)<1/2 f(b_1+b_2/2);$$

$$f(a_j^{(i)})=1/2 f(a_j^{(i-1)}+a_{j-1}^{(i-1)}/2)+1/2 f(a_j^{(i-1)}+a_{j+1}^{(i-1)}/2)<f(b_j).$$

Предельный переход завершает доказательство.

Как уже говорилось, стационарная "I-точка" легко находится из уравнения $f(c)=1/2$. Применяя к ней левый процесс, получим стационарную "2-точку" и т.д. Стационарные "k-точки", полученные многократным применением левого процесса, будем называть левыми "k-точками". Лемма 4 гарантирует, что эти точки определяются однозначно.

ЛЕММА 6. Левая "k-точка" мажорируется покомпонентно любой стационарной "k-точкой".

Доказательство будем вести по индукции. Пусть $k=1$. Возьмем c такое, что $f(c)=1/2$, и строим процесс, исходя из начального приближения (a_0,c), где $f(a_0)\le 1/2 f(a_0+c/2)$. Пусть (a,b) – предельная "2-точка" этого процесса, (α,β) – другая стационарная "2-точка", причем можно считать, что $a_0<\alpha$. Кроме того, $\beta>c$. Поэтому

$$f(a^{(1)})=1/2 f(a_0+c/2)<1/2 f(a_0+\beta/2)<1/2 f(\alpha+\beta/2)=f(\alpha),$$

т.е. $a^{(1)}<\alpha$. Поскольку $f(b^{(1)})=1/2+f(a^{(1)})$, то $b^{(1)}<\beta$. Пусть теперь доказано, что $a^{(i)}<\alpha$ и $b^{(i)}<\beta$. Тогда

$$f(a^{(i+1)})=1/2 f(a^{(i)}+b^{(i)}/2)<1/2 f(\alpha+\beta/2)=f(\alpha).$$

Поэтому для всех i имеем $a^{(i)}<\alpha$ и $b^{(i)}<\beta$, откуда $a\le\alpha, b\le\beta$. База индукции доказана.

Пусть утверждение леммы справедливо для k и $(a_1, a_2, \ldots \ldots, a_k, a_{k+1})$ – левая "$k+1$ -точка", полученная из левой "k-точки" $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$. Пусть $(b_1, b_2, \ldots, b_{k+1})$ – другая стационарная "$k+1$ -точка", а $(\beta_1, \ldots, \beta_{k+1})$ – стационарная "$k+1$-точка", меньшая $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ – получена из некоторой стационарной "k-точки" $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ левым процессом. По индукционному предположению $d_j\le c_j$ $(j=\overline{1,k})$. Пусть x_0 таково, что $x_0<d_1$, $f(x_0)<1/2 f(\frac{x_0+d_1}{2})$. Тогда из начального приближения $(x_0, d_1, \ldots, d_k)$ получим исходную левую "$k+1$ -точку", а из начального приближения $(x_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_k)$ – стационарную "$k+1$-точку" $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k+1})$. Поскольку $d_j\le c_j$, то и $a_j\le\beta_j\le b_j$. Лемма доказана.

Аналогичные построения можно провести и справа, получив тем самым правые "k-точки". Для единственности таких точек естественно потребовать выполнения следующего условия (аналогичного условию (ж)):

для любого b такого, что $f(b)\ge\frac{1}{2}$,
множество $C_b=\{x \mid f(x)\ge 1/2+1/2 f(x+b/2)\}$ выпукло.

Правая и левая "k-точки" описывают границы, внутри которых лежит "k-мера", наилучшим образом приближающая исходную меру φ.

ТЕОРЕМА I. *Существует "k-мера", наилучшим образом приближающая меру φ.*

Утверждение теоремы сразу следует из того, что можно искать оптимальную "k-меру" только среди мер, носители которых заключены в фиксированном компакте (определяемом левой и правой "k-точками").

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы существовала единственная стационарная "k-точка", необходимо и достаточно, чтобы левая и правая "k-точки" совпадали.*

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вест. ЛГУ, 1958, № 7. Сер. математика, механика, астрономия, вып. 2, с. 52-59.

Поступила в ред.-изд. отдел
2.04.1979 г.